РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВО РГУПС)

МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие
для лабораторных работ

Ростов-на-Дону
2017

УДК 681.3(07) + 06

Рецензент – доктор технических наук, профессор М.А. Бутакова

Методы аналитической и поисковой оптимизации: учебно-методическое пособие для лабораторных работ / А.А. Костоглотов, С.В. Лазаренко, З.В. Лященко, И.Е. Кириллов; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 44 с.

Содержатся подробные пояснения к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Методы аналитической и поисковой оптимизации». Рассмотрены преобразования алгебраических выражений в MathCad, построение графиков функций и решение алгебраических уравнений, метод Свенна, задачи линейного программирования, приведены практические примеры и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов и магистрантов направлений «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии» и «Механотроника и робототехника», а также для студентов, аспирантов и магистрантов всех специальностей, изучающих дисциплину «Методы аналитической и поисковой оптимизации» и смежные дисциплины.

Одобрено к изданию кафедрой «Информатика».

© Колл. авт., 2017
© ФГБОУ ВО РГУПС, 2017

Оглавление

Лабораторная работа № 1
Преобразование алгебраических выражений в MathCad

1.1 Инструкция MathCad

Mathcad является универсальным математическим пакетом, позволяющим решать большое количество сложных задач без использования программирования.

Пакет Mathcad разработан с учетом интересов простого пользователя. Реализован интуитивно понятный интерфейс, основной упор сделан на наглядность и простоту работы со средой.

Основным преимуществом Mathcad являются:

- широкие возможности;
- простота и удобство эксплуатации;
- легкость и наглядность программирования задач.

Пакет Mathcad создавался как мощный научный калькулятор, позволяющий легко справляться с вычислением сложных формул и функций, решением алгебраических уравнений, упрощением алгебраических уравнений, решением дифференциальных уравнений, анализом функций, построением их графиков, поиском экстремумов, численным и аналитическим дифференцированием интегрированием и тому подобного.

На текущий момент Mathcad способен:

- использоваться как обычный калькулятор для простых вычислений;
- вычислять символьные выражения;
- упрощать символьные выражения;
- использоваться для вычисления интегралов и производных функций;
- решать системы линейных алгебраических уравнений, работать с матрицами и определителями;
- решать нелинейные алгебраические уравнения;
- решать системы нелинейных алгебраических уравнений;
- строить графики как в декартовых, так и в полярных координатах, различные диаграммы и гистограммы;
- создавать программы с разветвляющимися и циклическими алгоритмами, используя свой собственный язык программирования;
- решать дифференциальные уравнения;
- решать задачи теории вероятности и математической статистики;
- осуществлять обмен информацией с другими приложениями операционной системы Windows, такими, как Excel или Mathlab;

1.2 Интерфейс Mathcad

Для запуска Mathcad необходимо либо щелкнуть на соответствующей пиктограмме на рабочем столе, либо в меню **Пуск** зайти в **MathSoft Apps** и там выбрать **Mathcad**.

После запуска программы загрузятся 3 окна: главное окноMathcad , окно **Resource Center**и окно **Tip of the Day**.

Окно **Tip of the Day** (Совет Дня) хорошо знакомо пользователям пакета Microsoft Office как одно из стандартных окон. Оно содержит описание одной из произвольно выбранных возможностей Mathcad. Перед началом работы это окно надо закрыть, нажав на кнопку Close. Если мы не хотим, что бы это окно появилось при следующем запуске, достаточно убрать галочку в флажке**Show tips on startup**. Если содержимое окна нас заинтересовало и мы хотим увидеть еще один совет, достаточно щелкнуть на кнопке Next tip.

Окно **Resource Center** (Центр документации) содержит справочную информацию о работе в Mathcad. Опять же закроем это окно.

Для того чтобы оба эти окна больше не появлялись при запуске, необходимо в меню **Tools (Сервис)** выбрать подпункт **Preferences (Параметры)** и в возникшем окне убрать соответствующий флажок Show Mathcad tips at startup.

Рассмотрим теперь главное окно Mathcad (рисунок 1). Оно является стандартным для большинства приложений операционной системы Windows. Выглядит это окно следующим образом:

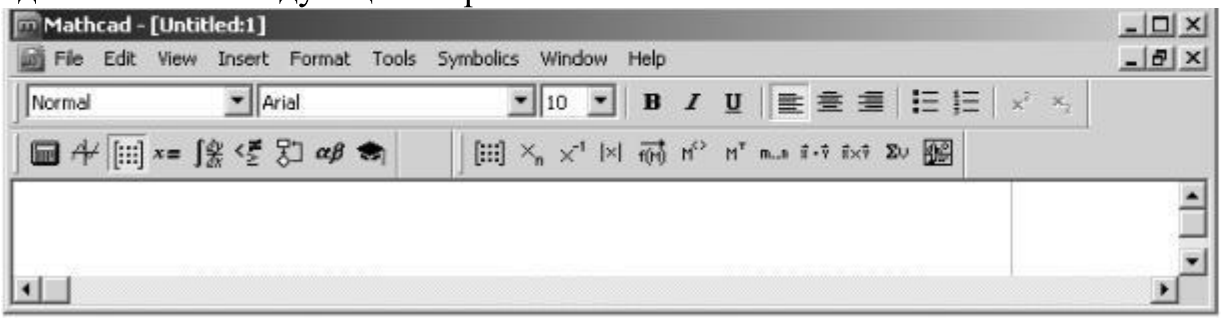


Рисунок 1 - главное окно Mathcad

В строке заголовка представлено имя открытого документа Mathcad. По умолчанию он называется Untitled1.

Главное меню Mathcad

Ниже строки заголовка расположена строка главного меню. В строке меню сгруппированы все те действия, которые выполняются в окне Mathcad. При нажатии на любой пункт главного меню появляется список меню первого уровня. Некоторые пункты меню первого уровня содержат подменю второго уровня. Такие пункты помечены справа треугольником. Рассмотрим подробнее пункты главного меню.

Вменю **File** сгруппированы действия, связанные с выходом из программы, открытием, закрытием, созданием и печатью документов.

Вменю **Edit** сгруппированы действия, связанные с редактированием текста, копированием и поиском в документе.

Меню **View** отвечает за общий вид окна Mathcad, используемые панели инструментов, анимацию и т.п.

Insert содержит элементы, которые можно вставить в документ (графики, матрицы, встроенные функции, рисунки, объекты других приложений Windows и т.п.).

Вменю **Format** сгруппированы операции, позволяющие управлять стилями вычисления и стилем рабочего листа.

Меню **Symbolic** позволяет управлять работой с символьными выражениями. Упрощать символьные алгебраические выражения, приводить подобные слагаемые, раскладывать на множители, раскладыватьдробно-рациональныевыражения на множители и т. п.

Меню **Windows** отвечает за работу с окнами при открытии нескольких документов.

В меню **Help** сгруппирована справочная информация по Mathcad.

Панели инструментов

Под строкой меню расположены панели инструментов. Если текущих панелей инструментов недостаточно, всегда можно подключить дополнительные, выбрав в меню **View** (Вид) подпункт**Toolbars** (Панели инструментов) и установить галочки напротив нужных панелей инструментов.

На панелях инструментов, в понятном для пользователя графическом виде, представлены наиболее часто выполняемые в Mathcad действия.

Рассмотрим основные панели инструментов.

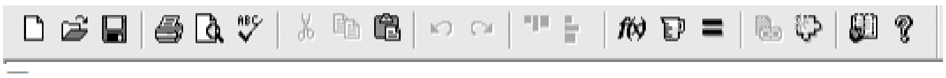


Рисунок 2 – Панель инструментов «Standard»

Данная панель инструментов (рисунок 2) содержит значки, связанные с работой с файлами: создание нового файла, открытие существующего файла, сохранения редактируемого файла, печати текущего документа, редактированием документов, вставкой объектов и т.п.

Чтобы получить представление о том, какая выполнится команда при нажатии на данную кнопку, достаточно показать на нее мышкой и задержаться на полсекунды, после чего возникнет всплывающая подсказка.

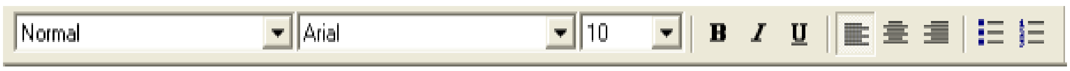


Рисунок 3 – Панель инструментов «Formatting»

Данная панель инструментов отвечает за форматирование текста и формул, позволяет изменять стиль текста, тип шрифта, размер шрифта, выравнивание и т.п. (рисунок 3).

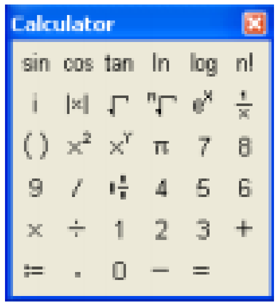
Как и панель инструментов «Стандартная», она хорошо знакома любому пользователю, поскольку фигурирует в таких широко используемых программах пакета Microsoft Office, как Word, Excel, Access, PowerPoint и т.д.

Панель инструментов «Math»

Здесь сгруппированы девять панелей инструментов, предназначенных для работы с математическими приложениями: «**Calculftor**», «**Graph**», «**Matrix**», «**Evaluation**», «**Calculus**», «**Boolean**», «**Programming**», «**Greek**» и «**Symbolic**».

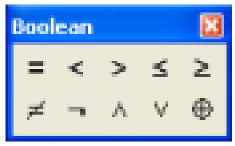
Эти же панели инструментов можно подключить и через меню **Toolbars**.

Панель инструментов «Calculator»



Данная панель инструментов имитирует обычный научный калькулятор. Здесь сгруппированы основные математические функции, мнимая единица i, цифры и арифметические операции. Используя данную панель, можно только при помощи мыши производить основные арифметические вычисления.

Панель инструментов «Boolean»



Данная панель инструментов содержит шесть операций отношения, используемых в логических выражениях и четыре логических операции.

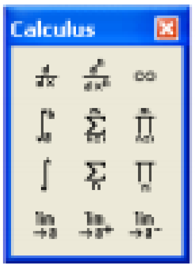
Панель инструментов «Graph».

Позволяет строить графики функций двух и более переменных различной сложности, заданных в декартовых или в полярных координатах, графики функций, записанных в параметрическом виде. Для функции многих переменных можно строить график поверхности или линии уровня, диаграммы и гистограммы.

Панель инструментов «Matrix»

Тут сгруппированы шаблоны для работы с матрицами и векторами. Задание размерности матриц и векторов, введение индексов, вычисление обратной матрицы, определителя, оператор векторизации матриц, выделение столбца матрицы, транспонирования матриц, создание ранжированных векторов, скалярное и векторное произведение, сумма элементов матрицы или вектора.

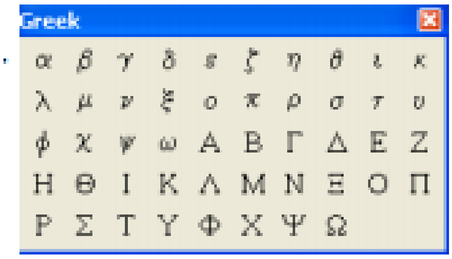
Панель инструментов «Calculus»



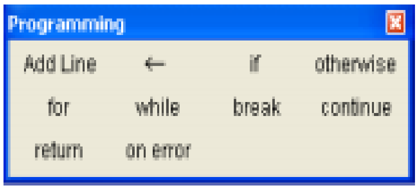
Позволяет вычислять производные первого и *n*-го порядка, определенные интегралы, сумму ряда, произведение элементов вектора, неопределенные ин- те- гралы, пределы функций и последовательностей, в том числе односторонние.

Панель инструментов «Greek»

Содержит алфавит греческих символов



Панель инструментов «Programming»



Предназначена для создания программ на встроенном в Mathcad языке программирования. Команду Add Line можно использовать при написании сложных составных функций.

