

РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)

Е.В. Пиневич, В.А. Липович, И.С. Стасюк

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 5

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2017

УДК 517.9 (07) + 06

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент Т.В. Клодина

Пиневич, Е.В.

Подготовка к тестированию по математике. В 10 ч. Ч. 5: учебно-методическое пособие / Е.В. Пиневич, В.А. Липович, И.С. Стасюк; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 28 с. – Библиогр.: с. 26.

В пособии представлены указания для решения задач по нахождению точек разрыва функции, бесконечно малых и бесконечно больших функций, пределов с различными видами неопределенностей.

Задачи предназначены для подготовки к тестированию, а также могут быть использованы для составления контрольных и расчетно-графических работ, для выполнения студентами домашнего задания.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1-го курса всех специальностей факультета ДСМ.

Одобрено к изданию кафедрой «Высшая математика».

1 Предел функции

Определение 1 Если каждому значению переменной x , принадлежащей некоторой области, соответствует одно определенное значение другой переменной y , то y называется функцией от x . В символической записи $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и т.д.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом. Переменная y называется зависимой переменной или функцией. Зависимость переменных x и y называется функциональной зависимостью.

Определение 2 Постоянная A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 , обозначают так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A; \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0.$$

Рассмотрим односторонние пределы функции.

Предел слева $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$. Здесь x стремится к x_0 , оставаясь меньше x_0 , $x < x_0$.

Предел справа $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$. Здесь x стремится к x_0 , оставаясь больше x_0 , $x > x_0$.

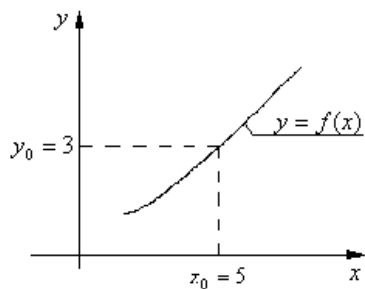
Если односторонние пределы равны $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$, то предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен A . То есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Если односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует предел функции в соответствующей точке.

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$, принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, то пишут:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

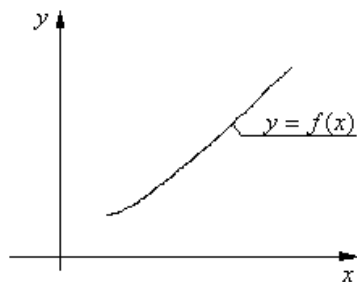
Проиллюстрируем понятие предела функции графически.



Пример 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3.$$

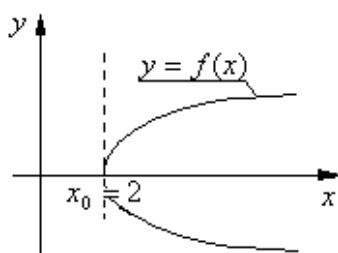
При приближении значения аргумента x к числу 5, значение функции y стремится к 3, а в данном случае даже становится равным 3.



Пример 1.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

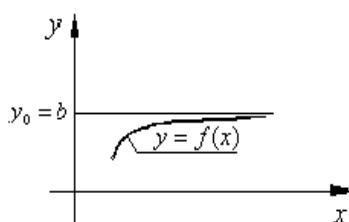
При неограниченном увеличении аргумента x , значение функции y тоже неограниченно возрастает.



Пример 1.3

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0.$$

Здесь, при стремлении значения аргумента x к двум, значение функции y становится бесконечно малым, а в данном случае по абсолютному значению равным нулю (см. пункт 2).



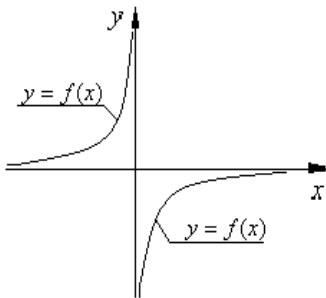
Пример 1.4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

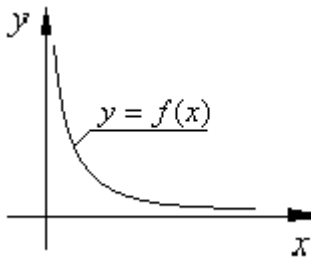
В данном примере при стремлении x к бесконечности значение функции y стремится к конечному числу b .

Пример 1.5

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty.$$



При приближении значения аргумента x к прямой $x = 0$ значение функции y неограниченно возрастает слева и неограниченно убывает справа. Точка $x = 0$ является точкой разрыва функции $y = f(x)$, а прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.



Пример 1.6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

При стремлении значения x к бесконечности ($x \rightarrow +\infty$) значение функции y стремится к нулю, где прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции.

2 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

В любом исследуемом процессе переменная величина α является бесконечно малой, если ее предел равен нулю ($\lim \alpha = 0$).

В примере 1.3 ($\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$) значение функции $y = f(x)$ является бесконечно малой величиной при x , стремящемся к двум.

