

ОРОСЖЕЛДОР  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ростовский государственный университет путей сообщения»  
(ФГБОУ ВО РГУПС)

---

В.В. Шаповалов, А.Л. Озябкин, В.Г. Рубан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ  
ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ**

**Учебно-методическое пособие для выполнения  
практических занятий, контрольных и курсовых работ**

**Ростов н/Д, 2017**

УДК 001.891.54 : 629.3 : 629.4 : 519.6

Рецензент: Волохов А.С., доцент каф. «Эксплуатация и ремонт машин» ФГБОУ ВО РГУПС

### **Шаповалов, В.В.**

Моделирование механических транспортных систем : учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ / В.В. Шаповалов, А.Л. Озябкин, В.Г. Рубан. – Ростов н/Д, 2017. – 236 с.: ил. Библиогр. С. 231.

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ содержит вопросы разработки физико-математической модели механической и фрикционной подсистем. Показано, что моделирование сложных фрикционно-механических систем должно осуществляться с учётом взаимосвязи подсистем. Приведены методы определения масштабов и критериев подобия модельной и натурной механической и фрикционной подсистем. Выполнено сравнение трёх способов расчёта значений температур, реализуемых во фрикционном контакте (расчётным методом А.В. Чичинадзе, методом экспериментальной термодинамики и экспериментальным методом электропроводимости контакта Ф.П. Боудена и Д. Тейбора).

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов направлений подготовки: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», профиль «Автомобильный сервис»; «Эксплуатация перегрузочного оборудования портов и транспортных терминалов» (бакалавриат); 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», профиль: «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» (специалитет); 43.03.01 «Сервис транспортных средств» (бакалавриат); 15.03.03 «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» (бакалавриат); 15.04.03 «Прикладная механика», профиль «Динамика и прочность машин» (магистратура).

Глава 1 и п.2.7 выполнена Шаповаловым В.В., п. 2.1 – Рубаном В.Г., п. 2.2...2.8 – Озябкиным А.Л.

Одобрены кафедры «Транспортные машины и триботехника»

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	4
1.1 Теоретические основы подобия .....	13
1.2 Методы определения критериев подобия .....	18
1.2.1 Способ интегральных аналогов .....	19
1.2.2 Размерность и системы единиц.....	31
1.2.3 Формула размерности .....	34
1.2.4 Метод анализа размерностей .....	49
2 ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ФРИКЦИОННЫХ ПОДСИСТЕМ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА .....	77
2.1 Математическое моделирование подвижного состава .....	78
2.2 Динамическое подобие механической подсистемы.....	95
2.3 Динамическое подобие фрикционной подсистемы .....	110
2.4 Разрешение противоречий, возникающих при составлении физической модели фрикционного контакта .....	169
2.5 Физическое подобие модели фрикционного контакта (на примере подсистемы «колесо – рельс») .....	172
2.6 Пересчётные масштабы подобия с природы на модель и обратно .....	190
2.7 Применение методики экспериментальной термодинамики при реализации мониторинга термодинамических характеристик.....	223
2.8 Исследование фактической площади касания методом электропроводимости контакта.....	226
Список использованных источников.....	231
Заключение .....	232
Варианты заданий для самоподготовки .....	233
Вопросы для контроля знаний.....	233

## 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

По мере своего совершенствования машины, механизмы, транспортные системы становятся всё более и более сложными. Отдельные элементы и подсистемы машин, механизмов, транспортных систем, взаимодействуя между собой, создают весьма глубокие внутренние связи. Эти связи не позволяют расчленять систему на независимые составляющие и при определении её характеристик не дают возможности изменять влияющие факторы по одному, применяя метод наложения (*суперпозиции*).

Импульсные возбуждающие систему нагрузки, случайные колебания, влияние климатических и атмосферных факторов – всё это не что иное, как источники случайных помех. Для повышения надёжности и безопасности эксплуатации в состав транспортных систем вводят различные устройства, в соответствии с определёнными правилами решения той или иной задачи или группы задач реализующие на основе переработки принятой информации программное управление взаимодействующими между собой подсистемами, чаще всего по принципу обратной связи.

Многообразие связей между подсистемами машин, методов их управления и эксплуатационных факторов требует специальных приёмов постановки и обобщения результатов получаемой информации. Быстрая и глубокая проверка выдвигаемых гипотез, отказ от некоторых или их утверждение могут быть сделаны только после закономерно обоснованного и обычно специально поставленного опыта или серии опытов, то есть после проведения физического эксперимента.

*Цель физического эксперимента* – проверка справедливости выдвинутых гипотез или теоретических выводов, установления областей их действия, а в ряде случаев использование результатов эксперимента для получения практических решений.

Конечным этапом исследования являются выводы и рекомендации, которые должны быть в дальнейшем применимы на практике. При этом составление плана проведения физического эксперимента, оценка объёма экспериментальных исследований и его реализация – наиболее сложный, трудоёмкий и ответственный этап. Для снижения трудоёмкости и сокращения сроков испытаний широко используется моделирование. Исследование объекта, которое базируется на его подобии модели и включает её построение, изучение и перенос полученных сведений на объект, называется *моделированием*.

Физическая наука неразрывно связана с математическим моделированием со времён Исаака Ньютона (XVII—XVIII вв.).

И. Ньютон открыл фундаментальные законы механики, закон всемирного тяготения, описав их на языке математики. И. Ньютон (наряду с Г. Лейбницем) разработал дифференциальное и интегральное *исчисления*, ставшие основой математического аппарата физики. Все последующие физические открытия (в термодинамике, электродинамике, атомной физике и

пр.) представлялись в форме законов и принципов, описываемых на математическом языке, т.е. в форме математических моделей.

*Моделирование* рассматривается как процесс составления результатов исследования модельного и натурального объектов на основе подобных преобразований (анализа подобия). Таким образом, моделирование означает осуществление каким-либо способом отображения или воспроизведения действительности для изучения имеющихся в ней объективных закономерностей.

Общей задачей теории моделирования является выработка методологии, направленной на упорядочение регистрации и обработки информации об объектах, существующих вне нашего сознания и взаимодействующих между собой и внешней средой, а также отыскание ответов на практические вопросы.

Исследовательские задачи, решаемые с помощью моделей, можно разделить на четыре подгруппы:

1. Прямые задачи анализа, при решении которых исследуемая система задаётся параметрами своих элементов и параметрами исходного режима, структурой или уравнениями. Требуется определить реакцию системы на действующие силы.
2. Обратные задачи анализа, которые по известной реакции системы требуют найти силы (возмущения), заставившие рассматриваемую систему прийти к данному состоянию и вызвавшие данную реакцию.
3. Задачи синтеза, иногда называемые инверсными задачами, требующие нахождения таких параметров, при которых процессы в системе будут иметь желательный по каким-либо соображениям характер. Процессы могут быть описаны дифференциальными уравнениями или охарактеризованы некоторыми выходными данными.
4. Индуктивные задачи, решение которых имеет целью проверку гипотез, уточнение уравнений, описывающих процессы, происходящие в системе, выяснение свойств элементов.

Под *объектом* следует понимать явление, процесс, систему, установку, знаковое образование, находящееся в отношении подобия к моделируемому объекту. Под *подобием* понимается взаимно-однозначное соответствие между объектом и его моделью, при котором функции перехода от параметров, характеризующих один из объектов, к другим параметрам известны, а математические описания этих объектов могут быть преобразованы в тождественные.

Таким образом, объектом (и его моделью) может быть участок железнодорожного полотна, механическая система подвижного состава, машина или механизм, энергоучасток железной дороги или электродвигатель, производственный процесс на заводе или процесс трения и изнашивания в контактной области фрикционной системы, электрические, гидравлические или пневматические явления, или процессы.

Практические цели, преследуемые при решении технических и научных задач, требуют применения моделирования в случаях, когда модель хо-

рошо отражает изучаемый объект (оригинал) только в отношении тех явлений или входящих в эти явления процессов, которые существенны в данном исследовании, при данной постановке задачи. Таким образом, модель – это неполная копия объекта. Подобие и моделирование, которые представляют собой практический интерес, могут быть разделены на три способа.

1. *Способ полного моделирования и полного подобия*, при котором обеспечено подобие движения материи в основных формах её существования, то есть во времени и пространстве. Полное подобие и полное моделирование математически характеризуются соотношением модели  $x$  и оригинала  $X$ :

$$x = C_x \cdot X, \quad (1.1)$$

где  $C_x$  – масштабный коэффициент, который обычно является постоянной величиной, но в частном случае может быть и переменной, зависящей от режима, времени или координат пространства.

2. *Способ неполного* (частичного, локального, функционального) *моделирования и подобия*, при которых протекание всех основных процессов, характеризующих изучаемое явление, подобно только частично (или во времени, или только в пространстве). При функциональном моделировании подобие устанавливается между некоторыми функциями или обобщёнными характеристиками, которые в модели и оригинале имеют определённое соответствие.
3. *Приближённое моделирование* связано с приближённым подобием, при этом некоторые факторы, имеющие незначительное влияние на протекание процесса, изучаемого в данной постановке задачи, выполняется приближённо или совсем не выполняется. Между некоторыми параметрами системы или некоторыми параметрами их режимов эксплуатации при этом может не существовать соотношений подобия и  $x \neq C_x \cdot X$  или же  $x \approx C_x \cdot X$ .

Как правило, инженерные задачи решаются методами приближённого моделирования, что значительно упрощает задачу и сокращает объём исследований и время испытаний. Погрешность при этом оценивается тем или иным способом (чаще всего экспериментально).

Рассмотрим основные методы моделирования.

**1) Наглядное моделирование.** К этой группе моделирования следует отнести различные мысленные представления (гипотезы) в форме тех или иных воображаемых моделей. При наглядном моделировании соблюдается геометрическое подобие форм и размеров объектов. К ним относятся макеты (зданий, сооружений, машин и т.д.), выполненных в определённом геометрическом масштабе. Наглядные модели могут изображать мысленные представления (гипотезы) в форме тех или иных воображаемых моделей. К ним следует отнести, например, планетарные модели атомов, созданные Э. Резерфордом, Н. Бором, или модели молекул Д. Бернулли, причём для них могут создаваться модели в виде наглядных аналогов.

**2) Символическое (знаковое) моделирование.** Оно предусматривает прежде всего упорядоченную запись, к которой относится, например, выпол-

нение географических карт, химических моделей, представленных в виде условных знаков, отображающих состояние поверхности или соотношение элементов во время химических реакций. Эти знаковые модели дают физическую интерпретацию абстрактных математических операций. К знаковым моделям относятся разнообразные знаковые построения и записи различных операций, основанные на топологии и теории графов.

**3) Математическое мысленное моделирование.** Сюда относятся модели, являющиеся средством связи теории с объективной действительностью, средством для проверки теории. Здесь прежде всего можно назвать хорошо знакомые схемы замещения различных элементов систем. Они математически отражают уравнения и их физическую интерпретацию с помощью простейших объектов, ранее хорошо изученных. Те или иные схемы замещения либо расчётные схемы могут строиться не только для непосредственно изучаемой системы, характеризующейся значениями переменных, представленных как функции времени и выраженных обычно в полярных или декартовых координатах, но и для преобразованной системы. Например, при изучении плоскопараллельных колебаний широко практикуется переход от изучаемых колебаний к новым, математически полученным в результате так называемого конформного преобразования. Если можно, мысленно моделируя или аналитически исследуя, получить характеристики для конформно преобразованного колебания, более удобного для изучения, и найти условия перехода от преобразованного колебания к исходному, подлежащему изучению, то задачу, поставленную при изучении колебаний, можно считать решённой.

**4) Натурное моделирование.** Под этим видом моделирования понимаются исследования «на натуре», то есть в природе, при специально подобранных подобных условиях. При натурном моделировании в объект, подлежащий исследованию, не вносят специальных изменений. Обязательным же является требование обработки результатов экспериментов с помощью теории подобия.

**5) Физическое моделирование.** Этот вид моделирования характеризуется прежде всего тем, что исследования проводятся на установках, обладающих геометрическим, кинематическим и физическим подобием, то есть сохраняющих полностью или хотя бы в основном природу явлений. Если осуществлено полное или неполное физическое моделирование и подобие, то по характеристикам модели можно получить все характеристики оригинала пересчётом через масштабные коэффициенты. Физическое моделирование может быть:

- временным, при котором исследуются только процессы, протекающие во времени, например изменения колебаний материальной точки при каких-либо переходных процессах;
- пространственно-временным для изучения нестационарных колебаний масс механической системы.

Например, необходимо определить коэффициент сцепления  $\psi$  колеса локомотива с рельсом на экспериментальном стенде. Если обозначить задаваемую нагрузку как  $N$ , а силу сцепления, определяемую динамометром,

как  $F_{cy}$ , то коэффициент сцепления колеса с рельсом можно найти из соотношения

$$\psi = \frac{F_{cy}}{N}.$$

Создав для модели физически подобные эксплуатационным (натурным) условия сцепления на пятне контакта колеса с рельсом, можно фиксировать значения коэффициента сцепления для различных условий изменения нагрузки  $N$  и угловой скорости  $\omega$  и найти закономерность в виде функциональной зависимости и в виде уравнений регрессии первого и второго порядка

$$\begin{aligned}\psi &= \Phi(N, \omega); \\ \psi &= b_0 + b_1 N + b_2 \omega + b_3 N \omega; \\ \psi &= b_0 + b_1 N + b_2 \omega + b_3 N \omega + b_4 N^2 + b_5 \omega^2,\end{aligned}$$

где  $b_i$  – постоянные коэффициенты влияния варьируемых факторов на выходной параметр оптимизации  $\psi$ .

**б) Аналого-цифровое моделирование.** При этом виде моделирования, иногда называемом математическим и имеющим многочисленные разновидности, физика исследуемого процесса не сохраняется. Моделирование основывается на изоморфизме уравнений, то есть их способности описывать различные по своей природе явления и выявлять различные функциональные связи, используя изофункционализм уравнений (способность описывать отдельные стороны поведения систем без полного описания всего поведения).

Эту группу моделирования можно разделить на следующие четыре подгруппы.

6.1) *Аналоговое моделирование* использует прямую аналогию между величинами, присущими одному явлению, и формально такими же и также входящими в уравнения процессов величинами, присущими другому явлению. При аналоговом моделировании воспроизводится не физический процесс в целом, а отдельные математические операции, которые выполняют элементы модели.

В 1873 году Максвелл Джеймс Клерк рассмотрел соответствие электрической цепи колебательной системе. В основу электромеханической аналогии было положено соответствие между током и скоростью материальной точки. В состав электрической цепи могут входить как активные, так и пассивные элементы. К активным элементам относятся источники механической или электрической энергии: моменты, скорости, силы, электрическое напряжение и так далее. К пассивным элементам можно отнести массу, упругость пружины, фрикционные элементы, электрические сопротивления, индуктивности, электрические ёмкости и другие.

Так, например, основой аналогового моделирования является тождественное соответствие между дифференциальными уравнениями, описывающими физические явления. Рассмотрим дифференциальные уравнения для – *поступательного механического движения*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + Cx = F,$$

где  $F$  – сила, реализующая внешнее воздействие на поступательное движение механической системы, Н;

$m$  – масса материальной точки, кг, Н·с<sup>2</sup>/м;

$\beta$  – коэффициент сопротивления движению, Н·с/м;

$C$  – коэффициент упругости пружины или упругой связи, Н/м;

$x$  – перемещение во времени центра тяжести массы тела, м.

– *вращательного (углового) механического движения*

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \beta_{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + C_{\varphi} \varphi = M,$$

где  $M$  – момент силы (тяговый или тормозной момент, реализующий внешнее воздействие на угловое движение механической системы), Н·м;

$J$  – момент инерции тела,  $J = m \cdot r^2$ , кг·м<sup>2</sup>, Н·м·с<sup>2</sup>/рад;

$\beta_{\varphi}$  – коэффициент сопротивления вращательному движению, Н·м·с/рад;

$C_{\varphi}$  – коэффициент упругости вала или упругой связи при кручении, Н·м/рад;

$\varphi$  – угловое смещение, рад.

– *электрическая цепь с последовательным соединением элементов*

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = E,$$

где  $E$  – электродвижущая сила, реализующая внешнее воздействие на электрический заряд), Вольт;

$L$  – индуктивность, Генри;

$R$  – активное электрическое сопротивление, Ом;

$C$  – электрическая ёмкость, Фарада;

$q$  – заряд в электрической цепи, Кулон.

Табл. 1.1 – Аналоги последовательного типа

Механическое понятие	Электрический аналог
Масса $m$ , момент инерции $J$	Индуктивность $L$
Коэффициент сопротивления $\beta$ , коэффициент трения $f$	Сопротивление $R$
Коэффициент упругости связи $C$	Величина, обратная электрической ёмкости, $1/C$
Сила $F$ , момент силы $M$	Электрическое напряжение $U$
Перемещение $x$ , угол $\varphi$	Заряд $q$
Скорость $V$	Электрический ток $I = \frac{dq}{dt}$
Сила $F$	Электродвижущая сила $E$

– *электрическая цепь с параллельным соединением элементов*

$$C \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L} \cdot U = E,$$

где  $E$  – электродвижущая сила, реализующая внешнее воздействие на электрический заряд), Вольт;

$C$  – электрическая ёмкость, Фарада;

$R$  – активное электрическое сопротивление, Ом;

$L$  – индуктивность, Генри;

$U$  – напряжение, Вольт.

Табл. 1.2 – Аналоги параллельного типа

Механическое понятие	Электрический аналог
Масса $m$ , момент инерции $J$	Электрическая ёмкость $C$
Коэффициент сопротивления $\beta$ , коэффициент трения $f$	Проводимость $G = 1/R$
Коэффициент упругости связи $C$	Величина, обратная индуктивности, $1/L$
Сила $F$ , момент силы $M$	Электрический ток $I$
Перемещение $x$ , угол $\varphi$	Электрическое напряжение $U$

6.2) *Цифровое моделирование* основывается на элементах, производящих математические операции дискретно на вычислительных машинах. Говорить о том, что с помощью этой машины создаётся цифровая модель, разумеется, можно весьма условно. Но разработанный алгоритм, программа и критериальная запись полученных результатов – всё это позволяет считать комплекс «алгоритм – программа – табличные и иллюстративные графики» моделью явления. Достоинством цифровых моделей по сравнению с аналоговыми является большая их точность.

В большинстве практических задач найти аналитическое решение не удаётся из-за математической сложности модели. В таком случае используются *численные методы* решения задачи, эффективная реализация которых возможна только на компьютере. Иначе говоря, физические исследования на основе сложных математических моделей производятся путём *компьютерного математического моделирования*. В связи с этим в XX веке наряду с традиционным делением физики на теоретическую и экспериментальную возникло новое направление – «вычислительная физика».

К программным продуктам, реализующим цифровое моделирование при решении конкретных задач, можно отнести системы MATLAB (MathWorks Inc. Software, официальный дистрибьютер в России Softline), SolidWorks (SolidWorks Corporation), ANSYS (ANSYS, Inc. Software, официальный дистрибьютер в России – группа компаний «ПЛИМ Урал» – «Делкам-Урал»), АПИМ WinMashine (Научно-технический центр «АПИМ») и другие.

На основе разработанного алгоритма (программы) персональным компьютером устанавливается количественная связь между параметрами, подлежащими изучению, например, между колебанием кузова локомотива и воздействием рельсовых стыков.

6.3) *Гибридное моделирование* является сочетанием моделей, упомянутых выше и выполненных в виде соединения непрерывных элементов: аналоговой модели и специализированных вычислительных машин. В такой комбинации используются положительные свойства аналоговых моделей (наглядность, простота набора схемы, быстродействие) и цифровых машин (точность, способность запоминания нужных данных, результатов анализа).

6.4) Под *функциональным*, или кибернетическим, моделированием понимают весьма широкую группу задач и методов их решений при весьма широком подходе к исследованиям. Если физические и отчасти математические модели стремятся выяснить связь количественной и качественной сторон явления, раскрывая структуру явления и на базе этого выясняя функцию, то кибернетическая модель предусматривает моделирование функции функцией. Она является только изофункциональной моделью, не стремящейся вскрыть ни подобия физики, ни подобия структуры внутри модели.

Для функциональных моделей характерно рассмотрение развития системы без анализа внутренних причинных связей, только в плане уравнивания её со средой с учётом механизма обратных связей. Специфику кибернетических моделей можно охарактеризовать тем, что в них объекты отражаются главным образом исходя из информационных процессов и процессов управления. Технической предпосылкой развития кибернетического моделирования сложных динамических систем являются появившиеся на мировом рынке быстродействующие компьютеры, позволяющие решать многие задачи управления за приемлемый для хода данного процесса отрезок времени, связать теорию моделирования с теорией оптимального управления.

**7) Физико-математическое моделирование** натуральных механических и фрикционных систем объединяет предыдущие методы моделирования и состоит из следующих основных этапов.

7.1) Создания математической модели квазилинейной части механической подсистемы натурной машины или механизма без учёта трения во фрикционных подсистемах, с целью выявления основных её динамических характеристик упрощения математической модели до уровня минимальной сложности, её решения численными способами, выявления частот и форм собственных колебаний, а также идентификации устойчивости.