1.3 Преобразование алгебраических выражений

Пример 1. Упростить алгебраическое выражение:

$$\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}*\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$$

Решение. Устанавливаем стиль вывода результатов по горизонтали. Вводим выражение. Заходим в пункт меню ***Symbolics (*** команда ***Simplify)*** . В результате, справа от формулы появляется *ответ*.

Пример отображения формулы: *p^3П+4*p^2П+10*p+12 ППППП/p^3П–p^2П+ 2*p+16 ППППП* p^3П3 * p^2П +8*p ПППП/p^2П+2*p +6ППППП*. (П - пробел)

Формула введена и выделена углом. После этого можно подавать команду ***Simplify.***

Пример 2. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые: $(z-2y)(z+2y)(x-y)+4xy^2+yz^2$.

Решение: Вводим алгебраическое выражение:*(z-2*y) *(z+ 2*y) *(x–y)+4*x*y^2П+y*z^2ППППППППППП.(П –* пробел). При помощи последних пробелов выделяем всю формулу. Заходим в пункт меню **Simbolics** и вызываем командну**Expand.** Получаем *ответ*: $z^2\ x+4\ y3$.

Пример 3. Разложите алгебраическое выражение на множители: $x5+x4-6x^3-13x^2-13x-6$.

Решение. Вводим алгебраическое выражение:*x^5П+x^4П–6*x^3П–13*x^2П–13*x–6ППППППППП*. Заходим в пункт меню **Simbolics** и вызываем команду **Factor.** Получаем *ответ*: $(x-3)\ (x+2)\ (x+1)\ (x^2+x+1)$.

Пример 4. Разложите рациональную дробь на простейшие множители:

$$\frac{x^3+4x^2-5x+6}{(x-2)^2*(x-1)(x^2+1)}$$

Решение: Вводим алгебраическое выражение:*x^3П+4*x^2 П–5*x+6ППППП/(x–2)^2П*(x–1)*(x^2П+1)*. После выделения символа x вызываем пункт меню **Simbolics** и заходим в подпункт **Variable**. В этом подпункте выбираем команду **Convert to Partial Fraction.** Если эта команда не активизирована, то переменная, по которой необходимо разложить рациональную функцию на простые дроби, не выделена.

Ответ: $\dfrac{20}{(x-2)^2}-\dfrac{81}{169\ (x-2)}+\dfrac{3}{4\ \ (x-1)}-\dfrac{1}{676}\ \dfrac{589+183x}{x^2+2\ x+5}$.

1.4 Задание для самостоятельной работы

1.Упростить алгебраическое выражение.

№	Алгебраическое выражение
1	$\frac{x^4-x^3-11x^2+9x+18}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}\cdot\frac{x^3-9x^2+26x-24}{x^3-8x^2+19x-12}$
2	$\frac{2-x}{x+1}\cdot\frac{3x^4-24x^3-3x^2+204x-252}{220x-70x^2-168-15x^3+10x^4-x^5}$
3	$\frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^5+5x^4-16x-80}\cdot\frac{2x^4+10x^3-16x-80}{x^2+2x+4}$
4	$\frac{2x^4+10x^3-2x-10}{x^2+x+1}\cdot\frac{x^3+x^2+x+1}{x^5+5x^4-x-5}$

5	$\dfrac{4x^4+x^5-81x-324}{3x^4+10x^3-81x-270}\cdot\dfrac{3x^3+19x^2+57x+90}{x^4+7x^3+21x^2+63x+108}$
6	$\dfrac{4x^5+40x^4+100x^3-80x^2-320x+256}{x^4+x^3-9x^2+11x-4}\cdot\dfrac{3x^3-3x^2}{x^2+8x+16}$
7	$\dfrac{5x^4+10x^3-100x^2-330x-225}{x^4+x^3-7x^2-x+6}\cdot\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-3x+2}$
8	$\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x^3-5x^2-15x-72}\cdot\dfrac{x^4-8x^3-27x+216}{49x^4-882x^2+3969}$
9	$\dfrac{7x^4-126x^2+567}{(x^5-8x^4-27x^2+216x)}\cdot\dfrac{(x^3-5x^2-15x-72)}{(x^3+3x^2-9x-27)}$
10	$\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^4+x^3-9x^2+11x-4}{9x^5+36x^4+9x^3-90x^2-36x+72}$
11	$\dfrac{(x^3-x^2-4x+4)}{(x^3-3x+2)}\cdot\dfrac{3x-3}{2x-4}$
12	$\dfrac{(x^4+2x^3-72x^2-416x-640)}{(9x^3-144x^2+180x+3600)}\cdot\left(\dfrac{x-10}{x^2+8x+16}\right)$
13	$\dfrac{(x^4+x^3-3x^2-5x-2)}{(9x^3-351x^2+3240x+3600)}\cdot\left(\dfrac{x^2-40x+400}{x^3-3x-2}\right)$
14	$\dfrac{(2x^4+4x^3-4x-2)}{(x^3+x^2-x-1)}\cdot\left(\dfrac{x^4-7}{2x+2}\right)$
15	$\dfrac{(4x^4+4x^3-48x^2-112x-64)}{(2x^3+4x^2-32x-64)}\cdot\left(\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}\right)$
16	$\dfrac{(4x^4-45x^2+35x^3-315x+81)}{(8x^4+166x^3+1038x^2+1674x-486)}\cdot\left(\dfrac{x+9}{x^2-6x+9}\right)$
17	$\dfrac{x^4+x^3-7x^2-x+6}{(5x^4+10x^3-100x^2-330x-225)}\cdot\dfrac{x^3-2x^2-15x}{x^2-3x+2}$
18	$\dfrac{(220x-70x^2-168-15x^3+10x^4-x^5)}{(3x^4-24x^3-3x^2+204x-252)}\cdot\dfrac{3x^2-6x^2+12}{x-2}$
19	$\dfrac{(x^2+3x+2)}{(x^2-16)}\cdot\dfrac{(2x^3+4x^2-32x-64)}{(4x^4+4x^3-48x^2-112x-64)}$
20	$\dfrac{x^2-9}{x^2+12x+27}\cdot\dfrac{(8x^4+166x^3+1038x^2+1674x-486)}{(4x^4-45x^2+35x^3-315x+81)}$

21	$\frac{x^2+8x+16}{x-10}\cdot\frac{(9x^3-144x^2+180x+3600)}{(x^4+2x^3-72x^2-416x-640)}$
22	$\frac{2(x+1)}{x^3+2x}\cdot\frac{(x^3+x^2-x-1)}{(2x^4+4x^3-4x-2)}$
23	$\frac{2x-4}{x-1}\cdot\frac{(x^3-3x+2)}{(x^3-x^2-4x+4)}$
24	$\frac{x^3-3x-2}{(x^2-40x+400)}\cdot\frac{(9x^3-351x^2+3240x+3600)}{(x^4+x^3-3x^2-5x-2)}$
25	$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-15}\frac{(5x^4+10x^3-100x^2-330x-225)}{x^4+x^3-7x^2-x+6}$
26	$\frac{9x^5+36x^4+9x^3-90x^2-36x+72}{x^4+x^3-9x^2+11x-4}\cdot\frac{x^3+3x^2-4x}{x^3+6x^2+12x+8}$
27	$\frac{x^2+8x+16}{x^2-x}\cdot\frac{x^4+x^3-9x^2+11x-4}{4x^5+40x^4+100x^3-80x^2-320x+256}$
28	$\frac{x^3+2x^2+4x}{2x^4+10x^3-16x-80}\cdot\frac{x^5+5x^4-16x-80}{x^3+2x^2+4x+8}$
29	$\frac{x^3+2x^2+4x}{2x^4+10x^3-16x-80}\cdot\frac{x^5+5x^4-16x-80}{x^3+2x^2+4x+8}$
30	$\frac{3x^5+10x^4-81x^2-270x}{4x^4+x^5-81x-324}\cdot\frac{x^4+7x^3+21x^2+63x+108}{3x^3+19x^2+57x+90}$

2. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые.

№	Алгебраическое выражение
1	$(x-1)^4(x+2)(x+4)^2(3x+8)$
2	$(3x+2)^3(x^2+2)^4(x-3)^2(0.5-x)$
3	$((x^2-1)(2x-3))^2(3x+2)^3$
4	$(x^2+4x-6)((x^3-1)(2-4x))^2(2x+4)^2$
5	$(7x^3+4x)((x^2-9)(3+x)(2x+4))^2$
6	$x(x^3-3x^2+4)((x^2-9)(3+x)(2x+4))^2$
7	$((x^3-1)(2x^2+2x-3))^3(3x+2)^2$
8	$(6x-9)^5(2-7x)(x^4+4x)^2(3x+8)$
9	$(x-3x^2+7)^2(x^2+3x-1)(9x^4-1)^3$
10	$(7x+5x^2)\left((7x-4)(x^4+3)(8x+4)\right)^3$

11	$(x^3-3x^2+4)((x^4-81)(3x^4+x)(2x+4))^3x$
12	$((x^3-3)(x^6-11))^2((3x^4+2x+4)(2x+4))^3$
13	$(x-54)^4(12x+4)(2x+4)^2(x-8x^6)$
14	$(5x^2-2x^3+5x)^2(3-x^2+x)(7x^4-x)^3$
15	$((9x^2-3x+1)(x^2+x-2))^2(1.5-4x)^4$
16	$(x^3-3x^2+4)((x^4-81)(3x^4+x)(2x+4))^3x$
17	$((3x+x^2)(x^3-3))^2((6x^3+2x^2+4)(4-2x))^3$
18	$(2x+27)^5(12+6x)(2x-9)^2(x^2+6x^3)$
19	$(x^2+3x^3-2)((x^2-16)(2x^2+5))^3(2x+4)^2$
20	$(10x-2)^4(13x-4)(5x+3)^3(x-8x^2)$
21	$((x^3-1)(5x-2))^3(7x+3)^3$
22	$(3x^2+89x-16)((x^4-1)(7+9x))^2(6x+1)^2$
23	$(4x+3)^3(x^2+2)^2(x-3)^4(2.5-x)$
24	$((2x^3-3)(5x^2+12x-33))^3(2x+0.5)^2$
25	$(3x-7)^5(1-5x)(2x^3+4x)^2(3+8x)$
26	$((5x^2-125)(x-3))^6(3x+2)^2$
27	$x(2x^3-3x^2+2)((x^2-1)(4+3x)(x+5))^2$
28	$(4x-2x^3+7)^2(x^2-1)(9x^4-x+8)^3$
29	$(3x-5x^2)((2x-1)(x^3+5)(7x+6))^3$
30	$(5x^3+3x)((x^2-4)(6+x)(8x+4))^2$

3. Разложите алгебраическое выражение на множители.

№	Алгебраическое выражение	№	Алгебраическое выражение
1	x^3+2x^2+4x+8	16	$4x^4+14x^3+22x^2+35x+30$
2	$6x^3+55x^2+129x+90$	17	$x^4+2x^3-143x^2-144x+5164$
3	$x^4+2x^3-72x^2-416x-$ -640	18	$x^6+4x^3+x^5+4x^2-48x-12x^4$
4	$2x^4+4x^3-4x-2$	19	$2x^5+8x^2+x^4+4x-6x^3-24$
5	$9x^5+36x^4+9x^3-90x^2-$ $-36x+72$	20	$4x^4-31x^3+33x^2-93x+63$
6	$x^4+x^3-9x^2+11x-4$	21	$2x^3-25x^2+93x-90$
7	$6x^3+62x^2+184x+168$	22	$14x^4-82x^2-46x^3+138x+120$
8	$x^4+7x^3+21x^2+63x+108$	23	$3x^4+x^3-22x^2-4x+40$
9	$3x^5+10x^4-81x^2-270x$	24	$6x^4+23x^3-9x^2-92x-60$
10	$4x^4+x^5-81x-324$	25	$16x^4+76x^3+68x^2-76x-84$
11	$3x^3+19x^2+57x+90$	26	$-x^4-5x+12x^3+60-x^5-5x^2$
12	$2x^4+10x^3-16x-80$	27	$-6x^2+58x+120-4x^3$
13	$x^5+5x^4-16x-80$	28	$x^4+7x^2+9x^3+63x$
14	$x^5+x^4-21x^3-45x^2$	29	$16x^3-67x^2+64x-x^4-252$
15	$x^4+6x^3+4x^2-30x-45$	30	$5x^3+56x^2+112x-128$

4. Разложите рациональную дробь на простейшие множители.