В примере 1.6 ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$) функция $y = f(x)$ является бесконечно малой величиной при x , стремящемся к бесконечности.

В любом исследуемом процессе переменная величина β является бесконечно большой, если ее предел равен бесконечности ($\lim \beta = \infty$).

В примере 1.2 ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$) функция $y = f(x)$ является бесконечно большой при x , стремящемся к бесконечности.

В примере 1.5 $(\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \infty)$ функция $y = f(x)$ является бесконечно большой при x , стремящемся к нулю слева.

Основные операции с бесконечно малыми и бесконечно большими величинами

Пусть $c = \text{const}$, $c > 0$; α – бесконечно малая величина (б.м.в.), $\lim \alpha = 0$; β – бесконечно большая величина (б.б.в.), $\lim \beta = \infty$, тогда справедливы следующие равенства:

- | | |
|--|--|
| 1 $\lim \frac{\alpha}{c} = 0, \left(\frac{0}{c} = 0\right);$ | 2 $\lim \frac{c}{\alpha} = \infty, \left(\frac{c}{0} = \infty\right);$ |
| 3 $\lim \alpha \cdot \alpha = 0, (0 \cdot 0 = 0);$ | 4 $\lim \alpha \pm \alpha = 0, (0 \pm 0 = 0);$ |
| 5 $\lim \alpha^c = 0, (0^c = 0);$ | 6 $\lim c^\alpha = 1, (c^0 = 1);$ |
| 7 $\lim c \cdot \alpha = 0, (c \cdot 0 = 0);$ | 8 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0, \left(\frac{0}{\infty} = 0\right).$ |
| 9 $\lim \frac{\beta}{c} = \infty, \left(\frac{\infty}{c} = \infty\right);$ | 10 $\lim \frac{c}{\beta} = 0, \left(\frac{c}{\infty} = 0\right);$ |
| 11 $\lim \beta \cdot \beta = \infty, (\infty \cdot \infty = \infty);$ | 12 $\lim \beta + \beta = \infty, (\infty + \infty = \infty);$ |
| 13 $\lim \beta^c = \infty, (\infty^c = \infty);$ | 14 $\lim c^\beta = \begin{cases} \infty, c > 1; \\ 0, c < 1 \end{cases};$ |
| 15 $\lim c \cdot \beta = \infty, (c \cdot \infty = \infty);$ | 16 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty, \left(\frac{\infty}{0} = \infty\right);$ |
| 17 $\lim \beta^\beta = \infty, (\infty^\infty = \infty).$ | |

Эти пределы имеют определенные значения. Однако существует целый ряд неопределенностей. К ним относятся:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad 0^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0.$$

3 Основные свойства пределов

3.1 Предел постоянной величины A есть сама эта величина

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A = A.$$

3.2 Предел алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

3.3 Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

3.4 Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}.$$

4 Примеры решения задач

Пример 4.1 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6}{6x - 5} = \frac{5 \cdot 9 - 6}{6 \cdot 3 - 5} = \frac{45 - 6}{18 - 5} = \frac{39}{13} = 3.$$

В данном примере, подставив функцию $x = 3$, мы получаем конкретное число, равное 3, которое является пределом функции в точке $x = 3$.

Однако на практике часто встречаются пределы с различными видами «неопределенностей». В таком случае необходимо применять некоторые тождественные преобразования.

Пример 4.2 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{4 - 5 \cdot 2 + 6}{4 - 6 \cdot 2 + 8} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(x-4)} = \frac{2-3}{2-4} = \frac{1}{2}.$$

Здесь при $x \rightarrow 2$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Символически это обозначается $\left(\frac{0}{0}\right)$ и называется неопределенностью. Поэтому сначала

необходимо преобразовать числитель и знаменатель. Найдя их корни, нужно разложить выражения на сомножители. Сократив одинаковые сомножители, мы избавимся от неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, и подставив $x = 2$, получим конечное число.

Пример 4.3 Найдти предел функции:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}}{4x} &= \frac{\sqrt{7+0} - \sqrt{7-0}}{4 \cdot 0} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x})(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})}{4x(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{7+x})^2 - (\sqrt{7-x})^2}{4x(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7+x-7-x}{4x(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})} &= \frac{1}{2(\sqrt{7+0} + \sqrt{7-0})} = \frac{1}{4\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

В данном примере при подстановке в дробь $x = 0$ получается неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия ее необходимо умножить числитель и знаменатель на сопряженное выражение, то есть на сумму $(\sqrt{7+x} + \sqrt{7-x})$.

Пример 4.4 Найдти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x^2 - 10}{5x^3 + 3x^2 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{6x^2}{x^3} - \frac{10}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{6}{x} - \frac{10}{x^3}}{5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{7}{5}.$$

Здесь ни числитель, ни знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают. Таким образом, имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Произведем следующие преобразования: разделим числитель и знаменатель почленно на x^3 (наивысшая степень x в данной дроби).