7.2) На основе анализа разработанных ранее дифференциальных уравнений формулируются критерии подобия динамических подсистем. Несмотря на большое разнообразие существующих конструкций машин, динамические качества любой машины могут быть исследованы по общей методике, которая базируется на законах теоретической механики и теории колебаний. Условием динамической эквивалентности исходной и приведённой систем является *равенство частот и форм колебаний*. Следовательно, система масс расчётной эквивалентной схемы механической системы имеет число степеней свободы, равное выбранному числу масс реального объекта, и движение её описывается таким же количеством уравнений. Это даёт возможность решить задачу моделирования основных ди-

намических характеристик на основе *метода анализа дифференциальных уравнений движения* расчётной эквивалентной схемы.

7.3) Построения динамической модели подсистемы или подсистем фрикционного контакта. Исследователю здесь необходимо выяснить основные динамические режимы эксплуатации фрикционных подсистем с целью обеспечения, как было сказано ранее, равенства частот и форм колебаний структурных составляющих поверхностей трения, составляющих фрикционную пару трения, а также характерного её износа.

7.4) Построения физической модели подсистемы фрикционного контакта путём создания физической модели изучаемого явления или процесса с применением метода анализа размерностей физических величин с ограничениями. Результатом моделирования является *критериальное уравнение*, объединяющее используемые при моделировании физические величины, в безразмерном виде. Критериальное уравнение зависит от физических величин, принятых за базисные. Однако, как показывает накопленный опыт в моделировании, результаты моделирования не сказываются на стандартных, многократно апробированных на практике, критериях Ньютона, Фруда, Био, Н. Стокса и др. Это позволяет самому исследователю создавать новые критерии подобия исследуемых физических процессов при решении конкретных задач прикладного характера.

7.5) Создания или использования физической установки, стенда или машины трения для последующего проведения экспериментальных исследований модели натурального объекта с заданным числом степеней свободы.

7.6) Проведение физических исследований модельной системы с использованием математического планирования эксперимента. Этот этап моделирования позволяет идентифицировать физические величины, входящие в разработанный исследователем на четвёртом этапе исследований критерий подобия, с помощью *метода математического планирования эксперимента*. Метод позволяет определить соответствие построенной математической модели изучаемому физическому явлению или динамическому процессу и оптимальные значения варьируемых физических величин, входящих в модель.

7.7) Перенос результатов экспериментальных исследований на натуральный объект исследования. Оценка адекватности модели и интерпретация результатов исследований.

Таким образом, прежде чем рассматривать примеры реального физико-математического моделирования, необходимо рассмотреть теоретические основы моделирования во всех его видах и формах, которое должно осуществляться на основе некоторых математических соотношений, количественно фиксирующих условия подобия, – *критериев подобия*. Однако не во всех случаях моделирования удаётся найти критерии подобия. Тем не менее, все модели должны быть в той или иной форме критериальными, то есть иметь количественные оценки. Эти количественные выражения критериев могут быть различными – начиная от простейших соотношений (1.1), выте-

кающих из элементарных характеристик процесса, до критериев, определённых в соответствии с теорией подобия.

### *1.1 Теоретические основы подобия*

Рассмотрим терминологию, используемую в теории подобия.

Под *явлением* понимают совокупность процессов, то есть изменений, происходящих в той или иной системе. Эти изменения данного состояния, или режима системы (процесса), происходящие во времени и пространстве, характеризуются некоторыми показателями, называемыми текущими переменными, переменными параметрами, обобщёнными координатами. Будем их называть далее *параметрами процесса*. Эти процессы происходят в системе, состоящей из элементов, которые характеризуются своими параметрами, называемыми *параметрами системы*.

Явление рассматривается как комплекс процессов, которые могут быть описаны *уравнениями, связывающими параметры процессов и параметры системы, записанными в выбранной системе координат*. Если наиболее существенные с точки зрения поставленной задачи процессы подобны, то явления или системы считаются подобными. Процессы будут подобны друг другу, если существует некоторое соответствие сходственных величин рассматриваемых систем: положения точек, геометрических размеров, параметров систем и параметров процессов.

Понятие *сходственных точек и сходственных величин*, известные из геометрии, значительно сложнее в теории подобия физических явлений. В этом случае сходственными точками пространства, времени и параметров процесса будут такие величины, при которых их значения в одной системе будут так или иначе соответствовать значения в другой.

Полное тождество явлений в пространстве и во времени, получаемое после изменения масштаба, свойственно *абсолютному подобию*, которое представляет собой абстрактное понятие, реализуемое только умозрительно. Как правило, при изучении физических явлений и решении технических задач исследователь не имеет дело со сходными во всех деталях явлениями. Поэтому практика применения теории подобия сосредоточивает внимание на понятиях практического (полного, неполного и приближённого) подобия.

*Полное подобие* – подобие протекания во времени и в пространстве основных процессов, которые достаточно полно определяют изучаемое явление. Например, электромеханические явления имеют полное подобие, если все процессы изменений во времени токов, напряжений, вращающих моментов и изменения во времени и в пространстве распределения магнитных и электрических полей синхронных генераторов отличаются только масштабами (1.1). Однако, шумы, нагревы отдельных деталей могут быть неподобными, так как они заведомо не оказывают существенного влияния на подобие подлежащих исследованию электромеханических явлений.

*Неполное подобие* – подобие протекания процессов только во времени или только в пространстве.

*Приближённое подобие*, которое может быть, как полным, так и неполным, характеризующимся упрощающими допущениями, заведомо приводящими к искажениям, заранее оцениваемым как допустимые на основании дополнительных аналитических или экспериментальных исследований. Например, нахождение условий подобия генераторов на основании упрощённых уравнений, не учитывающих апериодическую составляющую тока статора и периодическую составляющую тока ротора.

Подобию во всех его видах свойственны некоторые общие закономерности, которые принято называть *теоремами подобия*.

Один из первых рассмотрел в своих трудах закономерности подобия и моделирования в середине XV в. Леонардо да Винчи.

В XVI–XVII вв. Галилей использовал методы подобия при сооружении галер различных размеров. Основные положения теории подобия были сформулированы И. Ньютоном в 1686 г. В сочинении «О подобии в механике» он устанавливает основные свойства подобных явлений и выводит первую теорему подобия.

**Первая теорема подобия.** *Подобные явления имеют одинаковые критерии подобия. Под критериями подобия подразумевают безразмерный комплекс физических величин.*

Например, закон Ньютона, описывающий движение материальной точки при действии силы  $F$ , записывается в виде формулы:

$$F = m \cdot a, \quad (1.2)$$

где  $m$  – масса материальной точки, кг;

$a$  – ускорение точки,  $\text{м/с}^2$ ,  $a = V/t$ ;

$V$  – скорость,  $\text{м/с}$ ;

$t$  – время, с.

Разделив левую часть выражения (1.2) на правую, получим критерий подобия Ньютона, характеризующий отношение силы, приложенной к точке массы  $m$ :

$$Ne = \frac{F}{m \cdot a} = \frac{F \cdot t}{m \cdot V}. \quad (1.3)$$

Данный критерий представляет собой безразмерную величину:

$$\frac{F \cdot t}{m \cdot V} \Leftrightarrow \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} / \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = 1.$$

Кроме комплексов (критериев), могут быть использованы симплексы. Симплексы – это отношение одинаковых физических величин. Например, для оценки геометрической формы подшипника скольжения можно использовать симплекс  $l_n/d_n$ , являющийся отношением длины к диаметру. Обозначая критерий через  $\pi$ , получим для подобных явлений  $\pi = idem$  (*idem* – одно и тоже). Так,  $\pi = \frac{(l_n/d_n)_o}{(l_n/d_n)_m} = idem = 1$ , т. е. при геометрическом

подобии отношение ширины подшипника к диаметру (наружному или внутреннему) для образца и модели должно быть одно и то же, а их отношение равно единице.

Критерии, как и симплексы, можно умножать или делить друг на друга или на один из них, а также на постоянную величину, возводить в степень, получая новые критерии с разным физическим смыслом.

Символы дифференцирования и интегрирования, входящие в исходные уравнения, поскольку они не имеют размерности, могут быть при установлении подобия отброшены и заменены выражениями:

$$\frac{d^n}{dx^n} y \Leftrightarrow \frac{y}{x^n}; \quad \int y dx \Leftrightarrow yx.$$

Например

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = m \cdot \frac{S}{t^2}, \quad (1.4)$$

тогда

$$Ne = \frac{F}{m \cdot a} = \frac{F \cdot t^2}{m \cdot S} = idem,$$

где  $S$  – пройденный точкой путь (м) под действием силы  $F$  (Н) за промежуток времени  $t$ , с.

$Ne$  – критерий подобия Ньютона (1.3).

Следует также учитывать, что геометрически подобные тела и движения (траектории), тригонометрические функции при преобразованиях тождественно равны, так как имеют одинаковые углы, представляющие геометрически подобные фигуры, например

$$\frac{[\sin \alpha]_o}{[\sin \alpha]_m} = idem = 1 \text{ при } \angle \alpha_o = \angle \alpha_m.$$

Для процессов, описываемых уравнениями, содержащими неоднородные функции, то их аргументы при полном подобии должны быть равны и являться также критериями подобия. Например, для

$$\varphi = K \sin(axy) \text{ и } \Phi = K \sin(AXY)$$

подобие процессов требует равенства

$$axy = AXY = idem.$$

Если в аргумент неоднородной функции входит сумма, например  $a+x+y$  или  $A+X+Y$ , то все слагаемые должны быть соответственно одинаковы.

В 1775–1776 гг. И.П. Кулибин применил моделирование при строительстве мостов через реку Неву в Петербурге.

В России первая работа по теории подобия принадлежит В.Л. Кирпичёву, который в 1872 г. в докладе «О подобии при упругих явлениях» на

заседании Русского Физического общества представлял условия подобия применительно к нагруженным твёрдым телам. В 1878 и 1881 гг. появились статьи В.Л. Кирпичёва «Закон подобия» и «Закон однородности».

В 1911 г. А. Федерман (Петербургский политехнический институт), в 1914 г. Э. Букингем (США) сформулировали вторую теорему подобия. В 1912–1925 гг. Т.А. Афанасьева-Эренфест доказывает вторую теорему подобия для самого общего случая. Её идеи легли в основу работ учёных при решении задач по теории подобия и моделирования. Осборн Рейнольдс выразил закон движения жидкости по трубам одной общей формулой, названной впоследствии критерием О. Рейнольдса. Оказалось возможным объединить таким путём все численные данные опытов по гидравлическому сопротивлению, проведёнными различными исследователями на воде, воздухе, паре, различных маслах и т.д. Уильям Фруд, изучая мореходные качества судов на моделях, представил результаты опытов в виде критериального уравнения, которые можно было распространить на суда, подобные по своей геометрической конфигурации испытанным моделям. Выдающийся русский учёный Н.Е. Жуковский положил теорию подобия в основу критериальной обработки опытов над моделями самолётов, продуваемых в аэродинамической трубе, для того, чтобы результаты опытов можно было перевести на подобные моделям самолёты.

Например, если уравнение (1.2) характеризует протекание физического процесса во времени и пространстве с доступной и необходимой для данного исследования полнотой, то в этом случае критерий (1.3) достаточен для *полного подобия*. Допустим, уравнение (1.2) характеризует протекание процесса только во времени или только в пространстве, то уравнение (1.3) является *критерием неполного подобия*. Если же уравнение (1.4), прежде чем находить из него критерий подобия, упростить (отбросить какие-то заведомо влияющие факторы, допустить отклонение параметров системы и так далее), то найденные из этого уравнения критерий подобия будет *критерием приближённого подобия*.

**Вторая теорема подобия ( $\pi$ -теорема).** Если бы уравнение физического процесса можно было составить из инвариантов подобия, то это было бы общее уравнение, одинаковое для всех подобных явлений. Вторая теорема подобия устанавливает возможность такого преобразования физических уравнений и носит имя американского учёного Э. Букингема.

*Всякое уравнение физического процесса может быть представлено в виде функциональной зависимости между критериями подобия, т. е.*

$$\psi_1 = \Phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s, \dots, \pi_n) = 0, \quad (1.5)$$

где  $1, 2, \dots, s, \dots, n$  – число критериев, определяющих физический процесс.

Согласно  $\pi$ -теореме (1.5) из  $m$  параметров (физических величин), входящих в уравнение связи, можно оставить не более  $m - k = n$  критериев подобия, где  $k$  – число параметров независимой размерности.

К критериям независимой размерности или первичным относят такие, которые можно непосредственно измерить. Их называют основными единицами: масса, путь, время, температура, сила тока, сила света и количество вещества. Остальные величины, значения которых вычисляются, – вторичные, или производные: скорость, давление, мощность и т. д. Система первичных величин и основных единиц выбирается произвольно.

Третья теорема подобия завершила учение о подобии, сделав его научной основой физического эксперимента.

В 1922 г. А.А. Гухман и М.В. Кирпичёв (Ленинградский политехнический институт) издают работу «Теория подобия», в которой обобщаются исследования в этом направлении. В 1931 г. они доказали третью теорему подобия.

**Третья теорема подобия.** Эта теорема формирует условия, необходимые и достаточные для практической реализации подобия. Согласно третьей теореме подобия *подобными явлениями будут те, которые имеют одинаковые определяющие критерии и подобные условия однозначности (или краевые условия).*

Определяющими (независимыми переменными) являются такие критерии, содержащие физические величины (параметры), которые входят в условия однозначности изучаемого явления. Эти критерии характеризуют процесс в отличие от определяемых (зависимых переменных), они могут быть заранее измерены или вычислены.

Условия однозначности, или краевые условия изучаемых явлений бывают: *геометрические*, характеризующие форму и размеры тел объекта (о) и модели (м), в которых протекают процессы,  $l_o / l_m = C_l$  – константа геометрического подобия; *физические*, характеризующие физические свойства среды и окружающих тел; *граничные*, характеризующие особенности протекания процесса на границах тел; *временные*, характеризующие особенности протекания изучаемого процесса во времени.

В 1948 г. Бертран вывел критерии подобия на основании анализа уравнений механики, а в 1978 г. в докладе Парижской Академии Наук он рассмотрел подобие тепловых и электрических явлений, используя метод анализа размерностей физических величин.

Таким образом, Бертран установил два направления в изучении закономерностей подобия: метод анализа уравнений и метод анализа размерностей. Если первые две теоремы устанавливают отношения между параметрами заведомо подобных явлений, то третья теорема определяет признаки подобных явлений.

В.А. Веников (Московский энергетический институт) в 1976 г. вывел пять дополнительных положений подобия для сложных систем, состоящих из подсистем с линейными и нелинейными параметрами. В частности, для анизотропных материалов, имеющих неодинаковые свойства по различным направлениям. В.А. Вениковым рассмотрено положение о подобии физических явлений при отсутствии геометрического подобия и при вероятностном характере изучаемых явлений.

В настоящее время теория подобия и моделирования является основным методом проведения экспериментальных работ по проверке и созданию новых машин, механизмов, строительных конструкций, сооружений, решению задач оптимизации. С развитием основных положений теории автоматического управления и регулирования сложными машинами и механизмами, систем активной безопасности транспортных средств в XXI веке назрела актуальность формулировки четвертой теоремы подобия. Основы этой теоремы подобия были выведены В.Л. Заковоротным, В.В. Шаповаловым в 1976 г. в своих работах «Исследование коэффициента трения при периодических движениях», П.Н. Щербаком в 2001 г. в работе «Оптимизация фрикционных механических систем на базе модельного эксперимента».

**Четвертая теорема подобия.** *Нелинейные фрикционные механические системы подобны, если формы собственных колебаний (эпюры деформации связей), амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики будут подобны на частотах собственных и вынужденных колебаний.*

Из изложенного следует, что постановка и задача эксперимента на основе теории подобия значительно упрощается, так как в этих случаях находится функциональная связь между целыми комплексами физических величин (критериями), описывающими то или иное явление. Кроме того, в известных границах имеется возможность распространения результатов единичного опыта на подобные системы, в том числе и на геометрически уменьшенные (или увеличенные) модели.

Одним из способов проверки проектных решений при проектировании, модернизации механических систем с узлами трения на стадии проектирования, лабораторных, стендовых и макетных испытаний является разработка соответствующей физической модели и её воспроизведение на испытательном стенде с моделированием реальных условий эксплуатации.

Анализ конкретных выполненных исследователями работ по моделированию различных объектов, например, верхнего строения пути, фрикционных механических систем машин или их отдельных узлов, объектов электроэнергетики, гидравлических устройств и т. д. показал, что модельные испытания являются крайне трудной задачей и пока не существует общепринятой методики, служащей основой частных специальных методов в различных областях науки и техники.

## ***1.2 Методы определения критериев подобия***

В соответствии с приведёнными теоремами подобия критерии подобия определяются в основном двумя способами. Первый заключается в приведении уравнений физического процесса к безразмерному виду. Следовательно, чтобы его применять, нужно иметь уравнение исследуемого процесса. Второй базируется на применении  $\pi$ -теоремы. Им можно пользоваться в случаях, когда известны только параметры, участвующие в ис-

следуемом процессе, а уравнения процесса неизвестны. На практике пользуются также третьим способом относительных единиц, являющимся модификацией первых двух способов.

### 1.2.1 Способ интегральных аналогов

Способ интегральных аналогов сводится к определению *критериев подобия путём приведения уравнения к безразмерному виду*. Данный способ является более простым и точным, так как используются уравнения, описывающие физический процесс, а также условия однозначности.

Он основывается на известном свойстве физических уравнений, которое состоит в том, что все члены уравнения физического процесса имеют одинаковые размерности относительно основных единиц измерения. Наличие в уравнении физического процесса неоднородных функций не влияет на однородность уравнения в целом, поскольку по отношению к размерным членам уравнения неоднородные функции представляют собой безразмерные коэффициенты.

Очевидно, что уравнение после деления на любой из его членов приводится к безразмерному виду. Опуская в полученных безразмерных членах уравнения символы дифференцирования и интегрирования, а также исключая из записи имеющиеся неоднородные функции, можно в соответствии с первой теоремой подобия полученные таким образом выражения считать критериями подобия.

#### **Пример 1 – подобие механических систем.**

Рассмотрим случай вынужденных механических колебаний с демпфированием. Пусть груз массой  $M$  (кг) колеблется на пружине жёсткостью  $C$  (Н/м), дающей упругое сопротивление  $F_y = -C \cdot S$ , причём при его перемещении на расстояние  $S$  (м) появляется вязкое сопротивление  $F_c$ , пропорциональное скорости  $V$  (м/с) – рис. 1.1:

$$F_c = -\beta \cdot V,$$

где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности, Н·с/м.

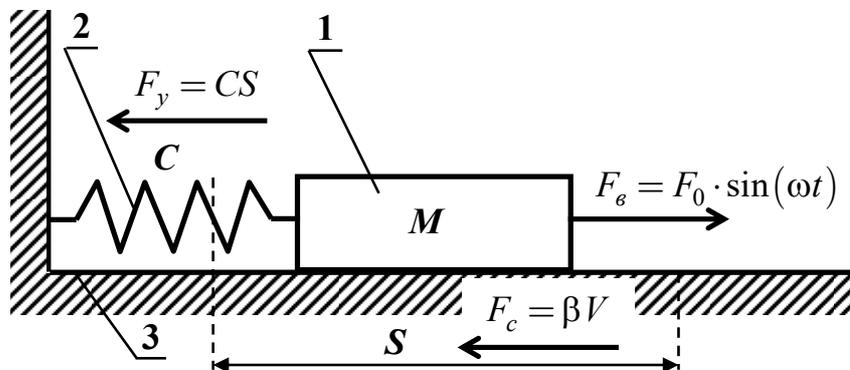


Рис. 1.1 – Схема движения механической системы: 1 – масса; 2 – пружина; 3 – опора;  $F_g$  – возмущающая сила;  $F_y$  – упругая сила;  $F_c$  – сила вязкого сопротивления

На груз действует внешнее воздействие в виде возмущающей силы (H)  $F_e = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ , где  $\omega$  – угловая частота колебаний (рад/с);  $t$  – время (с).

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$M \frac{dV}{dt} + \beta V + CS = F_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (1.6)$$

Разделим все члены уравнения (1.6) на первый член  $M \frac{dV}{dt}$  и примем

соответствие  $\frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \frac{V}{t}$ , имеем:

$$\pi_1 = \frac{\beta \cdot V \cdot t}{M \cdot V} = \frac{\beta \cdot t}{M} = 1;$$

$$\pi_2 = \frac{C \cdot S \cdot t}{M \cdot V} = \frac{C \cdot S \cdot t \cdot t}{M \cdot S} = \frac{C \cdot t^2}{M} = 1;$$

$$\pi_3 = \frac{F \cdot t}{M \cdot V} = \frac{F \cdot t^2}{M \cdot S} = Ne = 1 \text{ – критерий подобия Ньютона;}$$

$$\pi_4 = \omega \cdot t = H_0 = 1 \text{ – критерий подобия гомохронности.}$$

Критерий подобия  $H_0$  (гомохронности) характеризует изменение процесса и в данном случае имеет смысл при условии, что воспроизводится изменение силы  $F_e$  именно по синусоидальному закону с частотой  $\omega t$ . При преобразованиях мы не учитывали  $\sin \omega t$ , так как тригонометрические функции в геометрическом подобии имеют одинаковые значения углов, поэтому тождественно равны.