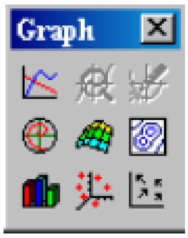
№	Алгебраическое выражение	№	Алгебраическое выражение
1	$\dfrac{5x^4+7x^3+5x-4}{(x^2+4)(x-2)^2(x^2-1)}$	16	$\dfrac{x^4+x^3-5x-7}{(x^2+4x+1)(x-2)^2(x^2-1)}$

2	$\dfrac{3x^5+6x^3+5x-1}{(x^2-4x+3)(x-2)^2(x^2-16)}$	17	$\dfrac{x^6+2x-1}{(x^2-x+5)(x-3)^3(x^2-1)}$
3	$\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{(x^2-x)(3-x)^3(x^2-81)}$	18	$\dfrac{x^4+x^3-5x-7}{(x^2+4x+1)(x-2)^2(x^2-1)}$
4	$\dfrac{x^5-7x^4+2x-8}{(x^3-4x^2+5x)(x-3)^2(x^2-1)}$	19	$\dfrac{2x^6-3x^4+9}{(x^2-2x-15)(4x+1)^3x}$
5	$\dfrac{x^5+2x^3+9x^2-7}{(4x^2-6x-10)(5x+3)^2x}$	20	$\dfrac{x^5+2x^3+9x^2-7}{(2x^2-6x+1)(4x+2)x^3}$
6	$\dfrac{6x^6+4x^2+9x}{(x^2-4)(2-3x)^3(x^2-4)}$	21	$\dfrac{3x^5+x^2+4x}{(3x^2-6x)(x+2)^4x^2}$
7	$\dfrac{2x^7+4x^2+1}{(25x^2-30x-5)(3x^2+x)^2}$	22	$\dfrac{5x^6+9x^3+10x+15}{(5x^2-125)(6x^2+2x)^2}$
8	$\dfrac{x^6+3x^3+4x+12}{(x^2-25)(3x^2+9x)^3}$	23	$\dfrac{7x^5-5x^6+1}{(x^2+8x)x^3(x^2-9)^2}$

9	$\dfrac{x^7+2x^5+15x+14}{(x^2+5x+13)(3x-6)^4}$	24	$\dfrac{x^7+2x^6+5x+51}{(x^2+3x+1)x^2(x^2-4)^3}$
10	$\dfrac{3x^4+3x+4}{(x^2-1)(2-x)^3(x^2-9)}$	25	$\dfrac{4x^4+5x^3+2x-1}{(x^2-4x+5)(x-1)^2(x^2-9)}$
11	$\dfrac{3x^5+x^2+4x}{(5x^2+6x-1)(x+2)^3(x-3)}$	26	$\dfrac{6x^5+3x^3+4x+1}{(5x^2+6x-1)(x+4)^3(x^2-4)}$
12	$\dfrac{7x^5-3x^3+7x+77}{(x^2+10x+25)(x^2-9)^2}$	27	$\dfrac{4x^7+9x^6+x+5}{(x^2+3x)x^2(x^2-25)^3}$
13	$\dfrac{8x^5-14x^3+34}{x(x^2-x)(7-x)^3}$	28	$\dfrac{5x^6+x^5-4x+21}{(2x^2+x+14)(3-6x)^4}$
14	$\dfrac{x^6+4x^3-14x^2+35}{x(2x^2+x)(5-2x)^4}$	29	$\dfrac{x^6-3x^3+6x+11}{(x^2-10x+25)(3x^2+9)^3}$
15	$\dfrac{4x^2-3x^3-x}{(x^2-2x+1)(4x+1)^2(x^2-64)}$	30	$\dfrac{x^5-2x^3+9x^2+4}{(x^2-6x+1)(x+2)x^4}$

Лабораторная работа № 2
Построение графиков функций и решение алгебраических уравнений

2.1 Построение графиков функций



В математике часто удобнее полученное решение вывести в графическом виде. Для решения этой задачи удобнее использовать панель графиков. На этой панели представлено семь кнопок, предназначенных для построения различных типов графиков. Эту же задачу можно решить, используя меню **Insert** (Вставка). В этом меню есть подменю **Graph**, состоящее из восьми команд. Рассмотрим все графические команды:

X-Y Plot ,*«Shift+2»* – построение графиков функции одной переменной в декартовых координатах.

Polar Plot ,*«Ctrl+7»* – построение графиков функции одной переменной в полярных координатах.

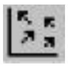
переменных. При вызове данной команды появляется окно, в котором предлагается пять видов представления графических результатов в трехмерном пространстве: поверхность, контур, векторное поле, трехмерная диаграмма и точечный график. Можно выбрать любой тип представления.

Surface Plot . «Ctrl+2» – графики функций двух переменных в декартовых координатах.

Counter Plot ,*«Ctrl+5»* – линии уровня функции двух переменных в декартовых координатах.

3D Scatter Plot – изображение точек в трехмерном пространстве, заданных декартовыми координатами.

3D Bar Plot – трехмерные диаграммы.

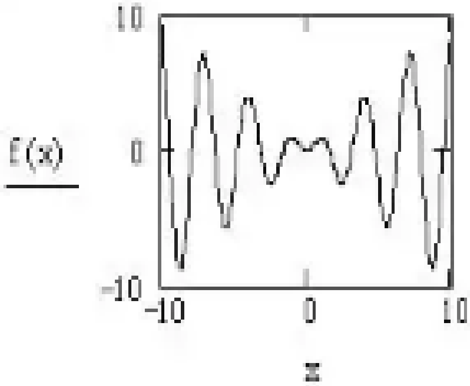
Vector Field Plot  – векторное поле.

Пример 1. Построить график функции $f(x) = x\sin x$ на отрезке *[0,2π]*.

Решение: Определим заданную функцию. Для этого в произвольном месте документа с клавиатуры необходимо ввести имя функции и в скобках задать аргумент. Для ввода знака присваивания можно использовать, так называемою, «горячую» клавишу. Для этого необходимо нажать комбинацию из двух клавиш Shift и «:». В дальнейшем комбинации «горячих» клавиш мы будем заключать в кавычки и между удерживаемыми клавишами ставить знак +. Например «Shift+:», означает, что необходимо нажать на клавишу Shift и, удерживая ее, нажать на клавише двоеточие. После знака присваивания водим правую часть. Получили:

$$f(x) := x\sin(x)$$

Вызываем мастер построения графиков в декартовой системе координат. Это можно сделать либо из панели графиков, либо из меню **Insert/Graph**, либо при помощи “горячей” клавиши «Shift+2». В результате появляется прямоугольник, в который вписан квадрат. Внешний прямоугольник обозначает поле объекта мастера графиков, а внутренний – область построения графика. Подводим курсор мыши к левому прямоугольному маркеру, нажимаем левую кнопку мыши и при помощи клавиатуры вводим имя функции и в скобках аргумент: f(x). После нажатия клавиши Enter или при нажатии левой кнопки мыши вне поля графика на экране появляется представленный справа график.



Мастер построения графиков построил график функции *y=f(x)*, при этом подставил значения всех параметров, равные значениям по умолчанию. Диапазон изменения аргумента принял равным [–10,10].Для того чтобы правильно установить диапазон изменения аргумента, переместим курсор мыши внутрь графика и нажмем левую кнопку мыши. В результате, мы вошли в режим коррекции свойств графика функции. Подводим курсор к полю, в котором определена левая граница диапазона (–10),и поменяем ее на 0. Затем – к полю, в котором определена левая граница диапазона (10), и меняем ее на 2π. Для того чтобы получить константуπ, необходимо в панели инструментов (*Calculator*) выбрать символπ. Диапазон отображения значения функции также можно изменить. Для этого подходим к области определения значений этого диапазона, в нашем примере [–10,10]и изменяем на[–6,5].

Диапазон изменения аргумента можно задать другим способом. Для этого, до построения графика функции, необходимо задать диапазон изменения аргумента командой

$$x := a0\ ,a1..b$$

где a_0 – левая граница области,

a_1 – задает шаг табуляции,

h ($h = a_1 - a_0$),b – правая граница диапазона изменениях.

При этом две точки вводятся клавишей ; (точка с запятой).

Например, команда $x := -2,-1.9..2$ означает изменение аргумента в диапазоне от –2до 2 и график рисуется по 41 точке с шагом между точками 0,1.

Теперь необходимо отформатировать полученный график. Для этого, находясь внутри поля графика, нажимаем на правую кнопку мышки, тем самым вызываем контекстное (зависимое от положения курсора мыши) меню. В появившемся окне выбираем пункт **Format…** В закладкеX–YAxes устанавливаем флажки Grid Lines (линии сетки), а остальные все флажки сбрасываем. В поле Number of Grid (число ячеек) по обеим осям записываем цифру 5. Это означает, что будет нарисована равномерная сетка линий из пяти ячеек по оси абсцисс и оси ординат. Далее нажимаем закладку Traces, в которой можно установить параметры каждой из 16 возможных графиков. В нашей задаче всего лишь один график trace 1. Устанавливаем для него параметры *Color =blk* (черный), определяющий цвет графика, и параметр *Weight*=3 (толщина линии). Каждую линию графиков можно подписать. Для этого необходимо убрать флажок *Hide Legend* (скрыть легенды) и поле *Legend label* (метки легенд), вместо*trace1* внести название первой линии.

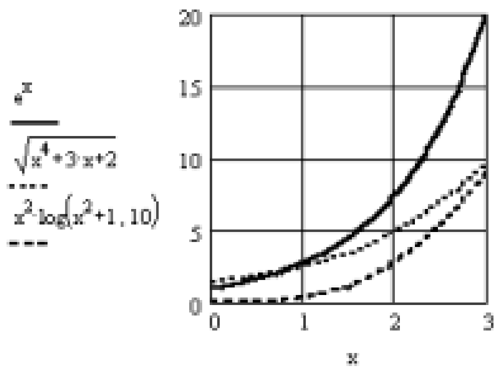
Пример 2. Построить графики трех функций:

$$F1(x)= e^x \ ;$$

$$F\,2(x)= \sqrt{x^4+3x+2};$$

$$F3(x)=x^2\lg(x^2+1)\ ;\ x\in[0;3].$$

Решение: Для построения трех графиков на одной диаграмме вызываем мастер построения графиков функций одной переменной в декартовой системе координат (команда*«Shift+2»*). В поле ввода имени функции необходимо через запятую ввести все три функции. В поле определения диапазонов изменения аргументов, устанавливаем значение *x* [0, 3] и значение функции [0, 20].



Далее форматируем график. Для каждой из трех линий устанавливаем цвет, толщину, тип линии и другие данные.

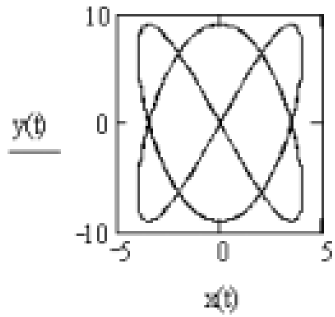
Пример 3. Построить график кривой, заданной в параметрической форме:

$$x = 4\,sin2t$$
$$y = 9sin3t$$

Решение: Определяем две функции *x(t)* и *y(t)*, задающие параметрическую кривую.

$x(t) := 4\sin(2\cdot t)$ $y(t) := 9\sin(3\cdot t)$

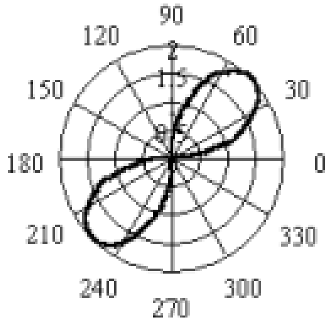
Вызываем мастер построения функций в декартовой системе координат. В поле имени функции вводим *y(t)*, а в поле имени аргумента вводим функцию *x(t)*. Мышкой щелкаем вне поля графика. В результате получаем график функции, заданной в параметрическом виде.