Величины $\frac{6}{x}$; $\frac{-10}{x^3}$; $\frac{3}{x}$; $-\frac{2}{x^3}$ при $x \rightarrow \infty$ являются величинами бесконечно малыми, то есть их пределы равны нулю. Следовательно, порядок функции равен $\frac{7}{5}$.

Пример 4.5 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x - 3}{4x^4 - 10} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^4} + \frac{6x}{x^4} - \frac{3}{x^4}}{\frac{4x^4}{x^4} - \frac{10}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4}}{4 - \frac{10}{x^4}} = \frac{0}{4} = 0.$$

При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Таким образом, снова имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим почленно числитель и знаменатель на x^4 (наивысшая степень x в данной дроби). Так как при $x \rightarrow \infty$ величины $\frac{5}{x^2}$; $\frac{6}{x^3}$; $-\frac{3}{x^4}$; $-\frac{10}{x^4}$ стремятся к нулю, предел числителя равен нулю, а предел знаменателя четырем.

Пример 4.6 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 7x}{3 + x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^5}{x^5} - \frac{7x}{x^5}}{\frac{3}{x^5} - \frac{x^2}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{7}{x^4}}{\frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^3}} = \frac{6}{0} = \infty.$$

Обобщая последние три примера можно сделать вывод, что для вычисления подобного рода пределов достаточно найти x наибольшей степени и выписать коэффициенты, стоящие перед ним отдельно из числителя и знаменателя. Отношение этих коэффициентов и будет являться конечным пределом.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, k = n; \\ \frac{0}{b_0}, k < n; \\ \frac{a_0}{0}, k > n. \end{cases}$$

Пример 4.7 Найти предел функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x + 4x^2} - 2x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5x + 4x^2} - 2x)(\sqrt{5x + 4x^2} + 2x)}{\sqrt{5x + 4x^2} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5x + 4x^2})^2 - 4x^2}{\sqrt{5x + 4x^2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 4x^2 - 4x^2}{\sqrt{5x + 4x^2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{5x + 4x^2} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{\frac{5x}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2}} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{\frac{5}{x} + 4} + 2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Здесь имеет место неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{5x+4x^2} + 2x$. Таким образом, мы перейдем к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделив числитель и знаменатель на x , получим конечный числовой предел данной функции.

5 Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Целый ряд примеров сводится к вычислению первого замечательного предела. Для их вычисления удобно использовать эквивалентность бесконечно малых величин, а именно при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x; \quad \arcsin x \sim x;$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x; \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Пример 5.1 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Здесь, используя эквивалентность бесконечно малых величин, заменим функции на их аргументы. Получим предел постоянной величины, который равен этой величине.

Пример 5.2 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 8x}{\operatorname{arctg} 10x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{arctg} 10x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{10x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}.$$

6 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Второй замечательный предел является неопределенностью вида (1^∞) .

Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e.$

Представим функцию, стоящую под знаком предела в общем виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)^{f_3(x)},$$

где $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$ – рациональные функции;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) = \infty.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)^{f_3(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f_1(x) + f_2(x) - f_2(x)}{f_2(x)} \right)^{f_3(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_2(x)} \right)^{\frac{f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)}} \right]^{\frac{(f_1(x) - f_2(x)) f_3(x)}{f_2(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f_1(x) - f_2(x)) f_3(x)}{f_2(x)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, примеры, сводящиеся к вычислению второго замечательного предела можно вычислить по формуле:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)^{f_3(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f_1(x) - f_2(x)) f_3(x)}{f_2(x)}}.$$

Пример 6.1 Найти предел функции:

1-й способ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-8} \right)^{2x+1} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2-3x+8}{3x-8} \cdot (2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{3x-8} \cdot (2x+1)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x-1}{3x-8}} = e^{\frac{12}{3}} = e^4.$$

Здесь в степени экспоненты получается неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для вычисления предела необходимо выписать коэффициенты при наивысших показателях степени x .

2-й способ:

Данный предел можно расписать более подробно, непосредственно приводя к виду: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-8}\right)^{2x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-8+6}{3x-8}\right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{3x-8}\right)^{\frac{3x-8}{6}} \right]^{\frac{6}{3x-8}(2x+1)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x+6}{3x-8}} = e^{\frac{12}{3}} = e^4. \end{aligned}$$

Пример 6.2 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-4}{7x-2}\right)^x = e^{(1^\infty)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-4-7x+2}{7x-2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{7x-2}} = e^{-\frac{2}{7}}.$$

Пример 6.3 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-4}{3x-2}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^\infty = \infty.$$

Данный предел равен ∞ , так как любое число $C > 1$ в степени ∞ равно ∞ $\left(C = \frac{7}{3} > 1\right)$.

Пример 6.4 Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{7x-4}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^\infty = 0.$$

Данный предел равен нулю, так как любое число $C < 1$ в степени ∞ равно нулю $\left(C = \frac{3}{7} < 1\right)$.