Согласно второй теореме подобия уравнение движения груза под действием приложенных сил представим функциональной зависимостью, составленной из критериев подобия:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

или

$$\Phi\left(\frac{\beta \cdot t}{M}; \frac{C \cdot t^2}{M}; \frac{F \cdot t^2}{M \cdot S}; \omega t\right) = 0. \quad (1.7)$$

### **Пример 2 – подобие механических систем.**

Практическое использование подобия механических систем рассмотрим на примере моделирования тяговой передачи электровоза при условии вертикальных воздействий на колесо рельсового стыка. На рис. 1.2 представлена схема рассматриваемого узла.

Используем уравнение Лагранжа в следующей форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_\phi, \end{aligned} \right\}$$

где  $T$  – кинетическая энергия;  
 $Q_y$  и  $Q_\phi$  – обобщённые силы.

$$T = \frac{M\dot{y}^2}{2} + \frac{m_{\text{я}}l^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_{\text{к}}\dot{\phi}^2}{2} + J_{\text{я}}\left(\frac{R+r}{r}\right)\frac{\dot{\phi}^2}{2};$$

$$Q_y = F_p - (C_1 - C_2)y - (C_1a - C_2b)\phi;$$

$$Q_\phi = F_p a - (C_1a - C_2b)y - (C_1a - C_2b)\phi^2,$$

где  $M$  – приведённая масса системы, кг;

- $m_{\text{я}}$  – масса якоря, кг;
- $J_{\text{к}}$  – момент инерции корпуса тягового двигателя относительно центра тяжести системы без учёта массы якоря, кг·м<sup>2</sup>;
- $J_{\text{я}}$  – момент инерции якоря относительно собственной оси, кг·м<sup>2</sup>;
- $l$  – расстояние от центра оси колёсной пары до центра оси тягового двигателя, м;
- $F_p$  – сила удара колеса о стык рельса, Н;
- $C_1, C_2$  – жёсткости пружин, Н/м;
- $a, b$  – расстояния пружин от центра тяжести системы и центра колебаний.

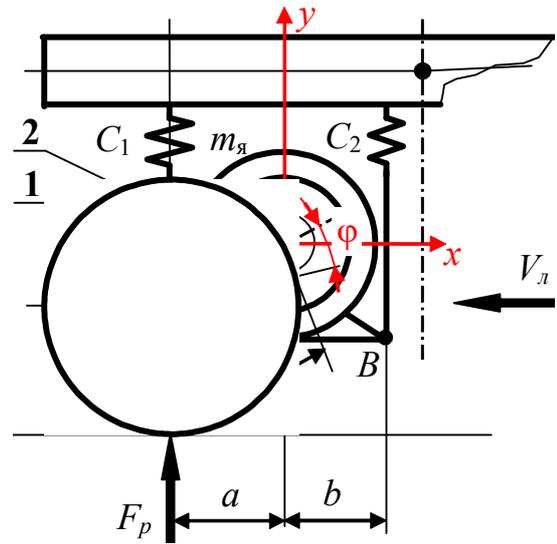


Рис. 1.2 – Схема тяговой передачи электровоза: 1 – колёсная пара; 2 – тяговый двигатель

Примем, что кузов электровоза будет оставаться неподвижным и колебательные воздействия системы на него не воздействуют.

После соответствующих выкладок эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} &= F_p - (C_1 - C_2)y - (C_1a - C_2b)\phi; \\ B_u\ddot{\phi} &= F_p a - (C_1a - C_2b)y - (C_1a^2 + C_2b^2)\phi, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где  $B_u$  – приведённый момент инерции системы, кг·м<sup>2</sup>.

Рассмотрим две подобные между собой системы: действительный узел (образец) и его выполненную в геометрическом масштабе модель (рис. 1.2), при этом примем следующие обозначения:

- $t_o$  и  $t_m$  – время перемещения системы для образца, под которым подразумевается сама тележка электровоза, и то же – для модели, с;
- $l_o$  и  $l_m$  – линейные размеры деталей системы и узлов для образца и модели, м;
- $v_o$  и  $v_m$  – линейные скорости движения любой точки системы для образца и то же для модели, м/с;

- $w_o$  и  $w_m$  – линейные ускорения для любой точки образца и модели, м/с<sup>2</sup>;
- $\varphi_o$  и  $\varphi_m$  – углы поворота системы относительно центра оси колеса, рад;
- $\omega_o$  и  $\omega_m$  – угловые скорости для любой точки образца и модели, рад/с;
- $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_m$  – угловые ускорения для любой точки образца и модели, рад/с<sup>2</sup>;
- $M_o$  и  $M_m$  – массы узлов и деталей системы для образца и модели, кг;
- $C_o$  и  $C_m$  – линейные жёсткости пружин для образца, то же для модели, Н/м.

Обозначим две подобные системы через «о» (образец) и «м» (модель). Напишем уравнение поступательного движения для первой

$$M_o \ddot{y}_o = F_{po} - (C_{1o} - C_{2o})y_o - (C_{1o}a_o - C_{2o}b_o)\varphi_o \quad (1.9)$$

и для второй системы

$$M_m \ddot{y}_m = F_{pm} - (C_{1m} - C_{2m})y_m - (C_{1m}a_m - C_{2m}b_m)\varphi_m. \quad (1.10)$$

По условию построения модели с образца рассматриваемые системы должны быть подобны, а одинаковые физические величины должны иметь постоянные множители подобного преобразования или *масштабы подобия* (первая теорема подобия):

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\frac{x_o}{x_m} = \frac{y_o}{y_m} = \frac{l_o}{l_m} = C_l$ – геометрических размеров;  | 2) $\frac{t_o}{t_m} = C_t$ – времени;   |
| 3) $\frac{\varphi_o}{\varphi_m} = C_\varphi$ – угловых координат, так как при геометрически подобных фигурах сходственные углы равны, то $C_\varphi = 1$ ; | 4) $\frac{M_o}{M_m} = C_M$ – массы;   |
| 5) $\frac{F_{po}}{F_{pm}} = C_F$ – силы;   | 6) $\frac{C_o}{C_m} = C_C$ – жёсткости;   |
| 7) $\frac{v_o}{v_m} = C_v$ – линейной скорости;  | 8) $\frac{w_o}{w_m} = C_w$ – линейного ускорения;                               |
| 9) $\frac{\omega_o}{\omega_m} = C_\omega$ – угловой скорости;  | 10) $\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_m} = C_\varepsilon$ – углового ускорения. |

Для того, чтобы уравнение (1.9) было равно (1.10), необходимо переменные первой системы выразить через переменные второй системы, используя для этого преобразования постоянные множители подобного преобразования или масштабы подобия, а также учитывая соотношения

линейного ускорения  $w = \frac{v}{t}$  и времени  $t = \frac{l}{v}$ . Подставив второе соотношение в первое, получим выражение для определения линейного ускорения  $w = \frac{v^2}{l}$  или в масштабах подобия  $C_w = \frac{C_v^2}{C_l}$ .

Подставляя масштабы подобия в (1.10), получаем уравнение, соответствующее (1.9):

$$C_M M_m \frac{C_v^2}{C_l} \ddot{y}_m = C_F F_{pm} - (C_C C_{1m} - C_C C_{2m}) C_l y_m - \\ - (C_C C_{1m} C_l a_m - C_C C_{2m} C_l b_m) C_\varphi \varphi_m$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left[ C_M \frac{C_v^2}{C_l} \right] \cdot M_m \ddot{y}_m = [C_F] \cdot F_{pm} - [C_C C_l] \cdot (C_{1m} - C_{2m}) y_m - \\ - [C_C C_l C_\varphi] \cdot (C_{1m} a_m - C_{2m} b_m) \varphi_m \quad (1.11)$$

Как можно видеть, уравнение (1.11) отличается от уравнения (1.10) тем, что перед каждой переменной величиной имеются комплексы, составленные из масштабов подобия. Отсюда можно сделать вывод, что переменные обеих систем могут быть определены одинаковым образом только при условии тождественности уравнений (1.10) и (1.11), а это возможно только тогда, когда комплексы, составленные из масштабов подобия в уравнении системы (1.11) сократятся.

Введя в рассмотрение соотношение масштабов подобия  $C_v = C_l/C_t$ , на основании указанного выше требования получим

$$C_M C_v^2 / C_l = C_F = C_C C_l = C_M C_l / C_t^2 = C_C C_l C_\varphi.$$

Рассматриваем члены этого соотношения попарно:

$$\frac{C_M C_v^2}{C_l} = C_F \quad \text{или} \quad \frac{C_M C_v^2}{C_l} \cdot \frac{1}{C_F} = \frac{C_M C_v^2}{C_F C_l} = 1;$$

$$\frac{C_M C_v^2}{C_l} = C_C C_l \quad \text{или} \quad \frac{C_M C_v^2}{C_l} \cdot \frac{1}{C_C C_l} = \frac{C_M C_v^2}{C_C C_l^2} = 1;$$

$$\frac{C_M C_l}{C_t^2} = C_F \quad \text{или} \quad \frac{C_M C_l}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_F} = \frac{C_M C_l}{C_F C_t^2} = 1;$$

$$\frac{C_M C_v^2}{C_l} = C_C C_l C_\varphi \quad \text{или} \quad \frac{C_M C_v^2}{C_l} \cdot \frac{1}{C_C C_l C_\varphi} = \frac{C_M C_v^2}{C_C C_l^2 C_\varphi} = 1.$$

Комплексы величин в уравнениях являются безразмерными критериями подобия

$$\frac{Mv^2}{Fl} = idem; \quad \frac{Mv^2}{Cl^2} = idem; \quad \frac{Ml}{Ft^2} = idem; \quad \frac{Mv^2}{Cl^2 \varphi} = idem. \quad (1.12)$$

Следовательно, согласно первой теореме подобия критерии имеют одни и те же значения (*idem*). Проверяем их размерность:

$$\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}} = 1; \quad \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}^2} = 1; \quad \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2} = 1.$$

Размерность нулевая. Напишем уравнение углового движения (1.8) для первой системы (образца) и второй (модели):

$$\begin{aligned} B_{uo} \ddot{\varphi}_o &= F_{po} a_o - (C_{1o} a_o - C_{2o} b_o) y_o - (C_{1o} a_o^2 + C_{2o} b_o^2) \varphi_o, \\ B_{um} \ddot{\varphi}_m &= F_{pm} a_m - (C_{1m} a_m - C_{2m} b_m) y_m - (C_{1m} a_m^2 + C_{2m} b_m^2) \varphi_m. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Подставляя масштабы подобия в уравнение (1.13), учитываем, что приведённый момент инерции системы  $B_u = Ml^2$ , угловое ускорение  $\varepsilon = \omega/t$ , а время  $t = \varphi/\omega$ , то угловой инерционный момент будет  $B_u \varepsilon = Ml^2 \frac{\omega^2}{\varphi}$  или в

масштабах подобия  $\frac{C_M C_l^2 C_\omega^2}{C_\varphi}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left[ \frac{C_M C_l^2 C_\omega^2}{C_\varphi} \right] \cdot B_{um} \ddot{\varphi}_m &= [C_F C_l] \cdot F_{pm} a_m - [C_C C_l^2] \cdot (C_{1m} a_m - C_{2m} b_m) y_m - \\ &- [C_C C_l^2 C_\varphi] \cdot (C_{1m} a_m^2 + C_{2m} b_m^2) \varphi_m. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Исключаем из уравнения (1.14) комплексы величин, в которые входят масштабы подобия, и попарно приравниваем их друг к другу:

$$C_M C_l^2 C_\omega^2 / C_\varphi = C_F C_l = C_C C_l^2 = C_C C_l^2 C_\varphi.$$

Рассматривая члены этого соотношения попарно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{C_M C_l^2 C_\omega^2}{C_\varphi} = C_F C_l \quad \text{или} \quad \frac{C_M C_l^2 C_\omega^2}{C_\varphi} \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_M C_l C_\omega^2}{C_F C_\varphi} = 1; \\ C_C C_l^2 = C_F C_l \quad \text{или} \quad C_C C_l^2 \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_C C_l}{C_F} = 1. \end{aligned}$$

Комплексы величин в уравнениях являются безразмерными критериями подобия

$$\frac{Ml\omega^2}{F\varphi} = idem; \quad \frac{Cl}{F} = idem.$$

Следовательно, согласно первой теореме подобия критерии имеют одни и те же значения (*idem*). Проверяем их размерность:

$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{рад}} = 1; \quad \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = 1.$$

Размерность нулевая.

Согласно второй теореме подобия интеграл дифференциальных уравнений (1.8), описывающих линейные и угловые колебания системы, можно представить как функцию от критериев подобия:

$$\Phi \left( \frac{C_M C_v^2}{C_F C_l}; \frac{C_M C_v^2}{C_C C_l^2}; \frac{C_M C_v^2}{C_C C_l^2 C_\phi}; \frac{C_M C_l}{C_F C_t^2}; \frac{C_M C_l C_\omega^2}{C_F C_\phi}; \frac{C_C C_l}{C_F}; C_\phi \right) = 0. \quad (1.15)$$

Если физические процессы подобны друг другу, то одноимённые критерии этих процессов имеют одинаковую величину, и они могут быть приведены к безразмерному виду (первая теорема подобия). Если в соответствии с третьей теоремой подобия принять равенство друг другу масштабов подобия масс, жёсткости и силы  $C_M = C_C = C_F$ , то пересчётные коэффициенты определяются из (1.15) следующим образом:

$$\frac{C_M C_l}{C_F C_t^2} = \frac{C_C C_l}{C_F} = 1 \Rightarrow \frac{C_M C_l}{C_F C_t^2} \cdot \frac{C_F}{C_C C_l} = \frac{C_M}{C_C C_t^2} = 1 \Rightarrow C_t = 1, \quad (a)$$

$$\frac{C_C C_l}{C_F} = 1 \Rightarrow \frac{C_C}{C_F} = \frac{1}{C_l} = 1 \Rightarrow C_l = 1, \quad (б)$$

$$\frac{C_M C_v^2}{C_F C_l} = \frac{C_M C_l}{C_F C_t^2} = 1 \Rightarrow \frac{C_M C_v^2}{C_F C_l} \cdot \frac{C_F C_t^2}{C_M C_l} = \frac{C_v^2 C_t^2}{C_l^2} = 1 \Rightarrow C_v = 1, \quad (в)$$

$$\frac{C_M C_l C_\omega^2}{C_F C_\phi} = \frac{C_M C_l}{C_F C_t^2} = 1 \Rightarrow \frac{C_M C_l C_\omega^2}{C_F C_\phi} \cdot \frac{C_F C_t^2}{C_M C_l} = \frac{C_\omega^2 C_t^2}{C_\phi} = 1 \Rightarrow C_\omega = 1, \quad (г)$$

Таким образом, из полученного условия (а) следует, что модельные испытания необходимо проводить в реальном масштабе времени  $C_t = 1$ ; это обеспечивает равенство масштаба периода собственных колебаний  $C_T = 1$ , и, следовательно, частот собственных колебаний масс механической системы. Из полученного условия (б) следует, что при модельных исследованиях масштаб подобия амплитуды упругой деформации должен быть равен единице, то есть  $C_l = 1$ . Здесь данный результат не следует путать с геометрическим масштабом  $C_l \neq 1$ . Следствием условия (в) является равенство масштаба подобия скорости скольжения  $C_v = 1$ , что характеризует равенство в модели и объекта пути трения скольжения в единицу времени. Из условия (г) следует равенство масштаба подобия угловой скорости  $C_\omega = 1$ ; это следует также из соотношения масштабов подобия угловых координат и времени, то есть  $C_\omega = C_\phi / C_t = 1/1 = 1$ .

**Пример 3 – подобие гидродинамических процессов стационарно-го движения вязкой жидкости.** Для несжимаемой вязкой жидкости уравнения движения в векторной форме имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (\overline{v_{cm}}, \text{grad}) \overline{v_{cm}} &= \frac{1}{\rho} \text{grad } P_{cm} \eta_{cm} \nabla^2 \overline{v_{cm}}; \\ \text{div } \overline{v_{cm}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

где  $\overline{v_{cm}}$  – вектор скорости;

$\rho_{cm}$  – плотность;

$P_{cm}$  – давление в смазочном слое;

$\eta_{cm}$  – кинематическая вязкость смазочного материала;

$\nabla$  – дифференциальный оператор Лапласа.

Найдём связь между исследуемыми параметрами в критериальной форме. Сокращая выкладки, напишем уравнения (1.16) только в проекциях на ось  $x$  (для проекции на оси  $y$  и  $z$  выводы аналогичны):

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial P_{cm}}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Рассмотрим две подобные между собой системы:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \frac{dv'_x}{dt} + \rho' \left( v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) &= \rho' g'_x - \frac{\partial P'_{cm}}{\partial x'} + \eta' \left( \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right); \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho'' \frac{dv''_x}{dt} + \rho'' \left( v''_x \frac{\partial v''_x}{\partial x''} + v''_y \frac{\partial v''_x}{\partial y''} + v''_z \frac{\partial v''_x}{\partial z''} \right) &= \rho'' g''_x - \frac{\partial P''_{cm}}{\partial x''} + \eta'' \left( \frac{\partial^2 v''_x}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 v''_x}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 v''_x}{\partial z''^2} \right); \\ \frac{\partial v''_x}{\partial x''} + \frac{\partial v''_y}{\partial y''} + \frac{\partial v''_z}{\partial z''} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Так как рассматриваемые процессы подобны, то из определения условий подобия следует равенство отношений двух физических величин масштабам подобия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{l''}{l'} = C_l; \quad \frac{t''}{t'} = C_t; \quad \frac{v''}{v'} = C_v; \quad \frac{\rho''}{\rho'} = C_\rho; \\ \frac{g''}{g'} = C_g; \quad \frac{\eta''_{cm}}{\eta'_{cm}} = C_\eta; \quad \frac{P''_{cm}}{P'_{cm}} = C_P. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Масштабы геометрического (кинематического, динамического) подобия связывают только два явления. Если существует масштаб подобия, то эти явления подобны в смысле этого физического параметра. Справедливо и обратное, если два явления подобны, то существует и масштаб подобия.

На основании уравнений (1.20) все переменные (1.19) могут быть выражены через переменные системы (1.18), а именно:

$$\begin{aligned} x'' = C_l x'; \quad y'' = C_l y'; \quad z'' = C_l z'; \quad t'' = C_t t'; \quad v'' = C_v v'; \quad \rho'' = C_\rho \rho'; \\ g'' = C_g g'; \quad \eta''_{cm} = C_\eta \eta'_{cm}; \quad P''_{cm} = C_P P'_{cm}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

Подставляя значения уравнений (1.21) в (1.18), получим

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{C_\rho C_v}{C_t} \right) \cdot \rho' \frac{dv'_x}{dt} + \left( \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} \right) \cdot \rho' \left( v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) = \\ & = (C_\rho C_g) \cdot \rho' g'_x - \left( \frac{C_P}{C_l} \right) \cdot \frac{\partial P'_{cm}}{\partial x'} + \left( \frac{C_\eta C_v}{C_l^2} \right) \cdot \eta' \left( \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right); \\ & \left( \frac{C_v}{C_l} \right) \cdot \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Из систем (1.17) и (1.18) переменные (1.19) должны определяться одинаковым образом. Последнее возможно только при условии тождественности уравнений. Для этого необходимо, чтобы комплексы, составленные из констант подобия в уравнениях системы (1.22), сократились. На основании данного требования получим ряд ограничительных условий:

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = C_\rho C_g = \frac{C_P}{C_l} = \frac{C_\eta C_v}{C_l^2}.$$

Рассматривая члены этого соотношения попарно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{C_\rho C_v}{C_t} = \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} \quad \text{или} \quad \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} \cdot \frac{C_t}{C_\rho C_v} = \frac{C_v C_t}{C_l} = 1; \\ \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = C_\rho C_g \quad \text{или} \quad C_\rho C_g \cdot \frac{C_l}{C_\rho C_v^2} = \frac{C_g C_l}{C_v^2} = 1; \\ \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = \frac{C_P}{C_l} \quad \text{или} \quad \frac{C_P}{C_l} \cdot \frac{C_l}{C_\rho C_v^2} = \frac{C_P}{C_\rho C_v^2} = 1; \\ \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} = \frac{C_\eta C_v}{C_l^2} \quad \text{или} \quad \frac{C_\rho C_v^2}{C_l} \cdot \frac{C_l^2}{C_\eta C_v} = \frac{C_\rho C_v C_l}{C_\eta} = 1. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Условия (1.23) можно представить в виде симплексов или критериев подобия – безразмерных комбинаций физических величин, характеризующих явление или процесс. Критерий подобия связывает всё множество подобных явлений. Критерии подобия обозначаются начальными буквами имён учёных, которые внесли большой вклад в развитие данной области знаний.