Пример 4. Построить график кривой, заданной в полярной системе координат:

r=2sin2φ.

Вводим формулу заданной функции: r(φ) := 2 sin(2φ).Вызываем мастер построения графиков функций в полярной системе координат. Это можно сделать одним из трех способов. 1) Переходим в пункт меню **Insert/Graph** и вызываем команду **Polar Plot**.



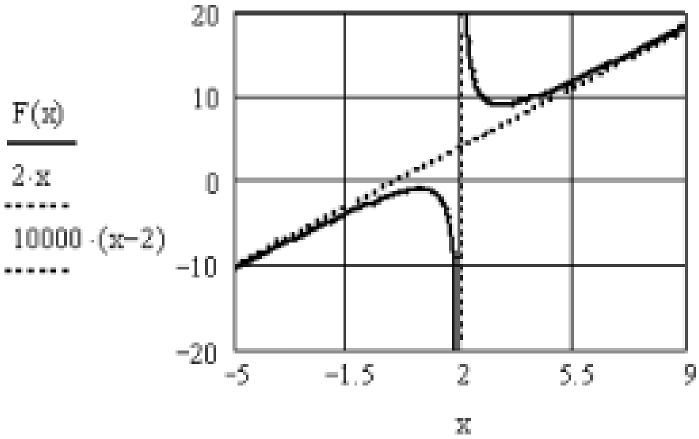
2) Щелкаем по кнопке  из панели инструментов Graph. 3) При помощи «горячих» клавиш*«Ctrl+7»* в поле графика необходимо ввести имя функции *r(φ)* и вызвать контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши. Установить параметры графика и щелкнуть мышкой вне поля графика. Однако на графике мы видим четыре лепестка, а должно быть два. Разработчики пакета Mathcad при построении графика функций в полярной системе координат решили отрицательные значения аргумента r отображать на графике в противоположную сторону полюса. Мы отобразим все отрицательные значения функции в полюс, тем самым уберем из графика все мнимые кривые. Для этого с использованием элементов программирования изменяем функцию следующим образом:

$$r(\phi) := \left|\begin{array}{l} 2\cdot\sin(2\phi) \quad \textbf{if} \quad \sin(2\cdot\phi) > 0 \\ 0 \quad \textbf{otherwise} \end{array}\right.$$

Для ввода этой программы необходимо использовать панель инструментов программирования. При помощи команды **Add Line** необходимо ввести блок из двух строк (вертикальная линия), а затем, используя ту же панель инструментов, в первой строке ввести команду ***if*** , а во второй ***otherwise***. Далее вместо прямоугольных маркеров вводим необходимую информацию.

Пример 5. Построить график функции:

$$F(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3}{x - 2}$$



Решение. Данная функция имеет разрыв второго рода приx=2. Для построения графика функции, имеющей вертикальную асимптоту, необходимо ограничить интервал изменения функции в наиболее удобном диапазоне. Для представленного графика наиболее подходящим интервалом является x [−5;9],$F(x)$ [−20;20]. Для отображения вертикальной асимптоты построим прямую линию y=10000(x–2),проходящую через точку (2, 0) и имеющую очень большой угол наклона. Прямая $y=2x$ является наклонной асимптотой для данного графика.

Пример 6. Затабулировать функцию:

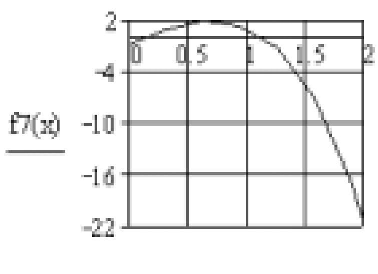
$$f\ \ x\ \ = x^2 \cdot \cos\ \ 2 \cdot x\ \ ; x \in\ \ 0; \pi \quad \text{с шагом } h = 0.1\pi.$$

Решение: Определим массив абсцисс точек табуляции xi и массив Fi значений функции в точка x_i. Для этого определяем диапазон изменения индекса i узлов сетки:i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Это выполняется при помощи трех команд:

$$i = 0 \ldots 10 \quad x_i = i \cdot \frac{\pi}{10} \quad F_i = f(x_i)$$

x =	F =
0	0
0.314	0.08
0.628	0.122
0.942	-0.274
1.257	-1.278
1.571	-2.467
1.885	-2.874
2.199	-1.494

Первая команда задает диапазон изменения индекса i. Символ изменения диапазона «**..**» вводится нажатием символа «**;**» (точка с запятой). Такая переменная i называется ранжированным вектором. При использовании ранжированного вектора происходит циклическое выполнение команд для указанного диапазона значений и направления вектора. Вторая команда вычисляет вектор абсцисс узлов табуляции. Для ввода xi необходимо ввести следующую последовательность символов: *x[iП*. Для ввода числа π можно нажать комбинацию двух клавиш *«Ctrl+p»*.



Чтобы вывести вектор x, необходимо ввести с клавиатуры:**x=**. Аналогично, для вывода значений функции подаем команду:**F=**.

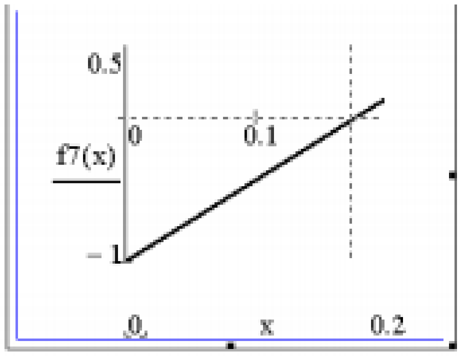
Пример 7. Графически найти первый положительный корень уравнения: $6x - 4x^3 - 1 = 0$.

При помощи оператора присваивания определим функцию:

$$f(x) = 6 \cdot x - 4 \cdot x^3 - 1$$

И построим ее график на отрезке [0, 2].

Из графика видно, что первый положительный корень находится на отрезке [0; 0,2]. Уменьшаем диапазон изменения координат по оси x до отрезка [0; 0,2] и оси y от –1до 0,5.



Находясь внутри поля графика, вызываем контекстное меню, нажав на правую кнопку мыши. В возникшем контекстном меню выбираем пункт **Trace..** В возникшем диалоговом окне убираем флажок **Track Data Points** и, нажав левую кнопку мыши, не отпуская ее, перемещаемся по графику функции.

В диалоговом окне **X–Y Trace** отображаются текущие координаты точки и, кроме того, на экране отображается две перекрещивающиеся пунктирные линии. Перемещаемся по графику до тех пор, пока число в поле**Y–Value** не примет нулевое или близкое к нему значение. Значение координаты x и есть графическое решение уравнения*f(x)*=0. Для проверки вычислим значение функции*f(x)* при*x*=0,173. Для этого в любом свободном месте (ниже определения функции*f(x))*, вводим*f*(0,173)=. В результате получаем: f(0,173)=0,017. Для более точного решения необходимы численные методы решения нелинейных уравнений, которые приводятся ниже.

Пример 8. Построить график функции двух переменных

z=9–x2–y2.

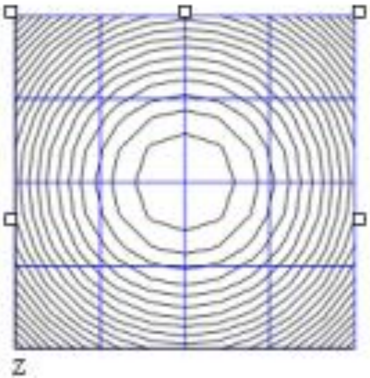
Для того чтобы построить график функции двух переменных, необходимо предварительно ее затабулировать, т.е. получить матрицу со значениями функции в узлах некоторой сетки. Вводим следующие переменные: *N* – число узлов сетки по оси Ox;*M* – число узлов сетки по оси *Oy*;*[a; b]* – отрезок по оси *Ox*;*[c;d]* – отрезок по оси *Oy; hx, hy* – шаг сетки по оси *Ox* и*Oy*.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с необходимыми командами для построения графиков функции двух переменных *z=f(x,y)*, а также график поверхности (сверху) и график изолиний (снизу).

$$f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 \quad N = 10 \;\; M = 10 \;\; a = -1 \;\; b = 1 \;\; c = -1$$

$$d = 1 \quad hx = \frac{b-a}{N} \quad hy = \frac{d-c}{M} \quad i = 0..N \quad j = 0..M$$

$$x_i = a + hx \cdot i \quad y_i = c + hy \cdot j \quad z_{i,j} = f(x_i, y_j)$$



Указание. Для ввода диапазона изменения параметра i от 0 доN необходимо ввести ранжированный вектор, используя следующую последовательность нажатия клавиш: 0;N. Для перехода на нижний регистр необходимо ввести символ [. Для ввода команды $z_{i,j} := f(x_i, y_j)$, вводим следующую последовательность символов: *z[i,jП: f(x[iП, y[jП)*.

Чтобы построить график поверхности, необходимо на панели графиков нажать на кнопку . В возникшем поле графика в помеченной позиции (внизу слева) необходимо ввести имя таблицы *z* со значениями функции в узлах сетки. После выхода из поля графика возникает изображение поверхности.

Находясь в поле графика, можно вызвать контекстное меню, нажав на правую кнопку мыши. В возникшем меню можно войти в диалоговое окно **Формат** и произвести форматирование графика поверхности. Здесь можно выбрать один из шести типов графика: поверхность, контур, точки данных, область векторов, диаграмма, путь. При нажатии на кнопку **Применить** график перерисовывается. На приведенном справа рисунке представлены графики изолиний исследуемой поверхности.

2.2 Решение алгебраических уравнений

В Mathcad корни уравнений ищутся численными методами с точностью, определяемой константой *TOL*. По умолчанию*TOL=0.001*. Для изменения значения этой константы нужно ее переопределить оператором присваивания. Например:

$$TOL{:}=0.000001.$$

Пример 1. Решить кубическое уравнение:

$$x3 + 5x2 - 16x - 80 = 0.$$

Рассмотрим несколько методов решения этого уравнения.

Первый метод**.**

Добавляем панель инструментов **Simbolic.** Для этого заходим в меню View/Toolbars и помечаем строку Simbolic. Затем необходимо нажать левую кнопку мыши на кнопку **solve** из панели Simbolic. Введите в помеченной позиции слева от **solve** левую часть уравнения, а справа – имя переменной, относительно которой нужно получить решение. При этом надо следить, чтобы имя текущей переменной в документе ранее не использовалось для переменных другого типа, например массивов. После выхода из поля определения уравнения, справа от стрелки появляется ответ.

$$t^3 + 5\cdot t^2 - 16\cdot t - 80 \quad solve, t \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, данное уравнение имеет три действительных корня: $x_1= -5$; $x_2 = -4$; $x_3 = 4$.

Второй метод. Применяется для уравнений, левая часть которых является полиномом произвольной степени.

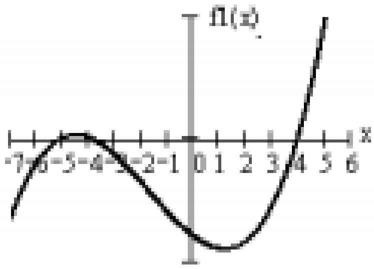
$$P_n\ x\ = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$$

Решение ищется при помощи функции *polyroots(V)*, где*V* – вектор размерности *n*+1, задающий коэффициенты полинома в порядке возрастания степеней:*V(a0, a1, ..., an)*. В нашем примере левая часть – полином третьей степени. Для решения этого уравнения вторым методом вводим команду:

$$polyroots\left(\begin{pmatrix} -80 \\ -16 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для ввода аргумента функции polyroots необходимо вставить матрицу из одного столбца и четырех строк. Для этого заходим в меню **Insert** (Вставка) и выбираем пункт **Matrix** (Матрица). Это же можно сделать, нажав комбинацию «*Ctrl+m*». В появившемся диалоговом окне необходимо ввести в поле Rows (Строки) значение 4, а в поле Columns (Столбцы) – 1. Далее заполняем все четыре строки вектора V и вводим символ пробела, закрываем скобку и вводим символ =. Справа от знака равно появился ответ.