Рассматривая последние три примера, сделаем следующее обобщение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right]^{f_3(x)} = \begin{cases} e^C, & \text{если } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1, \text{ где } C = \text{const}; \\ 0, & \text{если } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < 1; \\ \infty, & \text{если } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 1. \end{cases}$$

7 Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Часто на практике для вычисления пределов рациональнее использовать тождественные преобразования функции (см. выше). Преимущество правила Лопиталя заключается в том, что оно является универсальным для вычисления пределов с любым видом неопределенности, так как любую неопределенность с помощью преобразований можно привести к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 , и в окрестности этой точки $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = 0$, причем $f_2'(x) \neq 0$, тогда существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

То есть предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Пример Найти предел функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + \sin^2 x)} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\ln(1 + \sin^2 x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 + \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos x} = \\ &= \frac{1 + 0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Смысл данной теоремы заключается в том, что, взяв отдельно производную от функции, стоящей в числителе, и от функции, стоящей в знаменателе,

мы раскрываем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Если после применения правила Лопиталя снова получилась неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, то к полученному пределу снова применяется правило Лопиталя. И так до тех пор, пока не освободимся от неопределенности.

Рассмотрим правило Лопиталя для каждого вида неопределенности.

7.1 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Пример Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x-6}{x^2-6x+5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x-6)'}{(x^2-6x+5)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{2x-6} = \frac{6}{-4} = -1,5.$$

7.2 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Такие пределы можно также вычислять по правилу Лопиталя, так как неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ можно привести к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_2(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Пример Найти предел функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 3x - 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - x + 1)'}{(3x^2 + 3x - 4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{6x + 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x - 1)'}{(6x + 3)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

В данном примере производная берется дважды, так как после первой неопределенность не устранилась.

7.3 Неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x), \quad \text{где } \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty.$$

Такой вид неопределенности приводится к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ по формулам

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) : \frac{1}{f_2(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) : \frac{1}{f_1(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Только после такого преобразования возможно применение правила Лопиталья

Пример Найти предел функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 2x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(\operatorname{tg}^2 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos^2 2x}{4 \operatorname{tg} 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos^2 2x}{2 \operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \operatorname{tg} 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(2 \operatorname{tg} 2x)'} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2 \cdot 2}{\cos^2 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Замечание. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \operatorname{tg} 2x}$ можно вычислить, применяя эквивалентность бесконечно малых (см. пункт 5).

7.4 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x)), \quad \text{где} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty.$$

Для того, чтобы устранить неопределенность данного вида и привести ее к виду $\left(\frac{0}{0} \right)$ нужно сделать следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f_2(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{f_1(x)}} \right) : \left(\frac{1}{f_1(x) \cdot f_2(x)} \right).$$

Пример Найти предел функции:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{(\ln x \cdot (x-1))'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.5 Неопределенности вида 1^∞ , ∞^0 , 0^0 , 0^∞ преобразовываются с помощью следующего тождества

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x))^{f_2(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \ln f_1(x)}.$$

Данное тождество основано на свойстве логарифмов $a = e^{\ln a}$.

Сначала $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \cdot \ln f_1(x)$ необходимо привести к виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а затем применить правило Лопиталя.

7.5.1 Неопределенность вида (1^∞)

Пример. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/x^2} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos 3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos 3x}, \text{ вычислим}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos 3x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 3x} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x}{2x \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 3x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-3 \operatorname{tg} 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9}{2 \cos^2 3x} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда получим: } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/x^2} = e^{-\frac{9}{2}}.$$

7.5.2 Неопределенность вида (∞^0)

Пример Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{1}{x}}.$$

$$\text{Так как } \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

7.5.3 Неопределенность вида (0^0)

Пример Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x \cdot \frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}}, \text{ вычислим}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\ln(e^x - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x \cdot e^x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + x \cdot e^x} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e^1 = e.$$

7.5.4 Неопределенность вида (0^∞)

Пример Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\frac{1}{x}} = (0^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sin x}, \text{ вычислим}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{x} = \left(\frac{-\infty}{0} \right) = -\infty, \text{ следовательно } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

8 Непрерывность функции. Точки разрыва

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если существует предел функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Все точки разрыва функций разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва.

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример 1.

Дана функция $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x > 0, \\ -2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Найти точку разрыва и определить ее род.

Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Вычислим односторонние пределы: $\lim_{x \rightarrow 0 - 0} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0 + 0} f(x) = 2$. Следовательно, в точке $x=0$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен $2 - (-2) = 4$.

Пример 2.

Дана функция $y = \frac{4}{x-3}$. Найти точку разрыва и определить ее род.