Для этого вместо констант подобия надо поставить их значения из уравнения (1.20) и все величины сгруппировать по индексам. Произведя преобразования, получим

$$\frac{v't'}{l'} = \frac{v''t''}{l''} \quad \text{или} \quad \frac{vt}{l} = \mathbf{H}_0 = idem ; \quad (1.24)$$

$$\frac{g'l'}{v'^2} = \frac{g''l''}{v''^2} \quad \text{или} \quad \frac{gl}{v^2} = \mathbf{Fr} = idem ; \quad (1.25)$$

$$\frac{P'_{cm}}{\rho'_{cm}v'^2} = \frac{P''_{cm}}{\rho''_{cm}v''^2} \quad \text{или} \quad \frac{P_{cm}}{\rho_{cm}v^2} = \mathbf{Eu} = idem ; \quad (1.26)$$

$$\frac{\rho'_{cm}v'l'}{\eta'_{cm}} = \frac{\rho''_{cm}v''l''}{\eta''_{cm}} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_{cm}vl}{\eta_{cm}} = \mathbf{Re} = idem . \quad (1.27)$$

Получили стандартные, многократно апробированные на практике критерии подобия: гомотронности (1.24), Фруда (1.25), Эйлера (1.26), Рейнольдса (1.27). Согласно первой теореме подобия при гидромеханическом подобии двух или нескольких систем для любых сходственных точек критерии  $H_0, Fr, Eu, Re$  имеют одни и те же значения (*idem*).

Критерий гидродинамической гомотронности (1.24) характеризует течение гидравлической среды во времени.

Критерий Фруда (1.25) – мера для отношения сил инерции и тяжести в однородном потоке.

Критерий Эйлера (1.26) или критерий подобия полей давления – мера отношения сил давления и инерции в потоке. Для несжимаемой жидкости он зависит не от абсолютных значений давления, а только от перепада  $\Delta P_{cm}$ , в этом случае критерий Эйлера принимает вид  $Eu = \Delta P_{cm} / \rho_{cm}v^2$ .

Критерий Рейнольдса (1.27) характеризует гидродинамический режим потока жидкости и является мерой отношения сил инерции движущегося текучего вещества и к сумме сил внутреннего и внешнего трения.

#### **Пример 4 - моделирование течения смазочного материала в зазоре подшипника скольжения.**

Рассмотрим схему движения смазочного материала в зазоре подшипника скольжения, представленную на рис. 1.3, при граничной смазке.

Граничная смазка осуществляется при условии, когда при контактировании двух шероховатых тел и наличии на их трущихся поверхностях слоя смазочного материала осуществляется движение этих слоёв в виде тонких плёнок и масляных гидродинамических клиньев (рис. 1.4).

Согласно третьей теореме подобия сформулируем условия однозначности изучаемого процесса.

1. Физические:

- $v_{см}$  – средняя скорость истечения жидкого смазочного материала из зазора подшипника;
- $\rho_{см}$  – плотность смазочного материала;
- $\Delta P_{см}$  – изменение давления в смазочном слое, причём для стационарного процесса имеем равенство его градиента

$$\frac{\partial P_{см}}{\partial t} = 0;$$

- $\varphi_0$  – половина угла контакта между подшипником и валом,  $\varphi_0 = \text{const}$

$$\varphi_0 = \frac{P_e}{\varepsilon \cdot E_{np}},$$

где  $P_e$  – нагрузка, приходящаяся на единицу длины подшипника, Н/м

$$P_e = P/b,$$

$P$  – полная нагрузка на подшипник, Н;

$b$  – длина подшипника, м;

$\varepsilon$  – радиальный зазор между подшипником и валом

$$\varepsilon = \frac{d_1 - d_2}{2};$$

$E_{np}$  – приведённый модуль упругости контактирующих тел;

$d_1$  – внутренний диаметр подшипника;

$d_2$  – диаметр вала;

2. Граничные:

- $v_{см}$  – средняя скорость истечения жидкого смазочного материала из зазора подшипника при  $\Delta P_{см} = \text{const}$ ;  $\partial P_{см} / \partial z = 0$

$$v_{см} = \frac{\theta_{см}}{2\pi d_2 \delta_{см}} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \text{const},$$

где  $\theta_{см}$  – средний секундный расход смазочного материала при истечении из зазора;

$\delta_{см}$  – диаметральный зазор,  $\delta_{см} = 2\varepsilon$ ;

$z$  – координата  $z$  направлена вдоль оси вала.

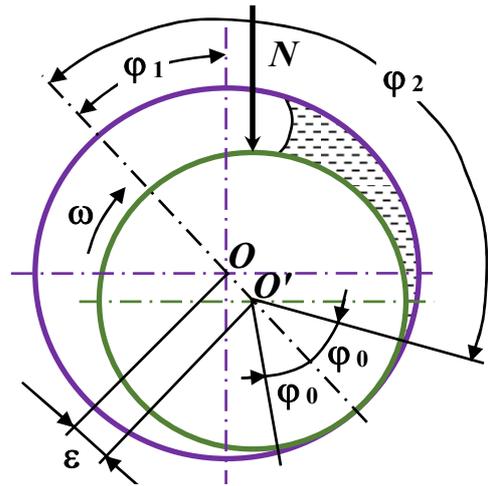


Рис. 1.3 – Схема движения смазочного материала в зазоре подшипника скольжения

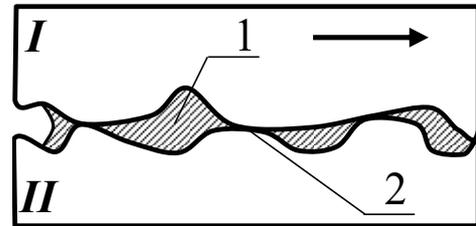


Рис. 1.4 – Схема образования режима граничного трения:

1 – масляные клинья;

2 – масляные плёнки;

I и II – контактирующие тела

### 3. Геометрические:

- $\varepsilon$  – радиальный зазор между подшипником и валом;
- $d_2$  – диаметр вала.

На основании второй теоремы подобия для случая течения смазочного материала через торцы подшипника запишем функциональную зависимость между критериями подобия

$$Eu = \Phi \left( H_0, Fr, Re, \frac{P_e}{\varepsilon \cdot E_{np}}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{\delta}{d_2}, \dots \right). \quad (1.28)$$

Для рассматриваемого случая, когда процесс стационарный, толщина слоя жидкости смазочного материала мала и течение ламинарное, критериями Фруда  $Fr$  (1.25) и гомохронности  $H_0$  (1.24) можно пренебречь. Тогда уравнение (1.28) примет вид

$$\frac{\Delta P_{см}}{\rho_{см} v_{см}^2} = \Phi \left( \frac{\rho_{см} v_{см} d_2}{\eta_{см}}, \frac{P_e}{\varepsilon \cdot E_{np}}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{\delta}{d_2}, \dots \right). \quad (1.29)$$

Функциональная связь, представленная уравнением подобия (1.29), связывает скорость течения смазочного материала в зазоре с режимами трения и геометрическими характеристиками подшипника скольжения. Она может быть найдена экспериментально.

Критерии подобия при рациональной организации эксперимента дают возможность сжать (свернуть) полученную в опытах информацию. Так, в уравнении (1.29) мы имеем 11 факторов (физических величин). Используя критериальные зависимости, можно получить уравнения с шестью параметрами.

Из приведённых выше материалов, можно сделать важные для исследователя *выводы*.

- 1) Для обеспечения динамического подобия не требуется, чтобы все величины, определяющие характер процесса в натурном объекте, были численно равны аналогичным величинам в модели. Достаточным является равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для природы и модели, называемых критериями (инвариантами, числами) подобия.
- 2) Критерии подобия могут быть получены для любого процесса, если известны уравнения, описывающие этот процесс.
- 3) Критерии подобия безразмерны, их значения для разных точек системы могут быть различными, но для сходственных точек подобных систем они одинаковые и не зависят от относительных размеров природы и модели.
- 4) Критерии подобия имеют физический смысл, являясь мерами соотношения между какими-то двумя эффектами, силами и тому подобное, оказывающими влияние на протекание данного процесса.

5) Можно ответить на вопрос о том, какие величины следует измерять в опытах и как переносить результаты на натуральный объект. Так как при проведении опытов необходимо обеспечить равенство чисел подобия природы и модели, то ясно, что измерению подлежат лишь те величины, которые входят в эти числа. По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели и, исходя из равенства их числам подобия природы, произвести пересчёт.

Таким образом, результаты небольшого числа экспериментов можно обобщить на целую группу явлений и получить решение или интеграл дифференциального уравнения в виде критериального уравнения, что соответствует второй теореме подобия: решение системы дифференциальных уравнений может быть представлено в виде функции между критериями подобия этой системы. Это позволяет не интегрировать систему дифференциальных уравнений, а получить её интеграл в виде критериального уравнения из опыта.

### *1.2.2 Размерность и системы единиц*

Теорию подобия можно применять лишь тогда, когда, кроме дифференциальных уравнений процесса, сформулированы условия однозначности. Это позволяет получить критерии подобия, выделить из них определяющие и определяемые, установить критериальную связь между ними, выразив её в виде общей функциональной зависимости.

В практике встречаются, однако, такие случаи, когда из-за сложности явления невозможно не только решить, но и составить уравнение процесса. Между тем экспериментальное изучение явления даёт фактический материал, обработка которого позволяет установить определённую форму зависимости между переменными величинами, обуславливающими процесс. Эта задача решается приёмом, основанным на применении  $\pi$ -теоремы и *методе анализа размерностей* этих величин.

Анализ размерностей можно применять, когда известно, какие именно величины существенны в данном случае и в какой системе единиц измерения они выражены. По данному методу исследователю необходимо вначале корректно выбрать модель объекта исследования, в которой выделить существенные, значимые и незначимые физические величины, а также выходной параметр оптимизации, от которых зависит изучаемое явление. Этому вопросу будет посвящена следующая глава, в которой будет приведена методика анализа и ранжирования физических величин и параметров оптимизации. А пока мы разберём основные положения метода подобия и размерности, в частности размерность и системы единиц.

Во-первых, до сих пор мы ничего не говорили о *размерности физических величин*. В задачах, которые мы рассматривали, этого было достаточно. Понятие размерности возникает в связи с построением систем единиц. В принципе можно было бы (так и поступали раньше) для каждой физической величины установить свою единицу измерения, никак не связан-

ную с единицами других величин. Но тогда в уравнения, выражающие физические законы, вошло бы множество числовых коэффициентов. Их значения не укладывались бы ни в какую простую и легко запоминаемую схему, а определялись бы случайным выбором единиц. Такое множество числовых коэффициентов весьма сильно усложняло бы формулы. Во избежание этого в физике и механике уже давно отказались от независимого выбора единиц для всех физических величин, а стали применять системы единиц, построенные по определённому принципу.

Во-вторых, некоторые физические величины условно принимаются за *основные* или *первичные*, то есть такие, для которых единицы измерения устанавливаются произвольно и независимо. В так называемой Международной системе единиц (сокращённо СИ) за основные приняты 7 величин:

- длина тела  $L$  размерности  $\underline{1\text{ м}}$ <sup>1</sup>;
- масса тела  $M$ , имеющая независимую единицу измерения  $\underline{1\text{ кг}}$ <sup>2</sup>;
- время протекания физического процесса или явления  $T$  размерности  $\underline{1\text{ с}}$ <sup>3</sup>;
- температура тела  $\Theta$  размерности  $\underline{1\text{ К}}$ <sup>4</sup>;
- сила тока  $I$  размерностью  $\underline{1\text{ А}}$ <sup>5</sup>;
- сила света  $J$  размерностью  $\underline{1\text{ Кд}}$ <sup>6</sup>;
- количество вещества  $N$  размерностью  $\underline{1\text{ моль}}$ <sup>7</sup>.

Величины, не являющиеся основными, называются *производными* или *вторичными*. Для них единицы устанавливаются из требования, чтобы числовые коэффициенты, входящие в физические законы или формулы,

---

<sup>1</sup> Метр равен расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за  $1/299792458$  долей секунды или расстояние между осями штрихов, нанесённых на платино-иридиевой линейке при  $0\text{ }^\circ\text{C}$ .

<sup>2</sup> Килограмм – это масса платино-иридиевой гири.

<sup>3</sup> Секунда равна  $9192631770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, или  $1/86400$  часть средних солнечных суток.

<sup>4</sup> Кельвин равен  $1/273,15$  части термодинамической температуры тройной точки воды.

<sup>5</sup> Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии  $1\text{ м}$  один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной  $1\text{ м}$  силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}\text{ Н}$ .

<sup>6</sup> Канделла равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}\text{ Гц}$ , сила излучения которого в этом направлении составляет  $1/683\text{ Вт/ср}$  (табл. 1.3).

<sup>7</sup> Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой  $0,012\text{ кг}$ .

служащие определением рассматриваемых величин, принимали определённые, заранее выбранные значения.

Например, скорость  $v$  равномерно движущейся материальной точки пропорциональна пройденному пути  $s$  и обратно пропорциональна времени  $t$ , затраченному на прохождение этого пути. При независимом выборе единиц для  $s$ ,  $t$  и  $v$  имеем следующее математическое представление этого физического процесса:

$$v = Cs/t,$$

где  $C$  – числовой коэффициент, значение которого определяется выбором единиц длины, времени и скорости.

Если фиксировать значение этого коэффициента, то единицы для  $s$ ,  $t$  и  $v$  перестанут быть независимыми. Для простоты полагают  $C = 1$  и записывают  $v = s/t$ . Если за основные величины принять путь  $s$  и время  $t$ , то скорость  $v$  становится величиной производной. За единицу скорости мы обязаны принять скорость такого равномерного движения, когда тело проходит единицу длины за единицу времени. Символически это записывается так:  $[v] = [LT^{-1}]$ .

В произвольных единицах второй закон И. Ньютона пишется в виде

$$F = Cma.$$

Фиксируя числовой коэффициент  $C$ , мы делаем силу  $F$  величиной производной и устанавливаем для неё единицу. Например, при  $C = 1$  получаем формулу  $F = ma$ , которая обязывает нас за единицу силы принять такую силу, которая массе в одну единицу сообщает ускорение, равное единице. После этого сила получает размерность массы, умноженной на ускорение:  $[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$ .

В-третьих, размерность физической величины ещё не определяет, как велика её единица. Она только устанавливает связь между единицами различных величин. *Размерность даёт правило, позволяющее определить, как меняется единица производной физической величины при изменении масштабов основных величин.* Это правило, выраженное в виде математической формулы, называется *формулой размерности*.

Например, за единицу длины принят километр, а за единицу времени – минута. Единицей ускорения в такой системе единиц будет км/мин<sup>2</sup>. Как изменится единица ускорения, если за единицу длины принять 1 см, а за единицу времени – 1 с. Формула размерности позволяет быстро ответить на этот вопрос. Запишем прежде всего  $1 \text{ км} = 10^5 \text{ см}$ ,  $1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$  и далее

$$1 \text{ км/мин}^2 = \frac{10^5 \text{ см}}{60^2 \text{ с}^2} = \frac{250}{9} \text{ см/с}^2.$$

Отсюда видно, что единица ускорения  $1 \text{ км/мин}^2$  крупнее единицы  $1 \text{ см/с}^2$  в  $250/9$  раз. В соответствии с этим числовое значение ускорения, измеренное в  $\text{км/мин}^2$ , окажется меньше числового значения того же ускорения в  $250/9$  раз, если его измерить в  $\text{см/с}^2$ .

### 1.2.3 Формула размерности

1) Термин «система единиц» употребляется в двух смыслах. В широком смысле система единиц характеризуется выбором основных величин и формулами, определяющими производные величины через основные, причём *масштабы основных величин не фиксируются*. Примером может служить система  $LMT$ , в которой основными величинами являются длина  $L$ , масса  $M$  и время  $T$ . Другим примером является электротехническая система  $LMTI$ , в которой за основные величины принимаются длина, масса, время и сила электрического тока  $I$ . Система единиц в узком смысле дополнительно характеризуется также *определённым выбором масштабов основных единиц*. Примерами могут быть системы  $СГС$  и  $МКСА$ . Первая есть частный случай системы  $LMT$ , когда за единицы длины, массы и времени приняты сантиметр, грамм и секунда, а также включает специальные наименования:

- для единицы силы – дина ( $1 \text{ дин} = 1 \text{ г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$ );
- для единицы энергии – эрг ( $1 \text{ эрг} = 1 \text{ г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2 = 1 \text{ дин}\cdot\text{см}$ ).

Вторая является частным случаем электротехнической системы  $LMTI$ , в которой за основные величины принимаются длина ( $1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$ ), масса ( $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$ ), время и сила электрического тока. В этой системе сила ( $1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$ ) и работа ( $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$ ).

Международная система единиц (СИ) ГОСТ 8.157-75 устанавливает применение одной системы единиц  $МКСГ$  с четырьмя основными единицами: метр, килограмм, секунда и градус Кельвина. Кроме Кельвина, разрешалось применять градус Цельсия.

Понятие размерности возникает в связи с требованием, чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались *одними и теми же* формулами, независимо от того, как велики единицы основных физических величин. Этим требованием определяется общий вид «формулы размерности» физических величин.

Например, имеется несколько физических величин, связанных между собой. Для простоты ограничимся случаем двух величин, одна из которых принимается за основную, а другая – за производную. Числовые значения их  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $y = f(x)$ . Определим общий вид функции  $f(x)$ . Если единицу основной величины  $x$  уменьшить в  $\alpha$  раз, то числовое значение этой величины увеличивается в такое число раз и делается равным  $X = \alpha x$ . При этом единица производной величины  $y$  уменьшится, а её числовое значение увеличится в  $\beta$  раз и станет равным  $Y = \beta y$ . Потребуем, чтобы числовые значения  $X$  и  $Y$  были связаны тем же уравнением, что и числа  $x$  и  $y$ , то есть  $Y = f(X)$  или  $\beta y = f(\alpha x)$ . Этому условию можно удовлетворить при любых значениях  $\alpha$ , если надлежащим образом подобрать  $\beta$ . Задача сводится к нахождению  $\beta$  как функции аргумента  $\alpha$ . На этот вопрос и отвечает «формула размерности».

Прежде чем его решать, изменим постановку вопроса. Пусть две физические величины связаны соотношением  $y = f(x)$ . Будем менять сами физические величины, оставляя их единицы неизменными. Допустим, что величины  $x$  и  $y$  увеличились в  $\alpha$  и  $\beta$  раз и сделались равными  $X = \alpha x$  и  $Y = \beta y$ . Спрашивается, какому условию должны удовлетворять числа  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы связь между новыми значениями физических величин  $X$  и  $Y$  была та же, что и между старыми значениями  $x$  и  $y$ , то есть  $Y = f(X)$ . На этот вопрос отвечает *теория подобия*. Вопрос опять сводится к исследованию уравнения  $\beta y = f(\alpha x)$ . Мы видим, что теории размерности и подобия отличаются друг от друга только формой постановки вопроса. По существу, они не отличаются одна от другой. Теория подобия позволяет исследовать количественные соотношения между различными параметрами реальных физических систем на их уменьшенных или увеличенных моделях. Так поступают, например, в авиационной технике, помещая в аэродинамические трубы уменьшенные копии реальных летательных аппаратов. Изучив поведение моделей реальных систем, можно с помощью теории подобия или размерности сделать выводы о поведении самих систем в реальных условиях эксплуатации. Теория размерности сводит вопрос о подобии физических явлений в указанном выше смысле к *анализу размерностей* физических величин.

2) После этих предварительных замечаний установим общий вид формулы размерности. Как разъяснено выше, мы должны требовать, чтобы из уравнения  $y = f(x)$  вытекало уравнение  $Y = f(X)$ , где  $X = \alpha x$ ,  $Y = \beta y$ . Аргумент  $x$  и параметр  $\alpha$  могут независимо принимать любые значения. Задача состоит в том, чтобы по заданному значению  $\alpha$  найти значение  $\beta$ . Путём дифференцирования при фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$  находим

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dY}{dX} = f'(X).$$

Вторую из этих формул запишем в виде

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{dy}{dx} = f'(X).$$

Поделив её почленно на первую формулу и заменив  $\alpha$  и  $\beta$  выражениями  $\alpha = \frac{X}{x}$ ,  $\beta = \frac{Y}{y} = \frac{f(X)}{f(x)}$ , получим

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = X \frac{f'(X)}{f(X)}.$$

Слева стоит функция только  $x$ , справа – та же функция только  $X$ . Обозначив её через  $F$ , имеем  $F(x) = F(X)$ . Но в силу произвольности параметра  $\alpha$  аргументы  $x$  и  $X = \alpha x$  могут независимо принимать любые значения. Поэтому равенство  $F(x) = F(X)$  должно выполняться тождественно, каковы бы ни были  $x$  и  $X$ . Это значит, что  $F(x)$  есть постоянная. Обозначив эту постоянную через  $m$ , получим дифференциальное уравнение

$$x \frac{f'(x)}{f(x)} = m, \text{ или } \frac{df(x)}{f(x)} = m \frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим

$$f(x) = f_0 x^m,$$

где  $f_0$  – постоянная интегрирования.