Третий метод. Решение уравнения при помощи функции **root**(*F(x)*,*x[*,*a*,*b]*). Применяется для приближенного вычисления одного корня уравнения *F(x)=0*, находящегося на отрезке*[a; b]*. Последние два аргумента являются необязательными. При отсутствии отрезка*[a; b]* среди параметров, перед вызовом функции, необходимо задать нулевое приближение для корня. Если отрезок*[a; b]* выбран неправильно, то выдается сообщение об ошибке и команда выделяется красным цветом.



Решение: Определяем левую часть уравнения:

$f1\ x\ = x^3 + 5 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 80$

Для определения приблизительных значений искомых корней можно построить график функции y=f1(x). Из графика функции y=f1(x) видно, что данное уравнение имеет три корня. Ищем корень на отрезке от 0 до 5.

root(f1(x),x,0,5)= 4

Ищем корень на отрезке от –10до–4,5.

root(f1(x),x,−10,−4.5)= −5

Ищем корень, задавая начальное приближение x0=–3

x := −3 *root*(f1(x),x)= −4

Четвертый метод. Решение уравнения при помощи блока вычислений **Given/find**(*x*,*y*,*z*,..). Данным методом решаются не только уравнения, но и системы уравнений с несколькими неизвестными переменными: *x*, *y*, *z*, … Фунция find (найти) применяется в паре с командой Given (дано). Структура блока вычисления решения данным методом следующая:

x:=x0 y:=y0 z:=z0

Given уравнение или система уравнений **Find**(*x*, *y*, *z*,…)

Таким образом, уравнение или система уравнений, заключается в блок, начало которого задается командой **Given**, а окончание функцией**Find**. Перед этим блоком присваивается начальное приближение для каждой переменной. Для нашего примера это выглядит так:

$x := 5$ **Given** $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$ **find**(x)= 4.

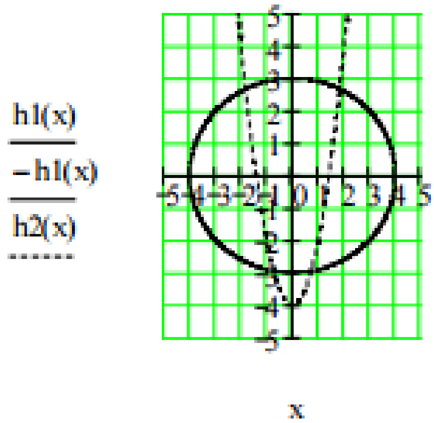
Знак **=** в уравнении набирается как знак логической операции

при помощи горячих клавиш «Ctrl+=» или используя панель ин-

струментов Boolean. В формуле такой знак отображается полужирным шрифтом.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$
$$y = 2x^2 - 4$$



Решение. Для определения количества корней и приближенных значений корней уравнений построим графики данных функций.

Для этого первую функцию представим в явном виде. В явном виде эту функцию можно представить как две функции:

$$h1(x) = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$ – верхняя часть эллипса

–h1(x) ─ нижняя часть эллипса.

Графиком третьей функции является парабола:

$$h2(x) = 2 \cdot x^2 - 4$$

Из графика видно, что данная система имеет четыре решения, находящиеся в разных четвертях декартовой системы координат. Приближенные значения решений: (2; 3), (–2;3),(–1;–3),(1;–3).

Начало программы.

Введем две функции: $g2(x, y) := \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1$,

$h2(x, y) := y - 2 \cdot x^2 + 4$.

Теперь получим все четыре решения. Результаты будем сохранять в векторах *r1*, *r2*, *r3* и *r4*.

1) $x := 2 \quad y := 3$

$Given \quad g2(x, y) = 0 \quad h2(x, y) = 0 \quad r1 := Find(x, y)$

Ответ: $r1^T = (1.826 \quad 2.669)$.

Проверка: Вычислим значение функций на решении:

$g2(r1_0, r1_1) = -2.333 \times 10^{-8} \quad h2(r1_0, r1_1) = 9.295 \times 10^{-9}$.

Обе функции принимают значения близкие к нулю, что подтверждает правильность полученного решения.

2) $x := -2 \quad y := 3$

$Given \quad g2(x, y) = 0 \quad h2(x, y) = 0 \quad r2 := Find(x, y)$

Ответ: $r2^T = (-1.826 \quad 2.669)$.

$g2(r2_0, r2_1) = -2.333 \times 10^{-8} \quad h2(r2_0, r2_1) = 9.295 \times 10^{-9}$.

3) $x := -2 \quad y := -3$

$Given \quad g2(x, y) = 0 \quad h2(x, y) = 0 \quad r3 := Find(x, y)$

Ответ: $r3^T = (-.724 \quad -2.95)$.

$g2(r3_0, r3_1) = -1.691 \times 10^{-7} \quad h2(r3_0, r3_1) = 5.412 \times 10^{-6}$.

4) $x := 2 \quad y := -3$

$Given \quad g2(x, y) = 0 \quad h2(x, y) = 0 \quad r4 := Find(x, y)$

Ответ: $r4^T = (.724 \quad -2.95)$.

$g2(r4_0, r4_1) = -1.691 \times 10^{-7} \quad h2(r4_0, r4_1) = 5.412 \times 10^{-6}$.

Конец программы.

Пример 3. Решить систему трех нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 100, \\ z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}, \\ y = 4x^2. \end{cases}$$

В данной задаче необходимо найти все точки пересечения трех поверхностей второго порядка. Первая поверхность является сферой радиуса 10 с центром в начале координат. Вторая поверхность – эллиптический параболоид с ветвями, направленными вверх. Эти поверхности пересекаются, и линией пересечения является замкнутая линия, проекция которой на плоскость Oxy – эллипс. Третье уравнение системы описывает поверхность являющеюся параболическим цилиндром с осью Oz. Очевидно, что эта поверхность имеет две общие точки с линией пересечения первых двух поверхностей. В качестве нулевого приближения возьмем следующие две точки: 1) $x_0 = 4;\ y_0 = 3;\ z_0 = 100 - x_0^2 - y_0^2$, 2) $x_0 = -4 \quad y_0 = 3 \quad z_0 = 100 - x_0^2 - y_0^2$.

Представим теперь программу решения поставленной задачи.

Начало программы.

Задаем точность вычисления и уравнения поверхностей.

$TOL := 0.000001 \quad f1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 100$

$f2(x,y,z) := z - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \quad f3(x,y,z) := y - 4 \cdot x^2$

Задаем начальное приближение для первой точки.

$x := 4 \quad y := 3 \quad z := 100 - x^2 - y^2$

Решаем систему трех уравнений и выводим результат.

$Given \quad f1(x,y,z) = 0 \quad f2(x,y,z) = 0 \quad f3(x,y,z) = 0$

$r := Find(x,y,z) \quad r^T = (1.373 \quad 7.536 \quad 6.428)$

Проверяем точность полученного решения.

$f1(r_0,r_1,r_2) = 7 \cdot 10^{-4} \quad f2(r_0,r_1,r_2) = 7 \cdot 10^{-5} \quad f1(r_0,r_1,r_2) = 4 \cdot 10^{-5}$

Задаем начальное приближение для второй точки.

$x := -4 \quad y := 3 \quad z := 100 - x^2 - y^2$

Решаем систему трех уравнений и выводим результат.

$Given \quad f1(x,y,z) = 0 \quad f2(x,y,z) = 0 \quad f3(x,y,z) = 0$

$r := Find(x,y,z) \quad r^T = (-1.373 \quad 7.536 \quad 6.428)$

Проверяем точность полученного решения.

$f1(r_0,r_1,r_2) = 7 \cdot 10^{-4} \quad f2(r_0,r_1,r_2) = 7 \cdot 10^{-5} \quad f1(r_0,r_1,r_2) = 4 \cdot 10^{-5}$

Конец программы.

2.3 Задание для самостоятельной работы

1. Построить графики предложенных многочленов $y = f_n(x)$ и, используя все четыре метода, найти все корни уравнения $f_n(x) = 0$.

№	Уравнение для многочленов $y = f_n(x)$
1.	$12x^5 + 108x^4 + 315x^3 + 360x^2 + 303x + 252$
2.	$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$
3.	$x^5 - 87x^3 + 82x^2 + 1032x - 1728$
4.	$x^5 - 4x^4 - 36x^3 + 226x^2 - 397x + 210$
5.	$x^5 - 2x^4 - 45x^3 + 230x^2 - 376x + 192$
6.	$7x^5 - 99x^4 + 511x^3 - 1149x^2 + 994x - 120$
7.	$2x^5 - 9x^4 - 34x^3 + 231x^2 - 346x + 120$
8.	$3x^5 - 50x^4 + 299x^3 - 760x^2 + 748x - 240$
9.	$4x^5 - 79x^4 + 533x^3 - 1481x^2 + 1563x - 540$
10.	$2x^5 - 47x^4 + 423x^3 - 1822x^2 + 3736x - 2880$
11.	$7x^5 - 25x^4 - 37x^3 + 217x^2 - 234x + 72$
12.	$2x^5 - 11x^4 - 41x^3 + 404x^2 - 948x + 720$
13.	$2x^5 - 47x^4 + 423x^3 - 1822x^2 + 3736x - 2880$
14.	$6x^5 - 65x^4 + 195x^3 + 5x^2 - 561x + 180$
15.	$6x^5 + 15x^4 - 372x^3 + 771x^2 - 120x - 300$
16.	$3x^5 + 7x^4 - 115x^3 - 63x^2 + 412x + 140$
17.	$4x^5 - 61x^3 - 28x^2 + 57x + 28$
18.	$16x^5 + 76x^4 - 588x^3 - 1272x^2 + 1112x + 2240$
19.	$4x^5 + 39x^4 - 44x^3 - 687x^2 - 320x + 1008$
20.	$6x^5 - 5x^4 - 73x^3 + 40x^2 + 200x$
21.	$14x^5 - 58x^4 - 284x^3 + 928x^2 + 960x$
22.	$8x^5 + 36x^4 - 158x^3 - 81x^2 + 315x$
23.	$24x^5 + 172x^4 - 186x^3 - 1507x^2 + 297x + 2520$
24.	$12x^5 + 40x^4 - 547x^3 - 778x^2 + 136x + 192$
25.	$81x^5 + 675x^4 - 846x^3 - 3144x^2 + 1248x + 3456$
26.	$64x^5 + 64x^4 - 564x^3 - 4x^2 + 35x$
27.	$2x^5 + 8x^2 + x^4 + 4x - 6x^3 - 24$
28.	$x^5 + 5x^4 - 16x - 80$
29.	$3x^5 + 10x^4 - 81x^2 - 270x$
30.	$9x^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72$

2. Графически исследовать решение нелинейных уравнений и для каждого корня получить решение.

Таблица 2.6.