Функция не определена в точке $x=3$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x-3} = \infty$. Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

9 Примеры для самостоятельного решения

9.1 Найти предел функций.

$$9.1.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x+1}{3x-1}.$$

$$9.1.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+3}{4x-1}.$$

$$9.1.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+3}{x+1}.$$

$$9.1.4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-1}.$$

$$9.1.5. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x+3}{2x-1}.$$

$$9.1.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x-4}{3x-1}.$$

$$9.1.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x-1}.$$

$$9.1.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x+5}{4x-1}.$$

$$9.1.9. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{5x-7}{x-3}.$$

$$9.1.10. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+3}{2x-5}.$$

$$9.1.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8}{5x^2-3x+2}.$$

$$9.1.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}.$$

$$9.1.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x-18}{x+9}.$$

$$9.1.14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{x^2-2x-15}.$$

$$9.1.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}.$$

$$9.1.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+5}{x}.$$

$$9.1.17. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2-7x+12}{x^2-16}.$$

$$9.1.18. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-8x}.$$

$$9.1.19. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-4}{10x-5}.$$

$$9.1.20. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2+32}{x^2-64}.$$

$$9.1.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+6x-16}{3x^2-5x}.$$

$$9.1.22. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2-6}{x^2-x-2}.$$

$$9.1.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x-2}.$$

$$9.1.24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}.$$

$$9.1.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}.$$

$$9.1.26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9}.$$

$$9.1.27. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-6x+5}{x^2-8x+15}.$$

$$9.1.28. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3}{x^2+3}.$$

$$9.1.29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+3}{x-1}.$$

$$9.1.30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{2x-1}.$$

9.2 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ в дробно-рациональных функциях

$$9.2.1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}.$$

$$9.2.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}.$$

$$9.2.3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{x^2-2x-15}.$$

$$9.2.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}.$$

$$9.2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x}.$$

$$9.2.6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-7x+12}{x^2-16}.$$

$$9.2.7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2-12x+32}{x^2-64}.$$

$$9.1.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8}{5x^2-3x+2}.$$

$$9.1.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}.$$

$$9.1.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x-18}{x+9}.$$

$$9.1.14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-2x-15}.$$

$$9.1.15. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2+6x-16}{x^2-64}.$$

$$9.1.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+5x}{2x}.$$

$$9.1.17. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9}.$$

$$9.1.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+6x-16}{3x^2-5x}.$$

$$9.1.22. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2-6}{x^2-x-2}.$$

$$9.1.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x-2}.$$

$$9.1.24. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+16}.$$

$$9.1.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25}.$$

$$9.1.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2-6}{x^2+x-2}.$$

$$9.1.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}.$$

$$\begin{array}{lll}
9.2.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 4x + 3}. & 9.1.18. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 9x + 20}. & 9.1.28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}. \\
9.2.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{3x^2 - 5x - 2}. & 9.1.19. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{30x - 10}. & 9.1.29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1}. \\
9.2.10. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 7x - 4}{10x - 5}. & 9.1.20. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 49}. & 9.1.30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.
\end{array}$$

9.3 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ в иррациональных функциях

$$\begin{array}{lll}
9.3.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2}. & 9.3.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}. & 9.3.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sqrt{9x+9} - 3}. \\
9.3.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-4x} - \sqrt{5}}. & 9.3.12. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4}. & 9.3.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{9x+16} - 4}. \\
9.3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1-4x}}. & 9.3.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-4x} - 1}. & 9.3.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9x+4} - 2}. \\
9.3.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x^3} - 1}{x^3 - x^4}. & 9.3.14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{10}}{x-3}. & 9.3.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4x+1} - 1}. \\
9.3.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sqrt{8+x^2} - \sqrt{8-4x^2}}. & 9.3.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}}{x}. & 9.3.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+36} - 6}. \\
9.3.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{4x}. & 9.3.16. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{8}}. & 9.3.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}. \\
9.3.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}. & 9.3.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{6-2x} - \sqrt{6}}. & 9.3.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{14x}{\sqrt{x+49} - 7}. \\
9.3.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}. & 9.3.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 2}. & 9.3.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+25} - 5}. \\
9.3.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2(\sqrt{5x} - 5)}. & 9.3.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{6-x} - \sqrt{6}}. & 9.3.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+16} - 4}. \\
9.3.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-5x^2}}{4x^2 + 2x^3}. & 9.3.20. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - 4}{x-4}. & 9.3.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9} - 3}.
\end{array}$$

9.4 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ в смешанных функциях

$$\begin{array}{ll}
9.4.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}. & 9.4.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos x}{4x^2}. \\
9.4.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}. & 9.4.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{4x}. \\
9.4.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln e^x - 3}{x^2 - 9}. & 9.4.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{\operatorname{tg}(x+1)}. \\
9.4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\operatorname{tg} x}{e^x - 1}. & 9.4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x \sin x}.
\end{array}$$

$$9.4.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{6x}.$$

$$9.4.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{e^x - \cos^2 x}.$$

9.5 Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ (Первый замечательный предел)

$$9.5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{10x}.$$

$$9.5.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin 3x}.$$

$$9.5.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 15x}{-3x}.$$

$$9.5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{8x^2}.$$

$$9.5.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{x \cdot \operatorname{tg} \frac{4x}{5}}.$$