Таким образом,  $y = f_0 x^m$ . Аналогично  $Y = f_0 X^m$  или  $\beta y = f_0 (\alpha x)^m$ . Исключая почленным делением  $x$  и  $y$ , находим

$$\beta = \alpha^m$$

Это и есть *формула размерности*. Мы видим, что требование независимости функциональной связи между  $x$  и  $y$  от выбора масштаба единицы основной физической величины  $x$  может быть удовлетворено только тогда, когда размерность выражается формулой *степенного вида*.

Приведённые рассуждения без труда обобщаются на случай, когда рассматриваемая физическая величина зависит от нескольких основных физических величин. Для этого в рассуждениях надо только фиксировать единицы всех основных физических величин, за исключением одной из них. Нетрудно показать, что формула размерности должна быть *степенного вида относительно всех основных физических величин*. Например, число основных величин выбрано трём, и за них приняты длина  $L$ , масса  $M$  и время  $T$ . Тогда размерность любой физической величины  $y$  представится формулой

$$[y] = L^p M^q T^r, \quad (1.30)$$

где  $p, q, r$  – постоянные числа в выбранной системе единиц.

Формула (1.30) означает, что если единицы длины, массы и времени уменьшить соответственно в  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  раз, то единица производной величины  $y$  уменьшится в  $\alpha^p \beta^q \gamma^r$  раз, а следовательно, её числовое значение увеличится в такое же число раз.

**3)** Если посмотреть на размерности физических величин, фактически встречающихся в физике и механике, то нетрудно заметить, что во всех случаях числа  $p, q, r$  оказываются рациональными. Это не обязательно с точки зрения теории размерности, а является результатом соответствующих определений физических величин. Например, скорость вводится по формуле  $v = s / t$  и поэтому имеет размерность длины, делённой на время. Для неё  $p = 1, q = 0, r = -1$ , или

$$[v] = \left[ \frac{M}{c} \right] = L^1 M^0 T^{-1}.$$

Но в принципе теория размерности допускает введение величин с иррациональными значениями  $p, q, r$ , например величины  $l^{\sqrt{2}}$ . Для такой величины  $p = \sqrt{2}$ . Подобные величины не вводятся в физику и механику

не по каким-то принципиальным соображениям, а просто потому, что в них нет надобности. Теория размерности здесь ни при чём.

В табл. 1.3 приведём основные размерности произвольных величин.

Табл. 1.3 – Единицы СИ важнейших производных величин и их размерности, СТ СЭВ 1052-78

Наименование фактора	Определяющее уравнение	Размерность в системе	
		СИ	основных величин
1	2	3	4
<i>Величины пространства и времени</i>			
Длина, расстояние, радиус 1 км = 1000 м; 1 дм = 0,1 м; 1 мм = 0,001 м; 1 мкм = 10 <sup>-6</sup> м; 1 нм = 10 <sup>-9</sup> м; 1 Å = 10 <sup>-10</sup> м (Ангстрем).	$l, r$	м	$L$
Кривизна	$\rho = \frac{1}{r}$	м <sup>-1</sup>	$L^{-1}$
Площадь	$S = l^2$	м <sup>2</sup>	$L^2$
1 га = 100 м <sup>2</sup> (гектар)			
Объём, вместимость	$V = l^3$ 1 л = 0,001 м <sup>3</sup> (литр)	м <sup>3</sup>	$L^3$
Подача (насоса)	$\chi = \frac{V}{t}$ 1 л/с = 0,001 м <sup>3</sup> /с	м <sup>3</sup> /с	$L^3 T^{-1}$
Удельный объём	$v = \frac{V}{m}$	м <sup>3</sup> /кг	$L^3 M^{-1}$
Плоский угол между двумя радиусами окружности, длина дуги $s$ между которыми равна радиусу $r$ 1 ° = 1,745329·10 <sup>-2</sup> рад; 1' = 2,908882·10 <sup>-4</sup> рад; 1" = 4,848137·10 <sup>-6</sup> рад	$\alpha = \frac{s}{r}$	рад	—
Телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь $S$ , равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы $r$	$\Omega = \frac{S}{r^2}$	ср	—
Время 1 мин = 60 с; 1 ч = 3600 с; 1 сут = 86400 с; 1 мс = 0,1 с; 1 мкс = 0,01 с; 1 нс = 0,001 с	$t$	с	$T$
Скорость линейная	$v = \frac{s}{t}$	м/с	$LT^{-1}$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
Градиент линейной скорости	$\Delta v = \frac{dv}{dl}$	$c^{-1}$	$T^{-1}$
Ускорение линейное	$a = \frac{\Delta v}{t}$	$m/c^2$	$LT^{-2}$
Скорость угловая	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	рад/с	$T^{-1}$
Ускорение угловое	$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t}$	рад/с <sup>2</sup>	$T^{-2}$
<i>Периодические величины и связанные с ними явления</i>			
Период колебаний	$T$	с	$T$
Частота периодического процесса	$\nu = \frac{1}{T}$	Гц	$T^{-1}$
Угловая (круговая, циклическая) частота	$\omega = 2\pi\nu$	рад/с	$T^{-1}$
Фаза колебания	$\Phi = \omega t + \varphi$	—	—
Частота вращения, частота дискретных событий $N$	$n = \frac{N}{t}$	об/с	$T^{-1}$
Длина волны, где $c$ – скорость распространения волны, м/с	$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$	м	$L$
Волновое число	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$	$m^{-1}$	$L^{-1}$
<i>Механические величины</i>			
Статический момент относительно оси	$S_z = \int_S r dS$	$m^3$	$L^3$
Момент инерции площади сечения (осевой, полярный, секториальный, центробежный)	$I_z, I_0 = \int_S r^2 dS$	$m^4$	$L^4$
Количество движения, импульс	$p = mv$	кг·м/с	$LMT^{-1}$
Момент количества движения	$\mathfrak{S} = mvr$	кг·м <sup>2</sup> /с	$L^2MT^{-1}$
Момент инерции (динамический момент инерции)	$I = mr^2$	кг·м <sup>2</sup>	$L^2M$
Плотность (плотность массы)	$\rho = \frac{m}{V}$	кг/м <sup>3</sup>	$L^{-3}M$
Плотность линейная	$\rho_l = \frac{m}{l}$	кг/м	$L^{-1}M$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
Плотность поверхностная, поверхностный расход	$\rho_s = \frac{m}{S}$	кг/м <sup>2</sup>	$L^{-2}M$
Сила, Исаак Ньютон (1643–1727) 1 Н = 1 кг·м/с <sup>2</sup> ; 1 дин = 1 г·см/с <sup>2</sup> ; 1 Н = 10 <sup>5</sup> дин	$F = ma$	Н	$LMT^{-2}$
Распределённая линейная нагрузка, поверхностное натяжение	$\gamma = \frac{F}{l}$	Н/м	$MT^{-2}$
Жёсткость пружины	$C = \frac{F}{x}$	Н/м	$MT^{-2}$
Распределённая поверхностная нагрузка	$p = \frac{F}{S}$	Н/м <sup>2</sup>	$L^{-1}MT^{-2}$
Податливость, гибкость	$\rho = \frac{l}{F}$	м/Н	$M^{-1}T^2$
Удельный вес	$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$	Н/м <sup>3</sup>	$L^{-2}MT^{-2}$
Коэффициент линейного сопротивления	$\beta = \frac{F}{v}$	Н·с/м, кг/с	$MT^{-1}$
Коэффициент затухания	$n = \frac{\beta}{2m}$	с <sup>-1</sup>	$T^{-1}$
Импульс силы	$\delta = Ft$	Н·с	$LMT^{-1}$
Момент силы, крутящий момент, тормозной момент	$M = Fr$	Н·м	$L^2MT^{-2}$
Импульс момента силы	$Mt = Frt$	Н·м·с	$L^2MT^{-1}$
Давление, удельная нагрузка Блез Паскаль (1623–1662)	$p = \frac{F}{S}$	Н/м <sup>2</sup> , Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Напряжение механическое (нормальное)	$\sigma = \frac{F}{S}$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Модуль продольной упругости (модуль Юнга)	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{l-l_0}{l_0}}$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Твёрдость по Бринеллю	$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Градиент давления	$\Delta p = \frac{dp}{dl}$	Па/м	$L^{-2}MT^{-2}$
Предел текучести	$\sigma_T = \frac{ma}{A_a} = \frac{m \frac{\Delta v}{\Delta t}}{A_a}$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$

1	2	3	4
Жёсткость (каната) при линейном растяжении / сжатии, сдвиге	$C_l = pS$	Па·м <sup>2</sup>	$LMT^{-2}$
Жёсткость цилиндрическая на изгиб оболочки высотой $h$	$C_d = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	Па·м <sup>3</sup>	$L^2MT^{-2}$
Жёсткость при изгибе, кручении, где $G$ – модуль сдвига, Па; $I_p$ – полярный момент инерции, м <sup>4</sup>	$C_\varphi = GI_p$	Па·м <sup>4</sup>	$L^3MT^{-2}$
Сопротивление сдвигу (срезу) плёнок на поверхности трения	$\tau_{\text{пл}} = \frac{\tau}{\gamma}$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Работа, Джеймс Джоуль (1818–1889)	$W = Fs$	Н·м, Дж	$L^2MT^{-2}$
Удельная работа	$w = \frac{W}{m}$	Дж/кг	$L^2T^{-2}$
Энергия (потенциальная)	$U = mgh$ $U = Cx^2/2$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Энергия (кинетическая)	$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Динамическая вязкость среды (вязкость), где $\tau$ – тангенциальное напряжение	$\eta = \frac{\tau}{\text{grad } v} = \frac{\tau}{\frac{v_2 - v_1}{l}}$	Па·с	$L^{-1}MT^{-1}$
Текучесть среды	$\varphi = \frac{1}{\eta}$	Па <sup>-1</sup> ·с <sup>-1</sup>	$LM^{-1}T$
Кинематическая вязкость среды	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	м <sup>2</sup> /с	$L^2T^{-1}$
Ударная вязкость	$\delta = \frac{W}{S}$	Дж/м <sup>2</sup>	$MT^{-2}$
Мощность, Джеймс Уатт (1736–1819)	$N = \frac{W}{t} = Fv$	Дж/с, Вт	$L^2MT^{-3}$
Массовый расход	$Q_m = \frac{m}{t}$	кг/с	$MT^{-1}$
Массовая скорость расхода	$q_m = \frac{Q_m}{S} = \frac{m}{tS}$	$\frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$	$L^{-2}MT^{-1}$
Объёмный расход	$Q_v = \frac{V}{t}$	м <sup>3</sup> /с	$L^3T^{-1}$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
$1 \text{ м}^3/\text{с} = 3600 \text{ м}^3/\text{ч}; 1 \text{ м}^3/\text{с} = 86400 \text{ м}^3/\text{сут}; 1 \text{ м}^3/\text{с} = 1000 \text{ л}/\text{с};$ $1 \text{ м}^3/\text{с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ л}/\text{ч}; 1 \text{ м}^3/\text{с} = 86,4 \text{ л}/\text{сут}.$			
Плотность объёмного расхода (поверхностный расход)	$q_v = \frac{Q_v}{S}$	м/с	$LT^{-1}$
<i>Тепловые величины</i>			
Температура Цельсия	$t = \Theta - 273,15$	°С	$\Theta$
Температура по Фаренгейту	$F = \frac{9}{5}\Theta - 459,67$	°F	$\Theta$
Температурный коэффициент линейного расширения	$\alpha_l = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta \Theta}$	$K^{-1}$	$\Theta^{-1}$
Температурный коэффициент объёмного расширения	$\alpha_v = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta \Theta}$	$K^{-1}$	$\Theta^{-1}$
Температурный коэффициент давления	$\alpha_p = \frac{\Delta p}{p_0 \Delta \Theta}$	$K^{-1}$	$\Theta^{-1}$
Температурный градиент	$\Delta \Theta = \frac{d\Theta}{dl}$	К/м	$L^{-1}\Theta$
Количество теплоты (теплота)	$Q = W$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Энтальпия, внутренняя энергия, термодинамический потенциал	$H = U + pV$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Удельное количество теплоты, удельный термодинамический потенциал	$q = \frac{Q}{m}$	Дж/кг	$L^2T^{-2}$
Теплоёмкость тела, энтропия системы	$C = \frac{Q}{\Delta \Theta}$	Дж/К	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$
Удельная теплоёмкость, удельная энтропия	$c = \frac{C}{m}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Удельная объёмная теплоёмкость	$c_v = \frac{C}{V}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$	$L^{-1}MT^{-2}\Theta^{-1}$
Тепловой поток	$\Phi = \frac{Q}{t}$	Вт	$L^2MT^{-3}$
Линейная плотность теплового потока	$\varphi_l = \frac{Q}{l} = 2\pi\lambda \frac{\Delta \Theta}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	Вт/м	$LMT^{-3}$
Поверхностная плотность теплового потока	$\varphi = \frac{\Phi}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
Объёмная плотность теплового потока	$\varphi_V = \frac{Q}{V}$	Вт/м <sup>3</sup>	$L^{-1}MT^{-3}$
Теплопроводность вещества	$\lambda = \frac{\varphi}{\Delta\Theta/d} = \frac{\varphi}{\text{grad } \Theta}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$
Коэффициент теплоотдачи, теплообмена, теплоусвоения, теплопередачи	$\sigma = \frac{\varphi}{\Delta\Theta}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$	$MT^{-3}\Theta^{-1}$
Температуропроводность	$a = \frac{\lambda}{c\rho}$	м <sup>2</sup> /с	$L^2T^{-1}$
Сопротивление теплопередаче, термическое сопротивление	$R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$	$\frac{\text{м}^2 \cdot \text{К}}{\text{Вт}}$	$M^{-1}T^3\Theta$
<i>Электрические и магнитные величины</i>			
Электрический заряд (количество электричества), Шарль Кулон (1736–1806)	$Q = It$	А·с, Кл	$TI$
Плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	Кл/м <sup>3</sup>	$L^{-3}TI$
Поверхностная плотность электрического заряда, поляризованность, электрическое смещение	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Кл/м <sup>2</sup>	$L^{-2}TI$
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	$L^{-1}TI$
Поверхностная плотность электрического тока	$J = \frac{I}{S}$	А/м <sup>2</sup>	$L^{-2}I$
Линейная плотность электрического тока	$j = \frac{I}{b}$	А/м	$L^{-1}I$
Электрический потенциал, Александро Вольт (1745–1827)	$\varphi = \frac{A}{Q}$	Дж/Кл, В	$L^2MT^{-3}\Gamma^{-1}$
Электрическое напряжение (разность потенциалов)	$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{A_{AB}}{Q}$	В	$L^2MT^{-3}\Gamma^{-1}$
Электродвижущая сила (ЭДС)	$\varepsilon = \frac{A}{Q}$	В	$L^2MT^{-3}\Gamma^{-1}$
Напряжённость электрического тока	$E = \frac{F}{Q}$	Н/Кл, В/м	$LMT^{-3}\Gamma^{-1}$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
Электрическое (омическое) сопротивление, Георг Ом (1787–1854)	$R = \frac{U}{I}$	В/А, Ом	$L^2MT^{-3}I^2$
Мощность электрическая	$N = U \frac{Q}{\Delta t} = UI = \frac{U^2}{R}$	Вт	$L^2MT^{-3}$
Удельное электрическое сопротивление, проводимость	$\rho = \frac{RS}{l}$	Ом·м	$L^3MT^{-3}I^2$
Электрическая проводимость Эрнст Сименс (1816–1892)	$G = \frac{1}{R}$	Ом <sup>-1</sup> , См	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	См/м	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$
Электрическая ёмкость, Майкл Фарадей (1791–1867)	$C = \frac{Q}{U}$	Кл/В, Ф	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$
Магнитный поток, Вильгельм Вебер (1804–1891)	$\Delta\Phi = QR$	Кл·Ом, Вб	$L^2MT^{-2}I^1$
Магнитная индукция (плотность магнитного потока), Никола Тесла (1856–1943)	$B = \frac{\Phi}{S}$	Вб/м <sup>2</sup> , Тл	$MT^{-2}I^1$
Индуктивность, Джозеф Генри (1797–1878)	$L = \frac{\Phi}{I}$	Вб/А, Гн	$L^2MT^{-2}I^2$
Магнитная постоянная (абсолютная магнитная проницаемость)	$\mu_0 = \frac{4\pi Fr}{2I_1I_2} = 4\pi \cdot 10^{-7}$	Гн/м	$LMT^{-2}I^{-2}$
Магнитное сопротивление	$R_m = \frac{l}{\mu_0\mu_r S}$	Гн <sup>-1</sup>	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$
Магнитная проводимость	$G_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_0\mu_r S}{l}$	Гн	$L^2MT^{-2}I^2$
Абсолютная диэлектрическая проницаемость, где $C_x$ – ёмкость тестового диэлектрика; $C_0$ – ёмкость диэлектрика в вакууме; $c$ – скорость света 299792458 м/с	$\varepsilon_a = \frac{C_x}{C_0} \cdot \frac{1}{\mu_0 c^2}$	Ф/м	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$
Магнитный момент	$p_m = IS$	А·м <sup>2</sup>	$L^2I$
Намагниченность	$M = \frac{dp_m}{dV}$	А/м	$L^{-1}I$
Работа электрическая	$W = QU_{AB}$	Кл·В, Дж	$L^2MT^{-2}$

1	2	3	4
<i>Акустические величины</i>			
Период звуковых колебаний	$T$	с	$T$
Частота звуковых колебаний	$f = \frac{1}{T}$	Гц	$T^{-1}$
Звуковое давление	$p$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Скорость звука	$c$	м/с	$LT^{-1}$
Звуковая энергия	$W$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Плотность звуковой энергии	$w = \frac{W}{V}$	Дж/м <sup>3</sup>	$L^{-1}MT^{-2}$
Поток звуковой энергии, звуковая мощность	$N = \frac{W}{t}$	Вт	$L^2MT^{-3}$
Интенсивность звука	$I = \frac{N}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
Акустическое сопротивление (акустический импеданс)	$R_a = \frac{p}{vS}$	Па·с/м <sup>3</sup>	$L^{-4}MT^{-1}$
Удельное акустическое сопротивление	$\eta = \rho c$	$\frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$	$L^{-2}MT^{-1}$
<i>Величины оптического излучения</i>			
Энергия излучения (лучистая энергия)	$Q_e$	Дж	$L^2MT^{-2}$
Плотность (объёмная) энергии излучения	$w = \frac{Q_e}{V}$	Дж/м <sup>3</sup>	$L^{-1}MT^{-2}$
Лучистая экспозиция (энергетическое количество освещения)	$H_e = \frac{Q_e}{S}$	Дж/м <sup>2</sup>	$MT^{-2}$
Поток излучения (лучистый поток, мощность излучения)	$\Phi_e = \frac{Q_e}{t}$	Вт	$L^2MT^{-3}$
Поверхностная плотность потока излучения (лучистого потока)	$\varphi_e = \frac{\Phi_e}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
Излучательность (энергетическая светимость)	$M_e = \frac{\Phi_e}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
Облучённость (энергетическая освещённость)	$E_e = \frac{\Phi_e}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
Энергетическая сила света (сила излучения) точечного источника в некотором направлении, где $\Omega$ – телесный угол	$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}$	Вт/ср	$L^2MT^{-3}$
Световой поток, люмен	$\Phi_V = J\Omega$	Кд·ср, лм	$J$

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
Световая эффективность потока излучения (лучистого потока)	$K = \frac{\Phi_V}{\Phi_e}$	лм/Вт	$L^{-2}M^{-1}T^3J$
Энергетическая яркость (лучистость)	$L_e = \frac{I_e}{S}$	Вт/(ср·м <sup>2</sup> )	$MT^{-3}$
Световая энергия	$Q_V = \Phi_V t$	лм·с	$TJ$
Яркость	$L_V = \frac{J}{S}$	Кд/м <sup>2</sup>	$L^{-2}J$
Светимость	$M_V = \frac{\Phi_V}{S}$	лм/м <sup>2</sup>	$L^{-2}J$
Освещённость, люкс	$E_V = \frac{\Phi_V}{S}$	лм/м <sup>2</sup> , лк	$L^{-2}J$
Световая экспозиция (количество освещения)	$H_V = E_V t$	лк·с	$L^{-2}TJ$
<i>Величины, применяемые в химии и молекулярной физике</i>			
Молярная масса вещества	$M = \frac{m}{N}$	кг/моль	$MN^{-1}$
Молярный объём вещества	$V_m = \frac{V}{N}$	м <sup>3</sup> /моль	$L^3N^{-1}$
Удельная адсорбция	$\Gamma = \frac{N}{m}$	моль/кг	$M^{-1}N$
Молярный тепловой эффект химической реакции (образования, растворения, горения), фазовых превращений	$Q_m = \frac{Q}{N}$	Дж/моль	$L^2MT^{-2}N^{-1}$
Молярная внутренняя энергия (молярная энтальпия)	$U_m = \frac{U}{N}$	Дж/моль	$L^2MT^{-2}N^{-1}$
Молярная теплоёмкость	$C_m = \frac{C}{N}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	$L^2MT^{-2} \dots \Theta^{-1}N^{-1}$
Концентрация (объёмная) молекул	$c_e = \frac{N}{V}$	моль/м <sup>3</sup>	$L^{-3}N$
Скорость химической реакции	$v_e = \frac{\Delta c_e}{t}$	$\frac{\text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$	$L^{-3}T^{-1}N$
Массовая концентрация компонента в смеси, растворе, сплаве	$\rho_e = \frac{m_e}{V}$	кг/м <sup>3</sup>	$L^{-3}M$
Молярная концентрация компонента в смеси, растворе, сплаве	$c_e = \frac{N_e}{V}$	моль/м <sup>3</sup>	$L^{-3}N$