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$\ln^2(x-1)=3\cos 2x+1$	16	$\sqrt{25-x^2}=arctg2x$
2	$\frac{3\pi}{2}\cos x=e^{0,1x^2}\cdot arcctg2x$	17	$\sin x\cdot\sqrt{81-x^2}=5xarctgx$
3	$10e^{-x^2}=\sqrt{2\pi x}+\sin x$	18	$arctg2x-0,2(x-1)^4+\sin x=0$
4	$\sqrt{\ln^2(x-1)e^{\sin 3x}}=10e^{-0,1x^2}$	19	$\sin 3x\cdot\sqrt{64-x^2}=5xe^{0,1x}$
5	$\sqrt{36-x^2}\lg x=\sin 4x$	20	$arctg2x-\frac{(x-1)^4}{5}+\sin^2 5x=0$
6	$\frac{10}{1+x^2}=2\sin 2x+x$	21	$10e^{-0,1x^2}=\sqrt{2\pi+x}+\sin 2x$
7	$\sin 4x\cdot\sqrt{81-25x^2}=5xarctgx$	22	$\sin^2 3x\cdot\sqrt{16-x^2}=5xe^{0,2x}$
8	$\frac{10x}{1+x^2}=2\cos 2x+x$	23	$\frac{x^2-4}{x^2+1}=\sqrt{xe^{x\sin x}}$
9	$\arcsin x-\sin 5x\cdot\sqrt[4]{1-x^4}=0$	24	$4xtg(0,5\sqrt{9-x^2})=10\sin 3x$
10	$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+8}=\sqrt[3]{x^3+4e^{\cos 3x}}$	25	$\frac{x-1}{x^2-2x+2}=\sqrt[4]{x^4+4e^{\sin 2x}}$
11	$\frac{10x-2}{3+x^2}=2\cos 2x+\sqrt[4]{x}$	26	$\frac{x^2-9}{x^2+4}=\sqrt{x^2+1e^{x\cos x}}$
12	$\sqrt{64-x^2}\log_2 x=\sin 3x$	27	$\frac{x^2-4}{x^2+1}=\sqrt{xe^{x\sin x}}$
13	$10e^{-0,3x^2}=\sqrt{2\pi x+x^2}+3\sin x$	28	$4xtg(0,5\sqrt{9-x^2})=10\sin 3x$
14	$5\cdot 3^{-x^2}+1=\sqrt{3x}+\sin 2x$	29	$arctg2x-(x-0,1)^4+\sin^2 x=0$
15	$\frac{5\pi}{2}\cos 2x=3^{0,1x^2}\cdot arcctg2x$	30	$\sin^2 x\cdot\sqrt{81-x^2}=5e^{-x^2}$

Лабораторная работа № 3
Метод Свенна

3.1 Метод Свенна

При реализации почти всех численных алгоритмов одномерной оптимизации на начальном этапе необходимо найти относительно широкий интервал, содержащий точку оптимума. Обычно поиск граничных точек такого интервала проводится с помощью эвристических методов поиска, хотя в ряде случаев можно также использовать методы экстраполяции. Для эвристического выбора начального интервала неопределенности можно применить алгоритм Свенна:

1. Задать произвольно следующие параметры: x_0 – некоторая точка, $\Delta>0$– величина шага. Положить k = 0 .

2. Вычислить значение функции в трех точках: $x_0-\Delta$, x_0 , $x_0+\Delta$

3. Проверить условие окончания:

а) если $f(x_0-\Delta)\geq f(x_0)\leq f(x_0+\Delta)$, то начальный интервал неопределенности найден: $a_0;\ b_0\ =\ x_0-\Delta\ ;x_0+\Delta$

б) если , $f(x_0-\Delta)\leq f(x_0)\leq f(x_0+\Delta)$, то функция не является унимодальной, а требуемый интервал неопределенности не может быть найден. Вычисления при этом прекращаются. Рекомендуется задать другую начальную точку;

в) если условие окончания не выполнено, то перейти к шагу 4.

4. Определить знак Δ:

а)если $f(x_0-\Delta)\geq f(x_0)\geq f(x_0+\Delta)$, то $\Delta=+\Delta$, $a_0=x_0$, $x_1=x_0+\Delta\,, k=1$;

б) если $f(x_0-\Delta)\leq f(x_0)\leq f(x_0+\Delta)$, то $\Delta=-\Delta$, $b_0=x_0$, $x_1=x_0-\Delta\,,\ k=1$;

5. Найти следующую точку:

$$x_{k+1}=x_k+2^k\cdot\Delta\,, k=0{,}1{,}2$$

6. Проверить условие убывания функции:

а)если $f(x_{k+1})< f(x_k)$ и $\Delta=+\Delta$, то $a_0=x_k$;

если $f\ \ x_{k+1}\ \ >f\ \ x_k$ и $\Delta=-\Delta$, то $b_0=x_k$. В обоих случаях положить k=k+1 и перейти к шагу 5;

б) если $f\ \ x_{k+1}\ \ >f\ \ x_k$, процедура поиска завершается. При $\Delta=+\Delta$ положить $b_0=x_{k+1}$, а при $\Delta=-\Delta$ положить $a_0=x_{k+1}$. В результате $a_0\ ;b_0$ - искомый начальный интервал неопределенности.

Пример. Установить начальные границы интервала неопределенности (используя эвристический метод Свенна) для функции $f(x)=(100-x)^2$ при заданной начальной точке $x_{0=}30$ и величине шага $|\Delta|=5$.

Последовательность действий.

Определение знака шага Δ:

$$f(x_0)=f\ \ 30\ \ =4900;$$
$$f(x_0+|\Delta|)=f\ \ 35\ \ =4225;$$
$$f(x_0+|\Delta|)=f(45)=5625.$$

Так как $f(x_0 - \Delta) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta)$, то величина Δ должна быть положительной, а координата точки минимума x* – должна быть больше 30.

2. Итерационная процедура :

Шаг 1. $x_1 = x_0 + \Delta = 35$, $f(x_1) = 4225 < f(x_0) = 4900$. Следовательно, $x^* > 30$.

Шаг 2. $x_2 = x_0 + 2\Delta = 45$, $f(x_2) = 3025 < f(x_1) = 4225$. Следовательно, $x^* > 35$.

Шаг 3. $x_3 = x_0 + 2^2\Delta = 65$, $f(x_3) = 1225 < f(x_2) = 3025$. Следовательно, $x^* > 45$.

Шаг 4. $x_4 = x_0 + 2^3\Delta = 105$, $f(x_4) = 105 < f(x_3) = 1225$. Следовательно, $x^* > 65$.

Шаг 5. $5 = x_0 + 2^4\Delta = 185$, $f(x_5) = 7225 < f(x_4) = 105$. Следовательно, $x^* < 185$.

Границы начального интервала неопределенности функции: $f(x)\ (a; b) = (65; 185)$. При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

• Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопрово дительного текста.

• Размещение переменных в сопроводительном тексте.

• Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.

• Определение однострочной и многострочной функций и их вызов.

• Загрузка файла с формулами в текст программы.

• Векторизация.

• Доступ к элементам массива.

• Дискретный аргумент.

• Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых (см. пример 1.1).

Пример Исследовать функцию:

$$f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$$

определенную на всей оси. Найти стационарные точки и классифицировать их. Ход решения. Первая производная исследуемой функции $\frac{df(x)}{dx} = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3)$

Первая производная обращается в ноль в точках : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$,следовательно, эти точки можно классифицировать как стационарные.

Вторая производная функции равна:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x$$

Значения функции и второй производной в стационарных точках приведены в табл. 1.1.

Значения функции и второй производной в стационарных точках

Стационарные точки x	Функция $f(x)$	Вторая производная $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
0	36	0
1	27,5	60
2	44	-120
3	5,5	540

Из табл. 3.1 следует сделать, что $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ – точки локальных минимумов, а $x_2 = 2$ – точка локального максимума.

Чтобы идентифицировать точку $x_0 = 0$, вычислим третью производную:

$$\frac{d^3 f\ x}{dx^3} = 600x^3 - 2160x^2 + 1980\,x - 360$$

Так как данная производная отлична от ноля и имеет нечетный порядок, то точка x_0= 0 является не точкой оптимума, а точкой перегиба.

При выполнении примера студент должен знать следующие разделы MathCAD 15:

• Ввод переменных, переменных с нижним индексом, сопроводительного текста.

• Размещение переменных в сопроводительном тексте.

• Просмотр результатов расчета и редактирование числа выводимых десятичных знаков.

• Определение однострочной функции и ее вызов.

• Символьное решение уравнения.

• Операции с матрицами, доступ к элементам матрицы.

• Решение уравнения с помощью функции root(f, x).

• Векторизация.

• Комплексные переменные.

• Символьное и численное дифференцирование выражений.

• Символьное разложение на множители.

• Дискретный аргумент.

• Построение и редактирование двумерных графиков. Нанесение на один график нескольких кривых.

Для получения графика в виде, приведенном на листинге программы, необходимо настроить вкладки диалогового окна (вызывается двойным щелчком мышки на графике) **Formatting Currently Selected X–Y Plot**, как показано на рис. 3.1–3.5.

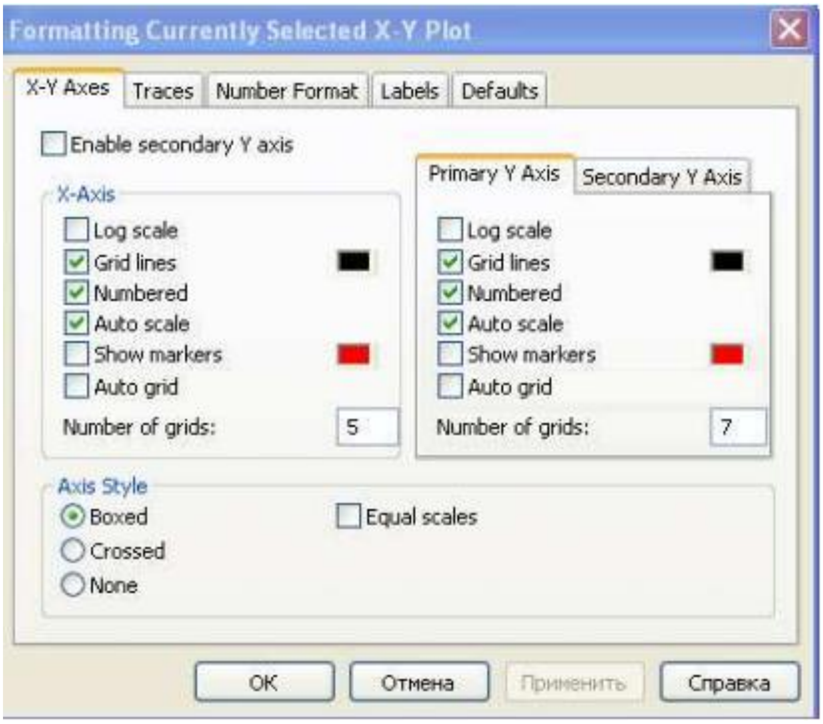


Рисунок 3.1 – Настройка вкладки X-Y Axes (пример 1.1)

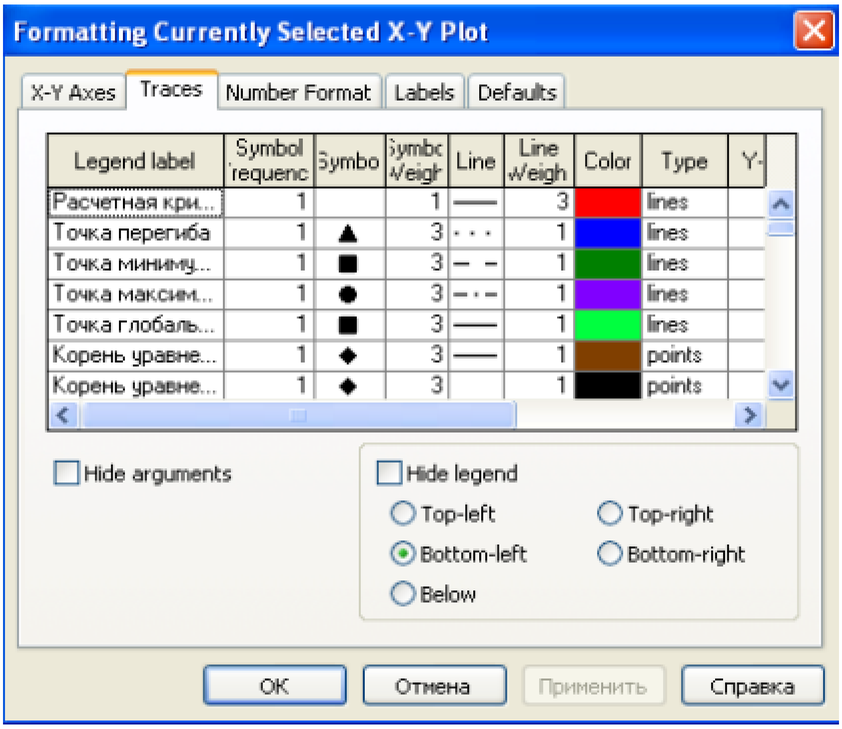


Рисунок 3.2 – Настройка вкладки Traces (пример 1.1)