$$9.5.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$9.5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}.$$

$$9.5.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cdot \arcsin^2 4x}.$$

$$9.5.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$9.5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg}^2 2x}{4x^2}.$$

$$9.5.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+10x)}{\arcsin 5x}.$$

$$9.5.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 6x}{2x^2}.$$

$$9.5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{5 \sin^2 x}.$$

$$9.5.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-\sin 5x}.$$

$$9.5.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\arcsin x}.$$

$$9.5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 2x}{x}.$$

$$9.5.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{x \cdot \sin x}.$$

$$9.5.26. \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\operatorname{tg} 6x}{4x}.$$

$$9.5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x \cdot \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}.$$

$$9.5.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg}^3 x}{\sin^2 x}.$$

$$9.5.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{\sin 2x}.$$

$$9.5.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}.$$

$$9.5.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{2x}.$$

$$9.5.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}.$$

$$9.5.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot \arcsin 4x}.$$

$$9.5.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \operatorname{tg} 2x}{4x}.$$

$$9.5.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$9.5.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x \cdot \sin 2x}.$$

$$9.5.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 3x}.$$

$$9.5.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{\operatorname{tg} 2x}.$$

9.6 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ в дробно-рациональных функциях

$$9.6.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 6}{3x^2 + 5x - 9}.$$

$$9.6.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x^3 + 1}{2x^3 + 4x - 1}.$$

$$9.6.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{x + 2x^2 + 1}.$$

$$9.6.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2x^2}{3x^2 - 6x + 5}.$$

$$9.6.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4}{x^6 + 7}.$$

$$9.6.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{2x^2 - x^3}.$$

$$9.6.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 7x^2}{2x^2 + 5x + 1}.$$

$$9.6.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 7x - 6}{2x^3 + x + 4}.$$

$$9.6.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 10x}{x - 8x^2}.$$

$$9.6.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 8x^2 + 1}{9x^2 + 3x}.$$

$$9.6.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 7x - 4}{3x^2 - x - 1}.$$

$$9.6.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x}{x - 7}.$$

$$\begin{array}{lll}
9.6.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{7x + 2}. & 9.6.15 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{-x^4 + x - 7}. & 9.6.25 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x}{5x^3 + 2x^2}. \\
9.6.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1}{-8x - 5x^2}. & 9.6.16 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{3x^2 + 4}. & 9.6.26 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x}{3x^2 + 4}. \\
9.6.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x^3 + 3}{2x^3 + 7x - 1}. & 9.6.17 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4 + 1}{2x^3 + 4x^4 - 1}. & 9.6.27 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x + 4}. \\
9.6.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 1}{4x^2 + 5x - 1}. & 9.6.18 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^3 + 7}. & 9.6.28 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 6x}{x + 2x^2 + 1}. \\
9.6.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^5 + 8x - 6}{2x^3 + 3x - 4}. & 9.6.19 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 7x^2}{14x^2 - x + 3}. & 9.6.29 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x}{x - x^2}. \\
9.6.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9x + 8}{-x^4 + 10x + 6}. & 9.6.20 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 2x}{-3x^2 + x - 9}. & 9.6.30 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2}.
\end{array}$$

9.7 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ в иррациональных функциях

$$\begin{array}{ll}
9.7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4x + 2x}}. & 9.7.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x - 8} + \sqrt{8x^2 - 1}}. \\
9.7.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 8x}{4x - 2}. & 9.7.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \frac{1}{3}}{\sqrt{9x^2 + 16} - 4}. \\
9.7.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(x - 3) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}. & 9.7.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 3}}{9x - 2}. \\
9.7.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 + \sqrt{x^2 - 3}}. & 9.7.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}}{8x}. \\
9.7.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{3x + \sqrt{x + 1}}. & 9.7.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 - 4}}.
\end{array}$$

9.8 Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ в смешанных функциях

$$\begin{array}{ll}
9.8.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}}. & 9.8.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{\ln(8 + x)}. \\
9.8.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}. & 9.8.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 2}{8e^x}. \\
9.8.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x}}{x + 5}. & 9.8.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{x^2}}{4x^2 - 9}. \\
9.8.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln(x - 1)}{e^{4x}}. & 9.8.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5}{3e^{x^3}}. \\
9.8.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{\ln(x + 2)}. & 9.8.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^{(x+1)}}{\ln(x - 2)}.
\end{array}$$