1	2	3	4
Моляльность раствора	$b_e = \frac{N_e}{m}$	моль/кг	$M^{-1}N$
Летучесть (фигутивность)	$f_e$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
Осмотическое давление	$\Pi$	Па	$L^{-1}MT^{-2}$
<i>Величины ионизирующих излучений</i>			
Энергия ионизирующего излучения	$E$	Дж	$L^2MT^{-2}$
	1 эВ = 1,60207·10 <sup>-19</sup> Дж		
Поглощённая доза излучения Л. Грэй (1905–1965)	$D = \frac{E}{m}$	Дж/кг, Гр	$L^2T^{-2}$
Мощность поглощённой дозы излучения	$D' = \frac{D}{t}$	Гр/с	$L^2T^{-3}$
Экспозиционная доза рентгеновского и гамма-излучений (фотонного излучения)	$X = \frac{Q}{m}$	Кл/кг	$M^{-1}TI$
Мощность экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений	$X' = \frac{X}{t}$	А/кг	$M^{-1}I$
Эквивалентная доза излучения, где $\bar{Q}$ – безразмерный средний коэффициент качества, учитывающий неблагоприятные биологические последствия облучения человека в малых дозах, $\bar{Q} = 1 \dots 20$ зиверт	$H = D\bar{Q}$	Дж/кг, Зв	$L^2T^{-2}$
Мощность эквивалентной дозы излучения	$H' = \frac{H}{t}$	Зв/с	$L^2T^{-3}$
Поток энергии ионизирующего излучения (мощность ионизирующего излучения)	$P = \frac{E}{t}$	Вт	$L^2MT^{-3}$
Интенсивность ионизирующего излучения (плотность потока энергии ионизирующего излучения)	$I = \frac{P}{S}$	Вт/м <sup>2</sup>	$MT^{-3}$
Активность радионуклеида (радиоактивного вещества), где $n$ – число актов распада за время $t$ ; Актуан Беккерель (1852–1908)	$A = \frac{n}{t}$	с <sup>-1</sup> , Бк	$T^{-1}$

1	2	3	4
Удельная активность радиоактивного вещества	$a = \frac{A}{m}$	Бк/кг	$M^{-1}T^{-1}$
Концентрация радиоактивного вещества	$a_V = \frac{A}{V}$	Бк/м <sup>3</sup>	$L^{-3}T^{-1}$
Молярная активность радиоактивного вещества	$a_m = \frac{A}{N}$	Бк/моль	$T^{-1}N^{-1}$

4) Размерность физической величины отождествляется с её единицей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность м/с, а сила – г·м/с<sup>2</sup>. Хотя это и нелогично, но особой беды в этом нет. Всегда, если есть необходимость, единицы такого типа позволяют перейти к формулам размерности, в которых масштабы единиц основных величин не фиксированы.

5) В зависимости от выбора основных величин, а также от вида формул, связывающих эти величины с производными, одна и та же физическая величина получает в разных системах единиц не только различные числовые значения, но и различные размерности. Так, например, в системе **LMT** размерность силы устанавливается из второго закона Ньютона  $F = Cma$ , в которой коэффициент  $C$  условно считается безразмерным и полагается равным единице. Тогда сила получает размерность  $L^1M^1T^{-2}$ . Но так поступать не обязательно. Можно коэффициенту  $C$  приписать произвольную размерность и придать произвольное числовое значение. Тогда получится новая система единиц, в которой сила будет иметь уже другую размерность. Например, в уравнении закона всемирного тяготения Ньютона  $F = Gm_1m_2/r^2$  гравитационная постоянная  $G = 6,67191 \cdot 10^{-11}$  имеет размерность м<sup>3</sup>·кг<sup>-1</sup>·с<sup>-2</sup>. Тогда, как было показано ранее, сила  $F$  получает размерность кг·м/с<sup>2</sup> или  $L^1M^1T^{-2}$ . Если же гравитационную постоянную  $G$  приравнять единице и считать эту величину безразмерной, то сила  $F$  будет мерой взаимного тяготения двух тел с размерностью кг<sup>2</sup>/м<sup>2</sup> или  $L^{-2}M^2$ .

Разные физические величины могут иметь одинаковые размерности даже в одной и той же системе единиц. Примерами могут служить в механике работа  $W = Fs$  [Дж] = [Н·м], кинетическая энергия  $E_k = mv^2/2$  [Дж] или момент сил  $M = Fr$  [Н·м], а в учении об электричестве и магнетизме – ёмкость  $C = Q/\phi$  [Ф] = [Кл/В] и индуктивность  $L = \Phi/I$  [Гн] = [Вб/м], имеющие в так называемой гауссовой системе единиц размерность длины (1 Ф = 9·10<sup>11</sup> см, 1 Гн = 10<sup>9</sup> см). В таких случаях единицам этих физических величин часто дают одинаковые наименования, хотя по существу это совершенно разные вещи. Одинаковая размерность двух различных физических величин в какой-либо системе единиц свидетельствует не об их тождестве, а только о том, что в рассматриваемой системе масштабы единиц этих величин меняются одинаково при изменении масштабов единиц ос-

новых физических величин. В других системах единиц размерности тех же физических величин могут и не совпадать.

Несовпадение размерностей одной и той же величины в разных системах единиц иногда истолковывают как некоторое логическое противоречие, требующее объяснения. Оно подало повод к постановке вопроса об «истинной» размерности физических величин. На основании изложенного нет необходимости доказывать, что физической величине самой по себе не свойственна никакая размерность. Последняя появляется лишь после установления той или иной системы единиц, а вопрос об «истинной» размерности физических величин, по замечанию М. Планка, имеет не более смысла, чем вопрос об «истинном» названии какого-либо предмета.

б) *Безразмерными комбинациями физических величин* называются такие комбинации, которые в рассматриваемой системе единиц имеют нулевую размерность. Их числовые значения не меняются при изменении масштабов единиц основных величин. Например, если величина  $y$  имеет размерность величины  $x$  в степени  $\alpha$ , то очевидно,  $y/x^\alpha$  будет безразмерной комбинацией, составленной из  $x$  и  $y$ .

Общий метод нахождения безразмерных комбинаций можно разъяснить на примере системы единиц, построенной на основе трёх величин: длины  $L$ , массы  $M$  и времени  $T$ . Пусть  $n$  величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в этой системе имеют размерности соответственно

$$L^{p_1} M^{q_1} T^{r_1}, L^{p_2} M^{q_2} T^{r_2}, \dots, L^{p_n} M^{q_n} T^{r_n}.$$

Требуется составить из них безразмерную комбинацию. На основании теоремы (1.30) искомая комбинация должна иметь вид  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Её размерность будет

$$\left(L^{p_1} M^{q_1} T^{r_1}\right)^{\alpha_1}, \left(L^{p_2} M^{q_2} T^{r_2}\right)^{\alpha_2}, \dots, \left(L^{p_n} M^{q_n} T^{r_n}\right)^{\alpha_n},$$

то есть  $L^p M^q T^r$ , где

$$p = p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \dots + p_n \alpha_n;$$

$$q = q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + \dots + q_n \alpha_n;$$

$$r = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_n \alpha_n.$$

Для того чтобы комбинация была безразмерной, необходимо и достаточно, чтобы  $p = q = r = 0$ . Это приводит к системе трёх однородных уравнений

$$p_1 \alpha_1 + p_2 \alpha_2 + \dots + p_n \alpha_n = 0;$$

$$q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + \dots + q_n \alpha_n = 0;$$

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_n \alpha_n = 0$$

(1.31)

с неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Одно из этих неизвестных всегда можно выбрать произвольно, так как безразмерная комбинация остаётся безразмерной, если её возвести в

произвольную степень. Фиксируем, например,  $\alpha_1$ . Тогда получится три уравнения для определения  $n - 1$  неизвестных, за которые удобно принять отношения  $\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \dots, \alpha_n/\alpha_1$ . Если эти уравнения независимы, то  $(n - 1) - 3 = n - 4$  отношений можно выбрать произвольно. Три остальных определяются из уравнений (1.31). В результате найдутся  $n - 4$  независимых безразмерных комбинаций. Всякая функция этих безразмерных комбинаций будет также безразмерной комбинацией. Если же три уравнения (1.31) не независимы, то число независимых безразмерных комбинаций увеличится.

### 1.2.4 Метод анализа размерностей

Все применения теории размерности основаны на двух теоремах. Одна из них выражается формулой (1.30), устанавливающей общий вид размерности физических величин. Другая теорема утверждает, что *всякое количественное соотношение между различными физическими величинами может быть выражено в виде функциональной связи между безразмерными комбинациями этих величин*.

Для доказательства предположим, что между величинами  $a, b, c, x_1, x_2, x_3, \dots$  имеется функциональная связь

$$f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \dots) = 0.$$

Примем величины  $a, b, c$  за основные, а остальные  $x_1, x_2, x_3$  – за производные. Пусть размерности производных величин будут

$$[x_1] = [a^{p_1} b^{q_1} c^{r_1}], [x_2] = [a^{p_2} b^{q_2} c^{r_2}], \dots$$

Уменьшим единицы основных величин в  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  раз соответственно. Тогда они примут значения  $\alpha a, \beta b, \gamma c$ , а производные величины – значения  $\alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1} x_1, \alpha^{p_2} \beta^{q_2} \gamma^{r_2} x_2, \dots$ . Получим следующую функциональную связь

$$f(\alpha a, \beta b, \gamma c, \alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1} x_1, \alpha^{p_2} \beta^{q_2} \gamma^{r_2} x_2, \dots) = 0,$$

причём  $\alpha, \beta, \gamma$  можно выбирать произвольно.

Выберем их так, чтобы  $\alpha a = \beta b = \gamma c = 1$ . Это означает переход от жёстко фиксированных единиц к меняющейся системе единиц, в которой числовые значения основных физических величин в рассматриваемом вопросе принимаются равными единице. При таком выборе

$$f\left(1, 1, 1, \frac{x_1}{\alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1}}, \frac{x_2}{\alpha^{p_2} \beta^{q_2} \gamma^{r_2}}, \dots\right) = 0.$$

Но это уравнение в качестве переменных аргументов содержит только безразмерные комбинации физических величин. Его можно записать в виде

$$F\left(\frac{x_1}{\alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1}}, \frac{x_2}{\alpha^{p_2} \beta^{q_2} \gamma^{r_2}}, \dots\right) = 0, \quad (1.32)$$

где  $F$  – новая функция. Теорема доказана.

Доказанной теореме можно придать другую форму. Разрешим уравнение (1.32) относительно одного из аргументов, например первого, и результат умножим на знаменатель этого аргумента. Получим формулу, характеризующую реализацию  $\pi$ -теоремы (1.5)

$$x_1 = \alpha^{p_1} \beta^{q_1} \gamma^{r_1} \cdot \varphi \left( \frac{x_2}{\alpha^{p_2} \beta^{q_2} \gamma^{r_2}}, \dots \right), \quad (1.33)$$

где  $\varphi$  – какая-то функция безразмерных аргументов.

Это означает, что *во всяком физическом законе типа  $A = B$  размерности обеих частей равенства должны быть одинаковы*. В таком виде доказанная теорема получила название *правила размерностей*.

В равенство типа  $A = B$  могут входить в качестве множителей либо постоянные коэффициенты, либо безразмерные комбинации физических величин. Над размерными величинами правило размерности допускает выполнение только степенных математических операций. Все прочие математические операции ( $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$  и т. п.) могут выполняться только над безразмерными величинами. Правило размерности очень полезно для проверки формул. Если вычисления проводятся в какой-то одной системе единиц, то размерности обеих частей всех полученных равенств должны быть одинаковы. Несовпадение размерностей указывает на наличие ошибки, допущенной при вычислениях.

Из доказанного отнюдь не следует, что невозможны физические законы, выражающиеся в виде равенств между величинами разной размерности. Равенства подобного рода встречаются в физике и механике сплошь и рядом. Например, скорость свободного падения  $v = 9,81t$  можно выразить приближённой формулой  $v \approx 10t$  при нулевой начальной скорости, а гидростатическое (избыточное) давление слоя воды  $p_u = \rho gh$  – формулой  $p_u \approx 10^4 h$  Па или  $p_u \approx 0,1 h$  ат. Однако подобные формулы справедливы только тогда, когда *точно фиксированы* единицы входящих в них физических величин. В приведённых примерах предполагались следующие единицы измерения: времени  $[t] = [с]$ , скорость  $[v] = [м/с]$ , плотность воды  $\rho = 998,2 \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, толщина слоя воды  $[h] = [м]$ , а давление  $[p_u] = [1 \text{ ат} = 10^4 \cdot g \text{ Па}]$ . Изменения масштабов единиц такие формулы не допускают. Но в таком случае нет смысла говорить и о размерности входящих в них физических величин.

Формулы размерностей вторичных, или производных величин (1.30) – особая форма записи критериев подобия. Теория размерности сама по себе, то есть без использования добавочных данных, не может привести ни к каким конкретным физическим выводам, поскольку в её основе не заложены никакие физические законы. Для того чтобы извлечь из этой теории конкретные выводы, нужно установить, *между какими физическими величинами* существуют количественные связи. На этот счёт теория размерности не может дать никаких указаний. Дальнейшее преобразование состоит

в приведении их к виду, удобному при проведении научно-исследовательских задач, то есть к форме записи, включающей величины, входящие в рассматриваемую задачу. Число критериев подобия определяется по  $\pi$ -теореме (1.5). Определение критериев подобия осуществляется по плану, когда последовательно выполняются следующие операции:

- 1) выявляются параметры, характеризующие изучаемый процесс, с помощью одного из методов, например экспертных оценок или отсеивающего эксперимента;
- 2) составляется матрица из  $m$  параметров;
- 3) устанавливается число независимых между собой параметров  $k$  – например, при  $k = 3$  выбираются длина  $L$ , масса  $M$  и время  $T$ ;
- 4) изучаемое явление представляется уравнением (1.33), составленным из  $m - k$  критериев подобия;

Методику, рассмотренную выше, проиллюстрируем примерами.

**Пример 1.** Две невзаимодействующие материальные точки, находящиеся в центральном силовом поле, описывают геометрически подобные траектории. Сила  $F$ , действующая на каждую материальную точку, пропорциональна её массе и меняется с расстоянием  $r$  до силового центра как  $r^n$ , где  $n$  – постоянная. Как связаны длины  $l_1$  и  $l_2$  геометрически подобных дуг траекторий с временами  $T_1$  и  $T_2$ , затрачиваемыми материальными точками на прохождение этих дуг?

Должна существовать связь между длиной дуги траектории  $l$ , временем  $T$ , затрачиваемым материальной точкой на прохождение этой дуги, а также ускорением  $a$ , направленным к силовому центру. Ускорения можно выбрать в произвольных, но обязательно подобно расположенных точках. Из этих трёх величин можно составить единственную независимую безразмерную комбинацию, за которую можно принять  $aT^2/l$ . Следовательно, должно быть  $aT^2/l = \text{const}$ . Для ускорения можно написать  $a = Ar^n$ , где  $A$  – постоянная, одинаковая для обеих материальных точек. В силу геометрического подобия траекторий, по которым движутся материальные точки, можно также записать  $a = Bl^n$ , где  $B$  – другая постоянная, также одинаковая для обеих точек. В результате получим

$$\frac{a_1 T_1^2}{l_1} = \frac{a_2 T_2^2}{l_2}; \quad \frac{Ar^n T_1^2}{r} = \frac{Bl^n T_2^2}{l} \Rightarrow \frac{T^2}{l^{n-1}} = \text{const}; \quad \frac{T_1^2}{l_1^{n-1}} = \frac{T_2^2}{l_2^{n-1}}.$$

В частных случаях  $n = 1$  и  $n = -2$  получаем  $T = \text{const}$  и  $T^2/l^3 = \text{const}$ . Первое соотношение означает, что в случае гармонического осциллятора период колебаний или период обращения вокруг силового центра не зависит от амплитуды или размеров орбиты. Второе соотношение выражает третий закон Кеплера. Однако этот закон доказан здесь не в общем виде, а только для частиц, движущихся по геометрически подобным траекториям.

**Пример 2.** Наряду с гравитационной постоянной  $G = 6,67191 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  и скоростью света в вакууме  $c = 299792458 \text{ м/с}$  в физике особую роль играют фундаментальные постоянные: М.Планка  $h = 6,62607004 \cdot 10^{-34}$

Дж·с (коэффициент связи величины энергии кванта электромагнитного излучения с его частотой) и Л. Больцмана  $k = 1,38064852 \cdot 10^{-23}$  Дж/К (коэффициент связи между температурой и энергией). М. Планк построил естественную систему единиц, в которой эти четыре фундаментальные постоянные полагаются равными единице. Требуется выразить единицы длины, времени, массы и температуры в планковской системе через соответствующие единицы в системе  $MLT\Theta$  (масса, длина, время, температура).

Решение. Удобно считать, что обе системы единиц принадлежат к одному и тому же классу, в котором за основные единицы приняты длина, время, масса и температура. Они отличаются одна от другой только различным выбором единиц этих величин. Поэтому любое равенство двух величин одинаковой размерности в одной системе единиц должно быть справедливо и в другой. В качестве таких равенств можно выбрать:

$$l = ct; \quad mc^2 = h/t; \quad Gm^2/l = mc^2; \quad k\Theta = mc^2. \quad (1.34)$$

Не требуется, чтобы эти равенства выражали какие-то физические законы. Требуется лишь, чтобы: а) правые и левые части этих равенств имели одинаковые размерности; б) числовые значения массы  $m$ , длины  $l$ , времени  $t$  и температуры  $\Theta$  были подобраны так, чтобы рассматриваемые равенства выполнялись. Первое требование выполняется: в случае первого равенства это очевидно, остальные содержат только члены размерности энергии. В планковской системе единиц  $c = h = G = k = 1$ . Но тогда из написанных равенств следует  $m = l = t = \Theta = 1$ . Это значит, что значения  $m, l, t, \Theta$  являются единицами массы, длины, времени и температуры в планковской системе. Приведём алгоритм решения уравнений (1.34):

- 1) из первого соотношения находим время  $t = l / c$ ;
- 2) из второго соотношения находим массу  $m = \frac{h}{c^2 t} = \frac{hc}{c^2 l} = \frac{h}{cl}$ ;
- 3) из третьего соотношения находим массу  $m = \frac{c^2 l}{G}$ ;
- 4) приравняв правые части для нахождения массы, находим длину

$$\frac{h}{cl} = \frac{c^2 l}{G}, \text{ откуда } c^3 l^2 = hG, \quad l = \sqrt{\frac{hG}{c^3}};$$

- 5) из четвертого соотношения находим температуру  $\Theta = mc^2 / k$ .

Подставляя в найденные выражения заданные значения, получим решение задачи:

$$l = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} = \sqrt{\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \times 6,671 \cdot 10^{-11}}{299792458^3}} = 4,051 \cdot 10^{-35} \text{ м};$$

$$t = \frac{l}{c} = \frac{4,051 \cdot 10^{-35}}{299792458} = 1,351 \cdot 10^{-43} \text{ с};$$

$$m = \frac{h}{c^2 t} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{299792458^2 \cdot 1,351 \cdot 10^{-43}} = 5,456 \cdot 10^{-8} \text{ кг};$$

$$\Theta = \frac{mc^2}{k} = \frac{5,456 \cdot 10^{-8} \times 299792458^2}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 3,552 \cdot 10^{32} \text{ К}.$$

**Пример 3.** Требуется из величин  $l, m, t, v, a, \rho, E, \varphi$  ( $l$  – длина,  $m$  – масса,  $t$  – время,  $v$  – скорость,  $a$  – ускорение,  $\rho$  – плотность вещества,  $\text{кг/м}^3$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $\varphi$  – угол, измеренный в радианах) составить все независимые комбинации.