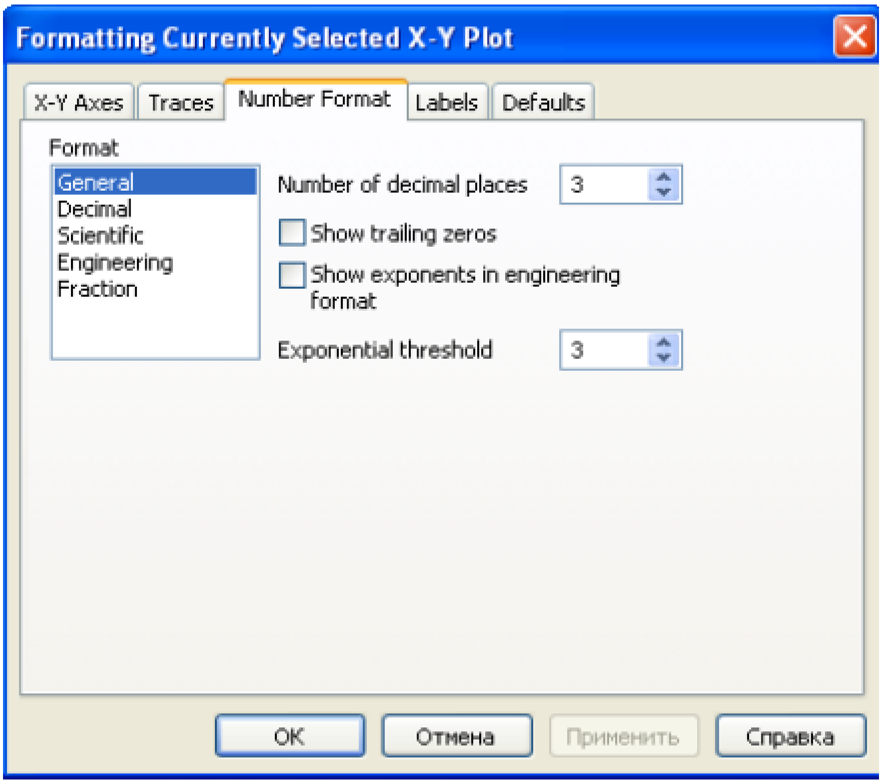


Рисунок 3.3 – Настройка вкладки Number Format (пример 1.1)

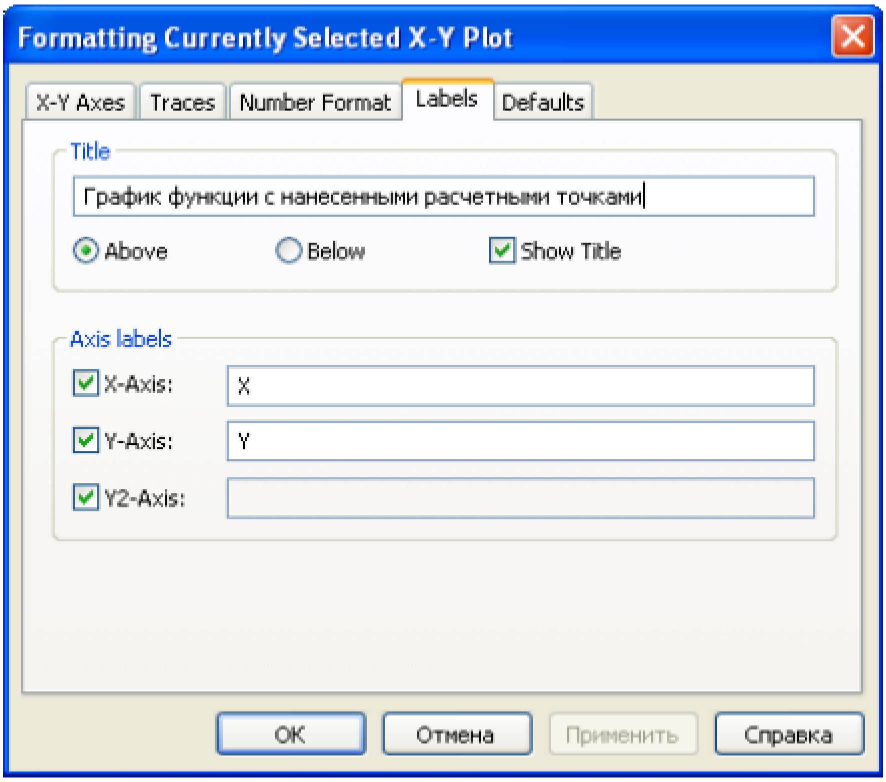


Рисунок 3.4 – Настройка вкладки Labels (пример 1.1)

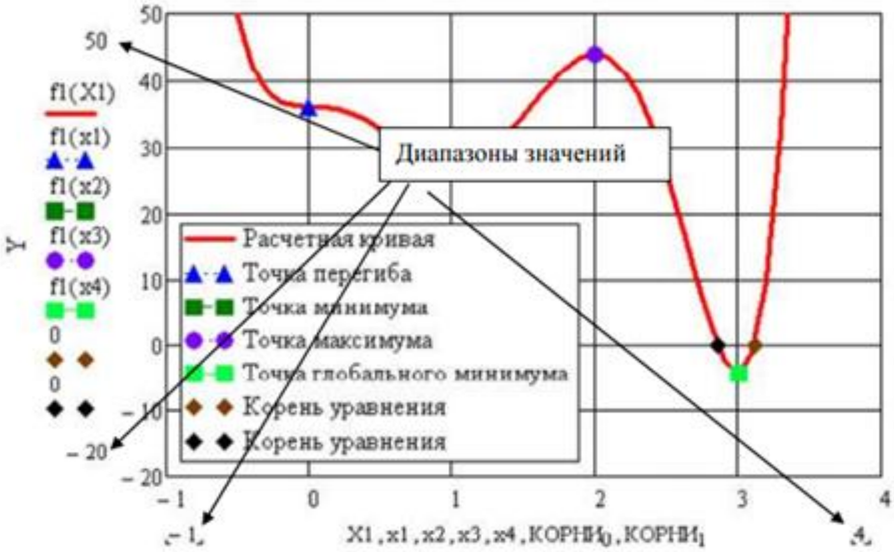
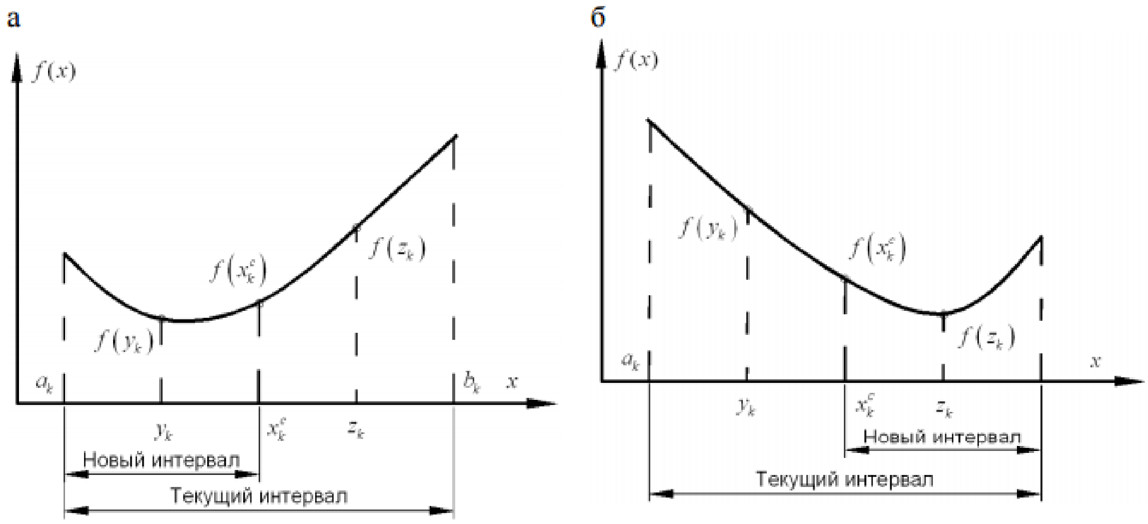


Рисунок 3.5 – Редактирование диапазонов выводимых значений на графике (пример 1.1)

3.2 Метод деления интервала пополам

Метод деления интервала пополам относится к последовательным стратегиям и методам исключения интервала, что позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала неопределенности.

Задается начальный интервал неопределенности. Алгоритм уменьшения интервала (рис. 3.6) основан на анализе величин функции в трех точках, равномерно распределенных на текущем интервале (делящих его на четыре части). Условия окончания процесса поиска: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.



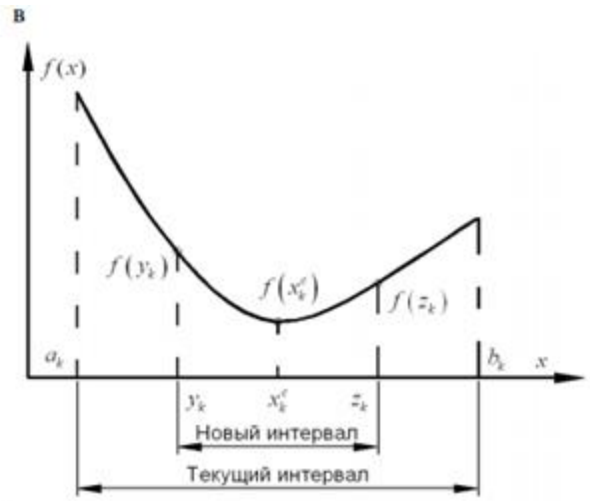


Рис. 3.6 Варианты реализации метода деления интервала пополам в зависимости от начальных условий:
а – $f(y_k)<f(x_k^c)$; б – $f(y_k)\geq f(x_k^c)$ и $f(z_k)<f(x_k^c)$;
в – $f(y_k)\geq f(x_k^c)$ и $f(z_k)\geq f(x_k^c)$

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = a_0 ; b_0$ и требуемую точность $\Delta > 0$.

Шаг 2. Положить k=0.

Шаг 3. Вычислить: среднюю точку $x_k^c = (a_k + b_k)/2$, интервал $a_k ; b_k$ - $L_k = b_k - a_k$, значении функции в средней точке $f(x_k^c)$.

Шаг 4. Вычислить точки : $y_k = a_k + \frac{L_k}{4}$, $z_k = b_k - \frac{L_k}{4}$ и значения функций в этих точках : $f(y_k)$, : $f(z_k)$. Точки y_k , x_k^c z_k , делят интервал на a_k , b_k на четыре равные части.

Шаг 5. Сравнить значения $f(y_k)$ и $f(x_k^c)$:

а) если $f(y_k) < f(x_k^c)$, исключить интервал $x_k^c;\ b_k$, положив $b_{k+1} = x_k^c$, $a_{k-1} = a_k$. Средней точкой интервала становиться точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$. Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) > f(x_k^c)$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Сравнить значения $f(z_k)$ и $f(x_k^c)$:

а)если $f(z) < f(x_k^c)$, исключить интервал a_k , x_k^c , положив $a_{k+1} = x_k^c$, $b_{k-1} = b_k$. Средней точкой интервала становиться z_k ,$x_{k+1}^c = z_k$.Перейти к шагу 7.

б) если $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, исключить интервалы $(a_k ; y_k)$, $(z_k; b_k)$, положив $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = z_k$. Средней точкой нового интервала останется x_k^c ,$x_{k+1}^c = x_k^c$.

Шаг 7. Вычислить значение $L_{2(k+1)} = b_{k+1} - a_{k+1}$ и проверить условия окончания расчета:

а) если $L_{2(k+1)} \leq \Delta$, процесс поиска корня уравнения завершается и x*$\in L_{2(k+1)} = b_{k+1} ; a_{k+1}$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку внутри интервала , например середину последнего интервала: $x^* \cong x_k^c$;

б) если $L_{2(k+1)} > l$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Сходимость

Для метода деления интервала пополам характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = 1/2^{N/2}$, где N – количество вычислений функции.