9.9 Неопределенность вида $(\infty - \infty)$

$$9.9.1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln e^x} - \operatorname{ctg} x \right).$$

$$9.9.3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{3 \ln x} - \frac{5}{4x-4} \right).$$

$$9.9.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$9.9.5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\sin 4x} - \frac{10}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$9.9.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 5x + 6} - x \right)$$

$$9.9.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

$$9.9.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

$$9.9.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

$$9.9.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 1} \right)$$

$$9.9.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \right)$$

9.10 Неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$

$$9.10.1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(2 - e^x) \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$9.10.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (\ln x - \ln 3).$$

$$9.10.3. \lim_{x \rightarrow \infty} 4x \cdot [\ln(7x + 2) - \ln 7x].$$

$$9.10.4. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \sin 3x.$$

$$9.10.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln e^x} \cdot \ln(1 - 8x).$$

$$9.10.6. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) \cdot [\ln(1 + 5x) - \ln 5x].$$

$$9.10.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} \ln(1 + 3x).$$

$$9.9.8. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5) \cdot [\ln 2x - \ln(2x - 1)].$$

$$9.10.9. \lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 6) \cdot [\ln 4x - \ln(1 + 4x)].$$

$$9.10.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\ln(e^x - 1)} \cdot \operatorname{ctg} x.$$

9.11 Неопределенность вида (1^∞) . Второй замечательный предел

$$9.11.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+9} \right)^{2x}. \quad 9.11.11. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}}. \quad 9.11.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 + 5x - 3} \right)^{3x}.$$

$$9.11.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{6x}. \quad 9.11.12. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{6}{x}}. \quad 9.11.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x - 11}{x^2 + 3x - 8} \right)^{2x-1}.$$

$$9.11.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{x+1}. \quad 9.11.13. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}. \quad 9.11.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 + 8x - 9} \right)^{4x}.$$

$$9.11.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x-2} \right)^{2+x}. \quad 9.11.14. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{4}{x}}. \quad 9.11.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 7x + 8}{x^2 - 5x + 4} \right)^{5x+1}.$$

$$9.11.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+3}{8x} \right)^{2x-4}. \quad 9.11.15. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}. \quad 9.11.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 5} \right)^{2-4x}.$$

$$9.11.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^x. \quad 9.11.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x} \right)^{2x+1}. \quad 9.11.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 7x - 9}{2x^2 + 4x + 5} \right)^{4x}.$$

$$\begin{aligned}
9.11.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-6}{x} \right)^x & \quad 9.11.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x} \right)^{4x-1} & 9.11.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2+x+2}{4x^2-x-1} \right)^{3x-1} \\
9.11.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^{2x} & \quad 9.11.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+6}{7x} \right)^{2x} & 9.11.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2+x+4} \right)^{7x} \\
9.11.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x} \right)^{5x} & \quad 9.11.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+8}{3x} \right)^{2x} & 9.11.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2-7x+3}{5x^2-5x-8} \right)^{5x} \\
9.11.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{3x} & \quad 9.11.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^{3x-2} & 9.11.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2+6x+12}{6x^2-2x-9} \right)^{3x}
\end{aligned}$$

9.12 Неопределенность вида (1^∞) в смешанных функциях

$$\begin{aligned}
9.12.1. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} & \quad 9.12.6. \lim_{x \rightarrow 0} (5x+1)^{\frac{1}{x}} \\
9.12.2. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{\ln x}} & \quad 9.12.7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{x} - 3x \right)^{\frac{1}{3x-3}} \\
9.12.3. \lim_{x \rightarrow \pi} \left(1 + \cos \frac{3x}{2} \right)^{\frac{1}{x-\pi}} & \quad 9.12.8. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \\
9.12.4. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} & \quad 9.12.9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{2 \operatorname{ctg} 2x} \\
9.12.5. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} & \quad 9.12.10. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin x}{\sin 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}
\end{aligned}$$

9.13 Неопределенность вида (0^∞)

$$\begin{aligned}
9.13.1. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}} & \quad 9.13.6. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\ln x} \\
9.13.2. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} & \quad 9.13.7. \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)^{\ln(x-3)} \\
9.13.3. \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x)^{\operatorname{ctg} x} & \quad 9.13.8. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\
9.13.4. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{ctg} 3x} & \quad 9.13.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln x} \\
9.13.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{x^2} & \quad 9.13.10. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}
\end{aligned}$$

9.14 Неопределенность вида (∞^0)

$$9.14.1. \lim_{x \rightarrow \pi} (\operatorname{ctg} x)^{3 \sin x}.$$

$$9.14.2. \lim_{x \rightarrow 0} (2 \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$9.14.3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$9.14.4. \lim_{x \rightarrow \infty} (8x+1)^{\frac{1}{x}}.$$

$$9.14.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^x.$$

$$9.14.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{x^2}.$$

$$9.14.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$9.14.8. \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$9.14.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(\sqrt{x}+1) \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$9.14.10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \sin x} \right)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

9.15 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определить при каких $x \rightarrow x_0$ функция будет являться бесконечно большой и (или) бесконечно малой.