Решение. Проще всего поступить следующим образом. Из перечисленных величин угол  $\varphi$  уже является безразмерной величиной. Далее замечаем, что произведение  $vt$  имеет размерность длины,  $at$  – размерность скорости,  $\rho l^3$  – размерность массы,  $\rho v^2$  – размерность давления, а, следовательно, и размерность модуля Юнга. Поэтому можно написать следующие безразмерные комбинации:

$$\frac{vt}{l}, \frac{at}{v}, \frac{\rho l^3}{m}, \frac{\rho v^2}{E}, \varphi. \quad (1.35)$$

Этот способ обладает, однако, тем недостатком, что он не даёт ответа на вопрос, исчерпываются ли рядом (1.35) все возможные независимые безразмерные комбинации рассматриваемых физических величин. При отыскании безразмерных комбинаций угол  $\varphi$ , как величину безразмерную, можно не принимать во внимание. Из оставшихся семи величин составим комбинацию вида

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma v^\delta a^\lambda \rho^\mu E^\nu.$$

Если выразить размерности  $v, a, \rho, E$  через размерности основных величин  $l, m, t$ , то эта комбинация перейдёт в

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma l^\delta t^{-\delta} l^\lambda t^{-2\lambda} m^\mu l^{-3\mu} m^\nu l^{-\nu} t^{-2\nu} = l^{\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu} m^{\beta+\mu+\nu} t^{\gamma-\delta-2\lambda-2\nu}.$$

Для того чтобы эта комбинация была безразмерной, должно быть

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \delta + \lambda - 3\mu - \nu &= 0; \\ \beta + \mu + \nu &= 0; \\ \gamma - \delta - 2\lambda - 2\nu &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из этих трёх уравнений три неизвестных параметра можно выразить через оставшиеся четыре. За независимые параметры проще всего принять  $\delta, \lambda, \mu, \nu$ , так как уравнения фактически уже разрешены относительно оставшихся неизвестных  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\delta - \lambda + 3\mu + \nu; \\ \beta &= -\mu - \nu; \\ \gamma &= \delta + 2\lambda + 2\nu, \end{aligned} \right\}$$

где параметры  $\delta, \lambda, \mu, \nu$  могут независимо принимать любые значения.

Результаты вычислений неизвестных  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  и безразмерной комбинации сведём в табл. 1.4.

Табл. 1.4 – Возможные варианты решения задачи

Варьируемые переменные				Результат вычислений			
$\delta$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\Gamma^{\alpha} m^{\beta} t^{\gamma}$
1	0	0	0	-1	0	+1	$\pi_1 = \frac{vt}{l}$
0	1	0	0	-1	0	+2	$\pi_2 = \frac{at^2}{l}$
0	0	1	0	+3	-1	0	$\pi_3 = \frac{\rho l^3}{m}$
0	0	0	1	+1	-1	+2	$\pi_4 = \frac{Elt^2}{m}$

Присоединив к результатам вычислений из табл. 1.4 угол  $\varphi$ , получаем всего пять безразмерных комбинаций (1.32)

$$F\left(\frac{vt}{l}, \frac{at^2}{l}, \frac{\rho l^3}{m}, \frac{Elt^2}{m}, \varphi\right) = 0.$$

Рядом (1.35) исчерпываются все независимые безразмерные комбинации, которые можно составить из рассматриваемых физических величин.

**Пример 4.** Как зависит от высоты  $h$  скорость свободного падения тела, если начальная скорость его равна нулю?

Решение. Ускорение свободного падения  $g$  постоянно и не зависит от массы, плотности, упругих свойств тел и прочее. Поэтому искомая скорость  $v$  может зависеть только от  $g$  и  $h$ . Из безразмерных комбинаций (1.35) можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, которая получается делением первой безразмерной комбинации на вторую с последующей подстановкой  $t = h/v$ :

$$\pi_v = \frac{vt}{l} : \frac{at^2}{l} = \frac{vt}{l} \cdot \frac{l}{at^2} = \frac{v}{at} \quad \text{или} \quad \pi_v = \frac{v}{gt} = \frac{v}{g \frac{h}{v}} = \frac{v^2}{gh}.$$

Поэтому должно быть  $f(v^2/gh) = 0$ , откуда  $v^2/gh = C = \text{const}$ , или

$$v^2 = Cgh,$$

где числовой коэффициент  $C$  из теории размерности найти нельзя.

**Пример 5.** В цилиндрический сосуд площадью сечения  $S_1$  ( $\text{м}^2$ ) налита идеальная (не обладающая вязкостью) жидкость плотностью  $\rho$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) до уровня, расположенного на высоте  $h$  (м) от дна (рис. 1.5). В дне сосуда

имеется отверстие площадью сечения  $S_2$  ( $\text{м}^2$ ).  
 Определить время вытекания жидкости.  
 Решение. Искомое время представим в виде  
 степенного многочлена

$$t = C \cdot \rho^p g^q h^r S_1^k S_2^l,$$

где  $C$  – безразмерный коэффициент пропорциональности;  
 $p, q, r, k, l$  – показатели степени, подлежащие определению.

Составляем уравнение размерностей

$$\begin{aligned} T &= (L^{-3}M)^p (LT^{-2})^q (L)^r (L^2)^k (L^2)^l = \\ &= L^{-3p} M^p L^q T^{-2q} L^r L^{2k} L^{2l} = L^{-3p+q+r+2k+2l} M^p T^{-2q}. \end{aligned}$$

Приравниваем показатели степеней левой и правой части, получим систему уравнений:

$$L: 0 = -3p + q + r + 2k + 2l;$$

$$M: 0 = p;$$

$$T: 1 = -2q,$$

откуда получим  $p = 0$ ;  $q = -1/2$ ;  $r = 3p - q - 2k - 2l = 1/2 - 2k - 2l$ .

Для определения показателя степени  $r$  предположим, что абсолютная скорость жидкости в отверстии не зависит от сечения. Тогда время вытекания  $t$  должно быть обратно пропорционально площади  $S_2$ . В этом случае показатель степени  $l = -1$ . При одинаковом уровне жидкости  $h$  время вытекания пропорционально объёму жидкости  $V = S_1 h$ , следовательно, прямо пропорционально объёму  $S_1$ . Отсюда имеем  $k = +1$ . Принятые значения  $k$  и  $l$  подставляем в уравнение для вычисления  $r$ :

$$r = \frac{1}{2} - 2k - 2l = \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

Найденные значения степенных показателей подставляем в уравнение для вычисления времени  $t$ :

$$t = C \cdot \rho^p g^q h^r S_1^k S_2^l = C \cdot \rho^0 g^{-1/2} h^{1/2} S_1^1 S_2^{-1} = C \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{S_1}{S_2},$$

где коэффициент  $C$  определяется на основе эксперимента.

**Пример 6.** Предварительным анализом установлено, что потери на трение  $\Delta p$  (м), измеренные в мм ртутного столба, зависят от длины трубы  $L$  (м), её диаметра  $D$  (м), скорости движения жидкости  $v$  (м/с), вязкости жидкости  $\mu$  (Па·с), её плотности  $\rho$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ), шероховатости поверхности трубы  $R_z$  (м) и ускорения силы тяжести  $g$  ( $\text{м}/\text{с}^2$ ).

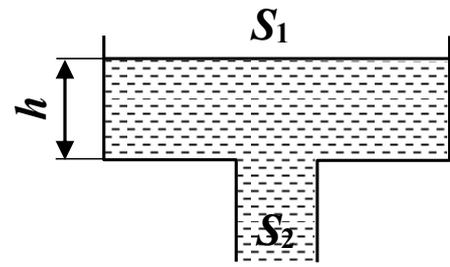


Рис. 1.5 – Схема сосуда с отверстием

Решение. Представим зависимость потери на трение от физических величин изучаемого процесса в общем и функциональном виде:

$$\begin{aligned}\Delta p &= \Phi(L, D, v, \mu, \rho, R_z, g) = \\ &= \Phi(L^a, D^b, v^c, \mu^d, \rho^l, R_z^f, g^q).\end{aligned}\quad (1.36)$$

В табл. 1.5 сведём переменные эксперимента и их размерности.

Табл. 1.5 – Размерности физических факторов, используемых в задаче, в системе основных величин

Наименование фактора	Обозначение	Размерность
1. Потеря на трение в трубе	$\Delta p$	$L$
2. Длина трубы	$L$	$L$
3. Диаметр трубы	$D$	$L$
4. Скорость потока жидкости	$v$	$LT^{-1}$
5. Вязкость жидкости	$\mu$	$L^{-1}MT^{-1}$
6. Плотность жидкости	$\rho$	$L^{-3}M$
7. Высота неровностей поверхности	$R_z$	$L$
8. Ускорение силы тяжести	$g$	$LT^{-2}$

Размерности переменных из табл. 1.5 подставим в функциональную зависимость изучаемого процесса

$$\begin{aligned}L &= \Phi\left[L^a, L^b, (LT^{-1})^c, (L^{-1}MT^{-1})^d, (L^{-3}M)^l, (L)^f, (LT^{-2})^q\right] = \\ &= \Phi\left[L^{a+b+c-d-3l+f+q}, M^{d+l}, T^{-c-d-2q}\right].\end{aligned}$$

На основании условия обеспечения однородности размерностей между показателями степени должны выполняться такие соотношения:

$$L: \quad 1 = a + b + c - d - 3l + f + q;$$

$$M: \quad 0 = d + l;$$

$$T: \quad 0 = -c - d - 2q.$$

Полученную систему уравнений решим относительно неизвестных значений показателей степени  $l, c, b$ . Имеем

$$l = -d;$$

$$c = -d - 2q;$$

$$\begin{aligned}b &= 1 - a - c + d + 3l - f - q = 1 - a + d + 2q + d - 3d - f - q = \\ &= 1 - a - d + q - f.\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения показателей степени в формулу (1.36), получим

$$\Delta p = \Phi\left(L^a, D^{1-a-d+q-f}, v^{-d-2q}, \mu^d, \rho^{-d}, R_z^f, g^q\right).$$

Объединяя члены с одинаковыми показателями степени, получаем безразмерные показатели переменных:

$$\frac{\Delta p}{D} = C \cdot \left(\frac{L}{D}\right)^a \cdot \left(\frac{\mu}{Dv\rho}\right)^d \cdot \left(\frac{R_z}{D}\right)^f \cdot \left(\frac{Dg}{v^2}\right)^q,$$

где коэффициент  $C$  и показатели степени  $a, d, f, q$  определяются экспериментально.

Проверим правильность составленного уравнения по  $\pi$ -теореме. Число физических величин  $m = 8$ , число основных единиц  $k = 3$ , число симплексов (критериальных соотношений)  $n = m - k = 8 - 3 = 5$ , что соответствует данным формулы.

На первый взгляд, применение анализа размерностей не вызывает трудностей. Однако поскольку неизвестных всегда больше, чем уравнений показателей степени, возможны варианты выбора безразмерных комбинаций. Всё это решается самим исследователем на основании собственного опыта и эрудиции, умения применять творческий подход.

**Пример 7 – определение эксплуатационных параметров путевых дрезин.** К основным параметрам, определяющим конструктивные, эксплуатационные характеристики и работоспособность путевых дрезин, относятся: масса дрезины  $G$  [кг], сила тяги  $F_m$  [Н], мощность двигателя  $N$  [Вт], скорость движения  $v$  [м/с], частота вращения вала двигателя  $n$  [об/мин], расход топлива  $q$  [л/км], база дрезины  $L$  [м], определяемая расстоянием между центрами колёсных пар, диаметр колеса  $D$  [м].

За основные единицы принимаем: массу дрезины  $G$  [кг], скорость  $v$  [м/с], диаметр колеса  $D$  [м]. За искомые параметры примем силу тяги  $F_m$  [Н], мощность двигателя  $N$  [Вт] и расход топлива  $q$  [л/км]. Остальные параметры считаем производными.

Если согласно  $\pi$ -теореме число физических величин  $m = 8$ , число основных (базисных) величин  $k = 3$ , то число симплексов и критериальных соотношений будет  $n = m - k = 8 - 3 = 5$ .

В соответствии с  $\pi$ -теоремой (1.5) возможны уравнения при безразмерных соотношениях

$$\begin{aligned} F_m &= \Phi_1(G, N, v, n, q, L, D); & \pi_4 &= \Phi_1(\pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8); \\ N &= \Phi_2(G, F_m, v, n, q, L, D); & \text{или } \pi_5 &= \Phi_2(\pi_4, \pi_6, \pi_7, \pi_8); \\ q &= \Phi_3(G, F_m, N, v, n, L, D), & \pi_6 &= \Phi_3(\pi_4, \pi_5, \pi_7, \pi_8), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где в качестве симплекса выберем функциональную связь базы дрезины  $L$  с диаметром колеса  $D$ , то есть

$$\pi_8 = L/D.$$

Выразим искомые параметры силы тяги  $F_m$ , мощности двигателя  $N$  и расхода топлива  $q$  через единицы СИ в соответствии с табл. 1.3

$$F_m = Ga = G \frac{v}{t} = G \frac{l}{t \cdot t} = \frac{Gl}{t^2}; \quad N = F_m v = G \frac{l}{t^2} \cdot \frac{l}{t} = \frac{Gl^2}{t^3}; \quad q = \frac{V}{l} = \frac{l^3}{l} = l^2,$$

где  $V$  – объём топлива в литрах,  $m^3$ ,  $l$  – пройденный путь, м.

Учитывая равенство размерностей в левой и правой частях (1.37), найдём показатели степеней в критериальных уравнениях. Для этого относительно основных единиц  $G$  [кг],  $v$  [м/с],  $D$  [м] искомые и производные величины определим в соответствие с формулой (1.30)

$$[F_m] = G^\alpha v^\beta D^\gamma; \quad [N] = G^\delta v^\varepsilon D^\lambda; \quad [q] = G^p v^q D^r; \quad [n] = G^s v^t D^u$$

или

$$\left[ \frac{Gl}{t^2} \right] = [\text{кг}]^\alpha \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]^\beta [\text{м}]^\gamma; \quad \left[ \frac{Gl^2}{t^3} \right] = [\text{кг}]^\delta \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]^\varepsilon [\text{м}]^\lambda;$$

$$[l^2] = [\text{кг}]^p \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]^q [\text{м}]^r; \quad \left[ \frac{1}{t} \right] = [\text{кг}]^s \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]^t [\text{м}]^u.$$

На основании условия обеспечения однородности размерностей между показателями степеней должны выполняться соотношения:

$$l: \quad 1 = \beta + \gamma; \quad 2 = \varepsilon + \lambda; \quad 2 = q + r; \quad 0 = t + u;$$

$$G: \quad 1 = \alpha; \quad 1 = \delta; \quad 0 = p; \quad 0 = s;$$

$$t: \quad -2 = -\beta; \quad -3 = -\varepsilon; \quad 0 = -q; \quad -1 = -t.$$

Решив систему уравнений в системе  $lGt$ , получим:

– значения показателей степени

$$\alpha = 1; \quad \delta = 1; \quad p = 0; \quad s = 0;$$

$$\beta = 2; \quad \varepsilon = 3; \quad q = 0; \quad t = 1;$$

$$\gamma = 1 - \beta = -1; \quad \lambda = 2 - \varepsilon = -1; \quad r = 2 - q = 2; \quad u = -t = -1.$$

– формулы для определения искомых и производных величин

$$F_m = G^1 v^2 D^{-1} = \frac{Gv^2}{D}; \quad N = G^1 v^3 D^{-1} = \frac{Gv^3}{D};$$

$$q = G^0 v^0 D^2 = D^2; \quad n = G^0 v^1 D^{-1} = \frac{v}{D}$$

– безразмерные критерии подобия

$$\pi_4 = \frac{F_m D}{Gv^2}; \quad \pi_5 = \frac{ND}{Gv^3} = \frac{N}{F_m v}; \quad \pi_6 = \frac{q}{D^2}; \quad \pi_7 = \frac{nD}{v}.$$

Определяемые критерии (1.37) можно переписать в виде

$$\frac{F_m D}{Gv^2} = \Phi_1 \left( \frac{N}{F_m v}, \frac{q}{D^2}, \frac{nD}{v}, \frac{L}{D} \right);$$

$$\frac{N}{F_m v} = \Phi_2 \left( \frac{F_m D}{Gv^2}, \frac{q}{D^2}, \frac{nD}{v}, \frac{L}{D} \right);$$

$$\frac{q}{D^2} = \Phi_3 \left( \frac{F_m D}{Gv^2}, \frac{N}{F_m v}, \frac{nD}{v}, \frac{L}{D} \right).$$
(1.38)

Произведём ряд упрощений, разделив и умножив критерии и симплекс уравнений (1.38) друг на друга. Из первой функциональной связи (1.38) найдём определяющий функционирование путевой дрезины критерий подобия  $\pi_5\pi_8/\pi_6$

$$\pi_9 = \frac{\pi_5\pi_8}{\pi_6} = \frac{N}{F_m v} \cdot \frac{q}{D^2} \cdot \frac{L}{D} = \frac{NDL}{F_m v q}.$$

Из второй функциональной связи (1.38) найдём  $\pi_4\pi_6/\pi_8$

$$\pi_{10} = \frac{\pi_4\pi_6}{\pi_8} = \frac{F_m D}{Gv^2} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{q}{D^2} = \frac{F_m q}{Gv^2 L}.$$

Из третьей функциональной связи (1.38) найдём  $\pi_4\pi_5\pi_7$  с последующей подстановкой зависимости мощности двигателя  $N = F_m v$

$$\pi_{11} = \pi_4\pi_6\pi_8 = \frac{F_m D}{Gv^2} \cdot \frac{N}{F_m v} \cdot \frac{L}{D} = \frac{NL}{Gv^3} = \frac{F_m v L}{Gv^3} = \frac{F_m L}{Gv^2}.$$

Согласно формулы (1.33) имеем следующие определяющие зависимости параметров функционирования путевой дрезины

$$\begin{aligned} F_m &= \alpha_1 \frac{Gv^2}{D} \left( \frac{NDL}{F_m v q} \right)^{m_1}; \\ N &= \alpha_2 F_m v \left( \frac{F_m q}{Gv^2 L} \right)^{m_2}; \\ q &= \alpha_3 D^2 \left( \frac{F_m L}{Gv^2} \right)^{m_3}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где  $\alpha_1-\alpha_3$ ,  $m_1-m_3$  – постоянные числа, определяемые экспериментально.

На основании данных технических характеристик путевых дрезин и автомотрис для ширины колеи 1520 мм экспериментально определим численные значения силы тяги  $F_m$  [Н], мощности двигателя  $N$  [Вт], расхода топлива  $q$  [л/км] с последующим определением постоянных чисел  $\alpha_1-\alpha_3$ ,  $m_1-m_3$  в определяющих зависимостях (1.39). Измеренные значения физических параметров и расчётных значений сведём в табл. 1.6.

Табл. 1.6 – Параметры путевых машин

Тип дрезин	Параметры							Определяющие критерии			Определяемые критерии		
	машин					опытные		$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$
	$G$ , кг	$L$ , м	$D$ , м	$v$ , м/с	$N$ , Вт	$F_m$ , Н	$q$ , л/100 км	$\frac{NDL}{F_m v q}$	$\frac{F_m q}{Gv^2 L}$	$\frac{F_m L}{Gv^2}$	$\frac{F_m D}{Gv^2}$	$\frac{N}{F_m v}$	$\frac{q}{D^2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>Дрезины, выпускаемые в период существования СССР</i>													
АГМУ	10700	5	0,65	18,06	71250	23700	21,58	0,0251	0,0293	0,0340	0,0044	0,166	51,08
ДГКУ	29000	6	1,05	22,22	187500	68000	68,73	0,0114	0,0544	0,0285	0,0050	0,124	62,34
ДМ	13600	5,2	0,65	18,06	71250	21600	26,58	0,0232	0,0249	0,0253	0,0032	0,183	62,91

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ДМ <sup>М</sup>	15000	5,2	0,65	22,22	71250	21600	21,58	0,0233	0,0121	0,0152	0,0019	0,148	51,08
АГВ	40000	6	1,05	22,22	187500	68000	68,73	0,0114	0,0394	0,0207	0,0036	0,124	62,34
ТГК-2	30000	3,2	0,9	16,67	187500	72000	91,6	0,0049	0,2472	0,0276	0,0078	0,156	113,09
М <sup>К</sup> 15	15000	3,8	0,6	18,06	71250	30000	26,58	0,0113	0,0429	0,0233	0,0037	0,132	73,83
АС-1А	4400	3,8	0,65	22,22	52500	14000	31,5	0,0132	0,0534	0,0245	0,0042	0,169	74,56
МЭС	40000	4,5	1,05	22,22	225000	64000	94,98	0,0079	0,0684	0,0146	0,0034	0,158	86,15
<i>Дрезины, выпускаемые в 2016 – 2017 г.</i>													
МПП-Г	45000	10	1,05	22,22	220000	60000	69,97	0,0248	0,0189	0,0270	0,0028	0,165	63,46
1АДМ-1,3	35500	7	1,05	22,22	220000	59000	84,15	0,0147	0,0405	0,0236	0,0035	0,168	76,33
МПП-6	32000	7	1,05	22,22	220000	68000	68,36	0,0157	0,0420	0,0301	0,0045	0,146	62,00
МПП-4	31000	7	1,05	22,22	220000	64000	74,56	0,0153	0,0445	0,0293	0,0044	0,155	67,63
ТМк	25000	5	0,71	11,11	50000	26000	42,79	0,0144	0,0721	0,0421	0,0060	0,173	84,88
АГМу-2	12000	5	0,71	13,88	30000	14000	32,62	0,0168	0,0395	0,0303	0,0043	0,154	64,71

При определении значений  $\alpha_1-\alpha_3$ ,  $m_1-m_3$  следует обработать эмпирический числовой материал в виде экспериментальных зависимостей методом корреляционно-регрессионного анализа. Он представляет собой статистический метод исследования экспериментальных данных и позволяет показать зависимость какого-либо параметра от одной или нескольких независимых переменных. В качестве регрессионного анализа в данном случае выберем линейную регрессию вида  $y = a_0x + a_1$ , для которой  $m_i = 1$ . Однако пользователь может выбрать и другие способы оценивания, например параболическую регрессию вида  $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$ , для которой  $m_i = 2$ .