Замечания

1.Средняя точка последовательно получаемых интервалов все- гда совпадает с одной из трех пробных точек, найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется два новых вычисления функции.

2.Если задана величина R(N), то требуемое для достижения желаемой точности количество вычислений функции находится как наименьшее целое, удовлетворяющее условию $N \geq 2lnR(N)/\ln(0{,}5)$.

Недостатки

1. На каждой итерации требуется вычислять две новые точки.
2. Может использоваться для поиска экстремумов только в унимодальных функциях.

Пример Найти минимум функции $f\ x\ = 2x^2 - 12x$ на интервале $0; 10$, с точностью $\Delta = 1$ методом деления интервала пополам.

Последовательность действий

1^0 Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = \ 0; 10$, точность расчета $\Delta = 1$.

2^0. Положить k=0.

3^0. Вычислить среднюю точку $x_0^c = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$, величину интервала $[a_0; b_0]$- $L_0 = b_0 - a_0 = 10 - 0 = 10$, *значение функции в средней точке* $f(x_0^c) = -10$

4^0. Вычислить точки:

$$y_0 = a_0 + \frac{L_0}{4} = 0 + \frac{10}{4} = 2{,}5 \ , \qquad z_0 = b_0 - \frac{L_0}{4} = 10 - \frac{10}{4} = 7{,}5$$

значения функций в этих точках : f (y_0)=-17,5 , f (z_0)=22,5

5^0. Сравнить значения $f(y_0)$ и $f(x_0^c)$. Так как f (y_0)=-17,5 $< f(x_0^c) = -10$, для нового интервала неопределенности $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = x_0^c = 5$, $x_1^c = y_0 = 2{,}5$.

7^0 . Проверить условие окончания расчета . $L_1 = [a_0; b_0] = [0;5]$,
$L_1 = b_1 - a_1 = 5 - 0 = 5 > \Delta = 1$.

Условия окончания расчета не выполнено.

2^1. Положить k=1, перейти к шагу 4.

4^1. Вычислить точки.:

$y_1 = a_1 + \frac{L_1}{4} = 0 + \frac{5}{4} = 1{,}25$, $z_0 = b_1 + \frac{L_1}{4} = 5 - \frac{5}{4} = 3{,}75$ и значения функций в этих точках: $f(y_1) = -11{,}875 \quad f\ z_1\ = -16{,}875$.

5^1. Сравнить значения f(y_1) и $f(\ x_1^c)$. Так как f(y_0)= -17,25< $f\ \ x_1^c\ \ =-10$, перейти к шагу 6.

6^1. Сравнить значения $f\ \ z_1$ и $f\ \ x_1^c$. Так как f(z_1)= -16,875> $f\ \ x_1^c\ \ =-17{,}5$,для нового интервала неопределенности $a_2=y_1=1{,}25\ \ b_2=z_1=3{,}75$, $x_2^c=x_1^c=2{,}5$.

7^1. Проверить условия окончания расчета.
$L_2=\ a_2;b_2\ =\ 1{,}25;3{,}75$, $\mathrm{L}_2\ =\ \mathrm{b}_2-\mathrm{a}_2\ =3{,}75-1{,}25=2{,}25>\Delta=1.$
Условия окончания расчета не выполнено.
2^2. Положить k=2, перейти к шагу 4.
4^2. Вычислить точки; $\mathrm{y}_2=\mathrm{a}_2+\frac{\mathrm{L}_2}{4}=1{,}25+\frac{2{,}5}{4}=1{,}875$,
$\mathrm{z}_2=\mathrm{b}_2-\frac{\mathrm{L}_2}{4}=3{,}75-\frac{2{,}5}{4}=3{,}125$ и значения функций в этих точках: $f(y_2)$= -15,47 , f(z_2)= -17,97.

5^2. Сравнить значения $f\ \ y_2$ и $f\ \ x_2^c$.
Так как f(y_0)= -17,25< $f\ \ x_0^c\ \ =-10$, перейти к шагу 6.
6^2. Сравнить значения $f\ \ z_2$ и $f\ \ x_2^c$.
Так как f(z_2)= -17,97< $f\ \ x_2^c\ \ =-17{,}5$,для нового интервала неопределенности $a_3=x_2^c=1{,}25$, $b_3=b_2=3{,}75$, $x_3^c=z_3=3{,}125$.
7^2. Проверить условия окончания расчета.
$L_3=\ a_3;b_3\ =\ 2{,}5;3{,}75$, $\mathrm{L}_3\ =\ \mathrm{b}_3-\mathrm{a}_3\ =3{,}75-2{,}5=1{,}25>\Delta=1.$
Условия окончания расчета не выполнено.
2^3. Положить k=3, перейти к шагу 4.
4^3. Вычислить точки; $\mathrm{y}_3=\mathrm{a}_3+\frac{\mathrm{L}_3}{4}=2{,}5+\frac{1{,}25}{4}=2{,}81$
$\mathrm{z}_3=\mathrm{b}_3-\frac{\mathrm{L}_3}{4}=3{,}75-\frac{1{,}25}{4}=3{,}43$ и значения функций в этих точках: $f(y_3)$= -17,93 , f(z_3)= -17,62.

5^3. Сравнить значения $f\ \ y_3$ и $f\ \ x_3^c$.
Так как f(y_0)= -17,5< $f\ \ x_0^c\ \ =-10$, перейти к шагу 6.
6^3. Сравнить значения $f\ \ z_3$ и $f\ \ x_3^c$.
Так как f(z_3)= -17,63< $f\ \ x_3^c\ \ =-17{,}97$,для нового интервала неопределенности $a_4=y_3=2\ 81$, $b_4=z_3=3{,}43$, $x_4^c=x_3^c=3{,}125$.
7^2. Проверить условия окончания расчета.
$L_3=\ a_4;b_4\ =\ 2{,}81;3{,}43$, $\mathrm{L}_4\ =\ \mathrm{b}_4-\mathrm{a}_4\ =3{,}43-2{,}81=0{,}62<\Delta=1.$
Условия окончания расчета выполнено. В качестве решения можно взять среднюю точку последнего интервала x*≅ x_4^c=*3,125*. Общее количество вычисленных точек *N=8.*

3.3 Задачи для самостоятельной работы

Индивидуальные задания в соответствии номерами из списка группы

1 Найти начальный интервал неопределенности для поиска минимума функции $f(x)=(ax-b)^2$ методом Свенна.

$$a_{0.5} = 1, \quad b_{0.5} = 1, \quad a_{i+1} = a_i + 1, \quad b_{i+1} = b_i + 0.5,5$$

i – номер варианта

2 Найти минимум функции $f(x) = D\ sin\ (Ax^B + C)$ на интервале [-1;2] с точностью $\Delta x = 0.5,2$. Параметры A, B, C, D приведены в табл. 2.4.

Параметры $\boldsymbol{A, B, C, D}$ функции $\boldsymbol{f(x) = D\ sin\ (Ax^B + C)}$

№ варианта	A	B	C	D
1	1	1	2	1
2	1	2	0.5	2
3	2	3	3	3
4	1	2	1	2
5	2	2	1	1
6	3	1	2	1
7	0.5	1	3	2
8	1	0.5	3	1
9	3	2	3	2
10	1	3	1	3
11	2	0.5	3	1
12	3	1	1	3
13	1	1	3	2
14	3	1	3	1
15	2	2	1	1
16	0.5	2	2	3
17	1	2	0.5	3
18	2	1	3	1
19	3	0.5	1	1
20	0.5	2	2	1
21	2	3	0.5	1
22	1	2	3	3
23	3	0.5	2	1
24	1	1	1	2
25	0.5	1	2	3
26	3	2	3	3
27	2	1	3	1
28	3	2	0.5	2
29	2	2	3	1
30	3	3	2	2

4 Лабораторная работа № 4

4.1 Задачи линейного программирования

Пример 1. Найти решение системы ограничений

$$2x_1 + x_2 \leq 400,$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 900,$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 600,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

При котором достигается максимальное значение линейной функции

$$F(x_1, x_2) = 60x_1 + 40x_2.$$

Решение. Для матричной формы поставленной задачи вводим вектор-столюец неизвестных x= $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$, вектор стоимостей C= $\begin{matrix} 60 \\ 40 \end{matrix}$, матрицу системы ограничений $A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix}$, вектор- столбец b= $\begin{matrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{matrix}$ правых частей системы ограничений. Теперь можно представить целевую функцию в виде скалярного произведения **: F(x)=** $\boldsymbol{C \cdot x}$, а система ограничений запишется в виде A$\cdot x \leq b$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq$0.

Бллок решения **Given…Maximize()** позволяет найти решение поставленной задачи:

ORRIG := 1

C := $\begin{matrix} 60 \\ 40 \end{matrix}$ A := $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ b := $\begin{matrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{matrix}$ x := $\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

F(x) := C$\cdot x$

Given

A$\cdot x \leq b \quad x \geq 0$

x := Maximize (F,x)

$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 140 \\ 120 \end{matrix}$ F(x)=13200 A$\cdot x = \begin{matrix} 400 \\ 900 \\ 500 \end{matrix}$

Вводя добавочные неизвестные

$$x_3 = 400 - 2x_1 - x_2 \geq 0,$$
$$x_4 = 900 - 3x_1 - 4x_2 \geq 0,$$
$$x_5 = 600 - x_1 - 3x_2 \geq 0.$$

можно привести задачу линейного программирования к стандартной форме:

$$\text{F(x)}=60x_1 + 40x_2 \rightarrow max,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 400,$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 900,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_5 = 600,$$
$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Получаем решение:

$$C := \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(x) := C \cdot x$$

Given

$$A \cdot x = b \qquad x \geq 0$$

$$x := \mathrm{Maximize}(F, x) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 120 \\ -1.124 \times 10^{-15} \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 13200$$

В этом случае вектор неизвестных , вектор стоимостей и матрица системы ограничений будут соответственно равны:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция , система ограничений и решение имеют практический прежний вид: F(x)= $C \cdot x \to max$, $A \cdot x = b$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,
$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

4.2 Задачи для самостоятельной работы

Задача №1

$$L(x) = 4x_1 - 3x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №2

$$L(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №3

$$L(x) = x_1 + 2x_2 \to \max \quad (\min)$$

Задача №4

$$L(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 4x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №5

$$L(X) = x_1 + 6x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №6

$$L(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Задача №7**

$$L(X) = x_1 + 6x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 2, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Задача №8**

$$L(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Задача №9**

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 18, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ \qquad x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №10

$$L(X) = 4x_1 - x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №12

$$L(X) = 5x_1 + 5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №13

$$L(X) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №14

$$L(X) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №15

$$L(X) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №16

$$L(X) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 3, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 8x_2 \leq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №17

$$L(X) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 12x_2 \geq 8, \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 6x_2 \geq 2, \\ x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №18

$$L(X) = 14x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 10x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №19

$$L(X) = 2x_1 + x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 18, \\ -5x_1 + x_2 \leq 1, \\ \qquad\quad 3x_2 = 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №20

$$L(X) = 4x_1 - x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ -7x_1 + x_2 \leq 80, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №21

$$L(X) = 3x_1 + 5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 7x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №22

$$L(X) = 8x_1 + 2x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №23

$$L(X) = -2x_1 + x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №24

$$L(X) = x_1 + 3.5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №25

$$L(X) = -x_1 - 2x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + 6x_2 \leq 21, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №26

$$L(X) = 2x_1 + 6x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 11x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 1, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №27

$$L(X) = 4x_1 + 5x_2 \to \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача №28

$$L(X) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 19, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ \quad x_2 = 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Учебное издание

Костоглотов Андрей Александрович
Лазаренко Сергей Валерьевич
Кириллов Игорь Евгеньевия
Лященко Зоя Владимировна

**МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ
И ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.И. Исаева

Подписано в печать 04.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,53.
Тираж экз. Изд. № 90389. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.