$$9.15.1. y = \ln(x-1)$$

$$9.15.2. y = \frac{3}{x^4}$$

$$9.15.3. y = x^5$$

$$9.15.4. y = (x-4)^2$$

$$9.15.5. y = \ln(x-5)$$

$$9.15.6. y = \frac{6}{e^x}$$

$$9.15.7. y = (x+1)^3$$

$$9.15.8. y = \frac{1}{x^3}$$

$$9.15.9. y = (x-6)^3$$

$$9.15.10. y = (5x-2)^3$$

$$9.15.11. y = \frac{7}{e^{x-7}}$$

$$9.15.12. y = (2x+1)^3$$

$$9.15.13. y = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$9.15.14. y = x^2$$

$$9.15.15. y = \ln(2x-3)$$

$$9.15.16. y = (4x-1)^2$$

$$9.15.17. y = \frac{1}{(3x-8)^2}$$

$$9.15.18. y = \frac{2}{e^{x-1}}$$

$$9.15.19. y = \ln(x+2)$$

$$9.15.20. y = \frac{1}{(2x-7)^2}$$

$$9.15.21. y = \frac{1}{(x-3)^5}$$

$$9.15.22. y = \frac{1}{e^{x+1}}$$

$$9.15.23. y = \frac{5}{e^{x-2}}$$

$$9.15.24. y = (3x-5)^2$$

$$9.15.25. y = x^7$$

$$9.15.26. y = \ln x$$

$$9.15.27. y = \frac{1}{x^2}$$

$$9.15.28. y = (x-3)^2$$

$$9.15.29. y = \frac{2}{e^x}$$

$$9.15.30. y = x^3$$

9.16 Непрерывность функции. Точки разрыва

Определить является ли функция $y = f(x)$ непрерывной на отрезке $[a, b]$. Если функция терпит разрыв на данном отрезке, определить какого рода.

- 9.16.1. $y = 3^{\frac{1}{x-2}}, [-2, 3]$.
- 9.16.2. $y = \frac{5}{x-1}, [-2, 3]$.
- 9.16.3. $y = \cos x, [-2, 3]$.
- 9.16.4. $y = \frac{5}{x}, [-2, 3]$.
- 9.16.5. $y = 2x^3 + 1, [-2, 3]$.
- 9.16.6. $y = \frac{3}{x}, [-1, 2]$.
- 9.16.7. $y = \log_3 x, [-1, 2]$.
- 9.16.8. $y = e^{\frac{1}{x-1}}, [-1, 2]$.
- 9.16.9. $y = 3x^2 + 2, [-1, 2]$.
- 9.16.10. $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} [-1, 3]$.
- 9.16.11. $y = 5x^3 + 1, [-1, 3]$.
- 9.16.12. $y = 2^{\frac{1}{x-1}}, [-2, 3]$.
- 9.16.13. $y = 2\lg x, [-1, 3]$.
- 9.16.14. $y = \sin^3 x, [-1, 3]$.
- 9.16.15. $y = \cos^2 x, [-2, 3]$.
- 9.16.16. $y = \operatorname{ctg} x, [-2, 3]$.
- 9.16.17. $y = \frac{6}{x-2}, [-1, 3]$.
- 9.16.18. $y = 3x^3 + 1, [-1, 2]$.
- 9.16.19. $y = 4^{\frac{1}{x-2}}, [-1, 3]$.
- 9.16.20. $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} [-1, 4]$.
- 9.16.21. $y = 2x^3 - 1, [-1, 2]$.
- 9.16.22. $y = \sin^2 x, [-2, 3]$.
- 9.16.23. $y = \log_2 x, [-1, 2]$.
- 9.16.24. $y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq 0, \\ -2, & \text{если } x < 0. \end{cases} [-3, 2]$.
- 9.16.25. $y = \operatorname{tg} x, [-2, 3]$.
- 9.16.26. $y = 6x^5 + 7, [-2, 2]$.
- 9.16.27. $y = 5\cos x, [-3, 3]$.
- 9.16.28. $y = \sin^2 x, [-1, 2]$.
- 9.16.29. $y = \frac{2}{x-1}, [-1, 2]$.
- 9.16.30. $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geq 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} [-4, 3]$.

Библиографический список

- 1 **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.
- 2 **Бугров, Я.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Ростов н/Д : Феникс, 1997.
- 3 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1980.
- 4 **Гусак, А.А.** Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск : Тетра Системс, 1999.

Содержание

1	Предел функции.....	3
2	Бесконечно малые и бесконечно большие величины.....	5
3	Основные свойства пределов.....	6
4	Примеры решения задач.....	7
5	Первый замечательный предел.....	10
6	Второй замечательный предел.....	11
7	Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	13
8	Непрерывность функции. Точки разрыва.....	17
9	Примеры для самостоятельного решения.....	18
	Библиографический список	26

Учебное издание

Пиневич Елена Витальевна
Липович Виталий Ариевич
Стасюк Ирина Семеновна

ПОДГОТОВКА К ТЕСТИРОВАНИЮ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 5

Печатается в авторской редакции

Технический редактор Т.В. Бродская

Подписано в печать 31.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,63.
Тираж экз. Изд. № 90415. Заказ №

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета:
344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка
Народного Ополчения, д. 2.