На примере построения регрессионной модели  $\pi_4 = f(\pi_9)$  покажем процесс вычисления линейной регрессии:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \cdot \left( y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right)}{\sum_{i=0}^{n-1} \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right)^2}; \quad a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i - \frac{a_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i,$$

где  $n$  – количество анализируемых значений  $x$  и  $y$ ;

$x$  – аргумент функции (в нашем случае – критерий  $\pi_9$  из табл. 1.6);

$y$  – функция (в нашем случае определяемый критерий  $\pi_4$  из табл. 1.6).

Вычисления будем выполнять в табличной форме, представленной в табл. 1.7.

Табл. 1.7 – Пример вычисления коэффициентов линейной регрессии

$x = \pi_9$	$y = \pi_4$	$(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)$	$(x - \mu_x)^2$
0,0251	0,0044	$2,24 \cdot 10^{-6}$	$9,08 \cdot 10^{-5}$
0,0114	0,0050	$-3,36 \cdot 10^{-6}$	$1,73 \cdot 10^{-5}$
0,0232	0,0032	$-7,79 \cdot 10^{-6}$	$5,91 \cdot 10^{-5}$
0,0233	0,0019	$-1,76 \cdot 10^{-5}$	$5,95 \cdot 10^{-5}$
0,0114	0,0036	$2,35 \cdot 10^{-6}$	$1,73 \cdot 10^{-5}$
0,0049	0,0078	$-3,82 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$

$x = \pi_9$	$y = \pi_4$	$(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)$	$(x - \mu_x)^2$
0,0113	0,0037	$2,13 \cdot 10^{-6}$	$1,81 \cdot 10^{-5}$
0,0132	0,0042	$-2,33 \cdot 10^{-8}$	$5,31 \cdot 10^{-6}$
0,0079	0,0034	$5,95 \cdot 10^{-6}$	$5,88 \cdot 10^{-5}$
0,0248	0,0028	$-1,24 \cdot 10^{-5}$	$8,51 \cdot 10^{-5}$
0,0147	0,0035	$5,68 \cdot 10^{-7}$	$7,77 \cdot 10^{-7}$
0,0157	0,0045	$3,96 \cdot 10^{-8}$	$1,35 \cdot 10^{-8}$
0,0153	0,0044	$-6,11 \cdot 10^{-8}$	$8,32 \cdot 10^{-8}$
0,0144	0,0060	$-2,12 \cdot 10^{-6}$	$1,39 \cdot 10^{-6}$
0,0168	0,0043	$1,52 \cdot 10^{-7}$	$1,59 \cdot 10^{-6}$
$\mu_x = 0,0155$	$\mu_y = 0,0042$	$\Sigma_1 = -6,81 \cdot 10^{-5}$	$\Sigma_2 = 5,28 \cdot 10^{-4}$
$a_0 = \Sigma_1 / \Sigma_2 = -6,81 \cdot 10^{-5} / 5,28 \cdot 10^{-4} = -0,129$			
$a_1 = \mu_y - a_0 \cdot \mu_x = 0,0042 + 0,129 \cdot 0,0155 = 0,00618$			

Аналогичные вычисления были выполнены и для расчёта коэффициентов линейной регрессии моделей  $\pi_5 = f(\pi_{10})$  и  $\pi_6 = f(\pi_{11})$ . Тогда уравнения (1.39) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{F_m D}{G v^2} &= -0,129 \cdot \left( \frac{NDL}{F_m v q} \right) + 0,00618; \\ \frac{N}{F_m v} &= 0,0021 \cdot \left( \frac{F_m q}{G v^2 L} \right) + 0,155; \\ \frac{q}{D^2} &= 152,62 \cdot \left( \frac{F_m L}{G v^2} \right) + 66,4. \end{aligned}$$

Данный метод при проектировании модельного стенда для исследования динамических характеристик путевых дрезин позволил более точно выбрать параметры стенда и сократить сроки его разработки на 20 %, сэкономить на стадии проектирования материальные и финансовые средства.

**Пример 8 – определение критериев подобия для механической системы.** Рассмотрим последовательность выполнения операций по определению критериев физического подобия методом анализа размерностей для механической системы, находящейся под воздействием возмущающей силы  $F_\delta = F \cdot \sin(\omega t)$ . Система (см. рис. 1.1) представляет собой груз массой  $M$ , колеблющийся на пружине жёсткостью  $C$ ; при перемещении массы на расстояние  $S$  появляется упругая сила  $F_y = CS$  и вязкое сопротивление  $F_c = -\beta v$ , где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности. Данная схема может быть реализована в виде гасителя вертикальных колебаний тележек железнодорожного вагона, изображённого на рис. 1.6.

1. Выявляем параметры, которые определяют процесс колебаний механической системы:  $P_1$  – масса  $M$ , кг;  $P_2$  – частота  $\omega$ ,  $c^{-1}$ ;  $P_3$  – сила  $F$ , Н;  $P_4$  – перемещение  $S$ , м;  $P_5$  – коэффициент сопротивления  $\beta$ , Н·с/м;

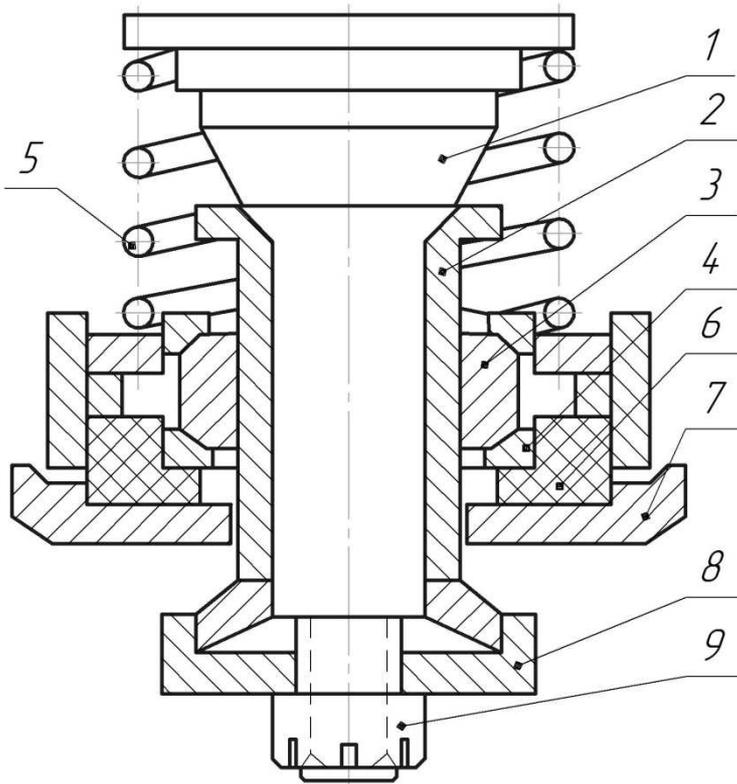


Рис. 1.6 – Схема фрикционного гасителя колебаний тележек пассажирских вагонов КВЗ-ЦНИИ: 1 – шпиртон; 2 – втулка; 3 – клин; 4 – конусные шайбы; 5 – пружина; 6 – резиновое кольцо; 7 – кронштейн буксы; 8 – опора; 9 – гайка шпиртона

$P_6$  – жёсткость пружин  $C$ , Н/м;  $P_7$  – время  $t$ , с.

Участвующих величин будет семь ( $m = 7$ ).

Функциональная зависимость, подлежащая исследованию, приобретёт вид

$$\Phi(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) = 0$$

или

$$\Phi(M, \omega, F, S, \beta, C, t) = 0,$$

где  $P_1 - P_7$  – параметры системы.

2. Применительно к системе измерений  $LMT$  ( $L$  – линейный размер, м;  $M$  – масса, кг;  $T$  – время, с) выберем три ( $k = 3$ ) независимых основных (базисных) параметра, которые можно измерить техническими средствами. К ним отнесём массу, частоту и силу

$$P_1 = M, \text{ кг}; P_2 = \omega, \text{ с}^{-1};$$

$$P_3 = F, \text{ Н}.$$

3. Определяем размерность каждого базисного параметра в системе измерений  $LMT$

$$\left. \begin{aligned} P_1 = [M] &= [L]^0 [M]^1 [T]^0; \\ P_2 = [\omega] &= [L]^0 [M]^0 [T]^{-1}; \\ P_3 = [F] &= [L]^1 [M]^1 [T]^{-2}. \end{aligned} \right\}$$

Остальные четыре параметра ( $n = m - k = 7 - 3 = 4$ ) примут вид

$$\left. \begin{aligned} P_4 = [S] &= [L]^1 [M]^0 [T]^0; & P_6 = [C] &= [L]^0 [M]^1 [T]^{-2}; \\ P_5 = [\beta] &= [L]^0 [M]^1 [T]^{-1}; & P_7 = [t] &= [L]^0 [M]^0 [T]^1. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

4. Проверяем правильность выбора по числу базисных параметров ( $k = 3$ ), составив матрицу размерностей и вычислив её определитель

$$D_{1-3} = \begin{matrix} & L & M & T \\ \begin{matrix} P_1 = M: \\ P_2 = \omega: \\ P_3 = F: \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} & = -1. \end{matrix} \quad (1.41)$$

Независимость выбранных пользователем параметров подтверждается неравенством нулю определителя  $D_{1-3}$ . Следовательно, значения базисных параметров  $P_1; P_2; P_3$  и их количество ( $k = 3$ ) выбраны правильно и величины  $M, \omega, F$  действительно независимы.

Если бы определитель  $D_{1-3} = 0$ , то масштабы величин для модели и образца (натуры) были бы одинаковы. Например, для линейных размеров геометрический масштаб  $C_l = l_o / l_m = 1, l_o = l_m$ . В данном случае модель выполняется по размерам, соответствующим опытному образцу, что в практике моделирования применять не имеет смысла.

**5.** Составляем в соответствии с выражением (1.30) критерии подобия для оставшихся  $n = m - k$  параметров модели. В общем виде их можно записать, как дроби

$$\begin{aligned} \pi_4 &= \frac{[S]}{[M]^{pS} [\omega]^{qS} [F]^{rS}}; & \pi_6 &= \frac{[C]}{[M]^{pC} [\omega]^{qC} [F]^{rC}}; \\ \pi_5 &= \frac{[\beta]}{[M]^{p\beta} [\omega]^{q\beta} [F]^{r\beta}}; & \pi_7 &= \frac{[t]}{[M]^{pt} [\omega]^{qt} [F]^{rt}}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Критерии подобия находят, отыскивая значения показателей степени.

**6.** Определяем значения показателей степени  $p, q, r$  для параметров  $P_4 - P_7$ . Для этого необходимо определить определители влияния  $D^p, D^q, D^r$  побочных параметров на базисные. Значения этих определителей могут быть найдены из определителя (1.41) после замены  $i$ -й строки на строку, составленную из показателей степеней  $p_{S, \beta, C, i}; q_{S, \beta, C, i}; k_{S, \beta, C, i}$  величин  $P_4; P_5; P_6; P_7$ , взятых из формул (1.40)

- для параметра  $P_4$  – перемещения  $S, m$

$$D_4^p = \begin{matrix} P_4: \\ P_2: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = 1; \end{matrix} \quad D_4^q = \begin{matrix} P_1: \\ P_4: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = 2; \end{matrix} \quad D_4^r = \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \\ P_4: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = -1;$$

- для параметра  $P_5$  – коэффициента сопротивления  $\beta, H \cdot c/m$

$$D_5^p = \begin{matrix} P_5: \\ P_2: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = -1; \end{matrix} \quad D_5^q = \begin{matrix} P_1: \\ P_5: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = -1; \end{matrix} \quad D_5^r = \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \\ P_5: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| = 0;$$

- для параметра  $P_6$  – жёсткости пружин  $C, H/m$

$$D_6^p = \begin{matrix} P_6: \\ P_2: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = -1; \end{matrix} \quad D_6^q = \begin{matrix} P_1: \\ P_6: \\ P_3: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = -2; \end{matrix} \quad D_6^r = \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \\ P_6: \end{matrix} \begin{matrix} L & M & T \\ \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = 0;$$

- для параметра  $P_7$  – времени  $t$ , с

$$D_7^p = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & M & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_7: \\ P_2: \\ P_3: \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{matrix} = 0; \quad D_7^q = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & M & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1: \\ P_7: \\ P_3: \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{matrix} = 1; \quad D_7^r = \begin{matrix} & \begin{matrix} L & M & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1: \\ P_2: \\ P_7: \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} = 0;$$

Численные значения показателей будут:

$$\begin{aligned} pS &= \frac{D_4^p}{D_{1-3}} = \frac{1}{-1} = -1; & qS &= \frac{D_4^q}{D_{1-3}} = \frac{2}{-1} = -2; & rS &= \frac{D_4^r}{D_{1-3}} = \frac{-1}{-1} = 1; \\ p\beta &= \frac{D_5^p}{D_{1-3}} = \frac{-1}{-1} = 1; & q\beta &= \frac{D_5^q}{D_{1-3}} = \frac{-1}{-1} = 1; & r\beta &= \frac{D_5^r}{D_{1-3}} = \frac{0}{-1} = 0; \\ pC &= \frac{D_6^p}{D_{1-3}} = \frac{-1}{-1} = 1; & qC &= \frac{D_6^q}{D_{1-3}} = \frac{-2}{-1} = 2; & rC &= \frac{D_6^r}{D_{1-3}} = \frac{0}{-1} = 0; \\ pt &= \frac{D_7^p}{D_{1-3}} = \frac{0}{-1} = 0; & qt &= \frac{D_7^q}{D_{1-3}} = \frac{1}{-1} = -1; & rt &= \frac{D_7^r}{D_{1-3}} = \frac{0}{-1} = 0. \end{aligned}$$

7. Используя значения показателей и данные уравнений (1.42), запишем окончательные значения критериев. С учётом  $\omega = 1/t$ , получим

$$\begin{aligned} \pi_4 &= \frac{[S]}{[M]^{-1}[\omega]^{-2}[F]^1} = \frac{SM\omega^2}{F} = \frac{MS}{Ft^2}; & \pi_6 &= \frac{[C]}{[M]^1[\omega]^2[F]^0} = \frac{C}{M\omega^2} = \frac{Ct^2}{M}; \\ \pi_5 &= \frac{[\beta]}{[M]^1[\omega]^1[F]^0} = \frac{\beta}{M\omega} = \frac{\beta t}{M}; & \pi_7 &= \frac{[t]}{[M]^0[\omega]^{-1}[F]^0} = \omega t. \end{aligned}$$

Согласно второй теореме подобия уравнение движения груза под действием сил представляется функциональной зависимостью из критериев подобия

$$\Phi\left(\frac{MS}{Ft^2}; \frac{\beta t}{M}; \frac{Ct^2}{M}; \omega t\right) = 0. \quad (1.43)$$

Как можно видеть, уравнения (1.7) и (1.43) одинаковы.

Следовательно, как первым способом, путём приведения уравнения к безразмерному виду, так и вторым (с использованием метода анализа размерностей и  $\pi$ -теоремы), мы пришли к совершенно одинаковым критериям подобия исследуемого процесса.

**Пример 9 – использование метода анализа размерностей при моделировании сложных систем.** Модели могут быть простыми и сложными. *Простая модель* описывает один вид движения материи (например, механическое) или является условным образом явления. Примером такой модели может служить описание движения математического маятника, подвешенного на невесомой и нерастяжимой нити, конец которой закреплён непо-

движно. Маятник осуществляет движение только в одной плоскости. Оно описывается дифференциальным уравнением с чётко определёнными начальными условиями. Применяя методы теории подобия и используя данное дифференциальное уравнение, составляют уравнение подобия.

Однако эта физическая модель является абстрактной. Она не учитывает дополнительные эффекты, связанные с трением, растяжением нити, сопротивлением воздуха при качении маятника и так далее.

*Сложная модель* состоит из двух и более подсистем, она, как правило, описывает несколько видов движения материи. Например, система «вал – подшипник» представляет сложную систему и состоит из семи подсистем. Она описывает минимум два вида движения: механическое и тепловое. В ряде случаев приходится учитывать ещё электрические и химические явления в зоне контакта данной пары трения. Сложными моделями являются также тормозные системы, например, подвижного состава.

Сложная модель однородна, если класс моделируемых явлений имеет граничные условия. Представить сложную физическую модель системой уравнений не представляется возможным, поэтому критериальное явление, описывающее процесс, составляют путём использования  $\pi$ -теоремы. Применяв теорию подобия, можно получить замкнутое математическое описание данной модели.

В качестве примера физического моделирования сложной системы рассмотрим испытание клинового фрикционного гасителя колебаний тележек КВЗ-ЦНИИ пассажирских вагонов. Гаситель колебаний служит для гашения вертикальных колебаний вагона и является упруго-фрикционной связью (см. рис. 1.6). Основные требования, предъявляемые к трущимся парам гасителя (амортизатора): стабильность коэффициента трения, хорошая прирабатываемость и высокая износостойкость сопряжений, особенно шпинтона 1 со втулкой 2, которые сильно изнашиваются.

Для выполнения системного анализа необходимо и достаточно:

а) подобия функций реальной и модельной систем (воздействия и выходного смещения, а также функциональных соотношений между ними);

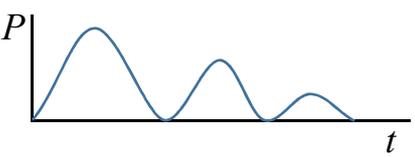
б) подобия структур реальной и испытываемой систем (элементов системы, свойств элементов, трибологических воздействий).

Исходя из этих положений, трибологические параметры рассмотренной системы можно разделить на группы (табл. 1.8). На основании полученных данных строится графическая модель фрикционной системы (рис. 1.7) и выбираются факторы, существенно влияющие на трение и износ:

– *внешние механические воздействия*: нагрузка  $P$ , Н; скорость  $v$ , м/с; частота колебаний  $\omega$ , Гц; амплитуда относительных перемещений контртел  $A$ , м; скорость нарастания нагрузки  $P/\tau$ , Н/с;

– *геометрические характеристики*: диаметр посадочный шпинтона 1 и втулки 2  $d$ , м; площади теплоотдающих поверхностей  $A_{a12} = A_{a1} \cdot A_{a2}$ , м<sup>4</sup>; комплекс геометрических размеров  $Kz_{12} = Kz_{1} \cdot Kz_{2}$ , м<sup>6</sup>, определяющий границы распространения в материале трибосопряжения деформации и тепла;

Табл. 1.8 – Контрольная карта испытаний пар трения

<b>I. Техническая функция трибомеханической системы: исследование трения и изнашивания на установке знакопеременного скольжения (ЗПС) с нестационарным нагружением</b>			
<b>II. Рабочие параметры</b>			
Тип движения: ЗПС		Продолжительность работы $t$ : 90 мин, время приработки – 30 мин.	
Характер изменения нагрузки $P(t)$		Скорость ЗПС $v$ , м/с	Температура $\Theta$ , °C контактного слоя
		0,09 – 0,25 6 интервалов	≤ 250
<b>III. Структура трибомеханической системы</b>			
Начальные свойства элементов	Трибоэлемент 1 – металлопокрытие	Атмосфера – влажный воздух	Трибоэлемент 2 – Сталь Ст.45
Геометрические размеры, мм	$B \times L \times H =$ $= 10 \times 60 \times 10$	$N_2 = 80 \%$ ; $O_2 = 20 \%$	$B \times L \times H =$ $= 10 \times 30 \times 10$
Химический состав	$C = 1,02 \%$ $Mn = 1,38 \%$	$P_0 = 1315$ Па; $\alpha = 6,5$ г/кг	$C = 0,47 \%$ $Mn = 0,55 \dots 0,3 \%$
Твёрдость по Роквеллу, пластичность, остаточные напряжения	до 55 HRC 4 – 19 % до 800 МПа	Трибологические взаимодействия: атмосфера воздействует на	55 HRC — —
Топографические данные $R_z$ , мкм	1,0 – 1,25	трибоэлементы 1 и 2, в которых возникают трибологические реакции:	3,2
Площадь контакта $A$ , см <sup>2</sup>	6,0	деформация, поверхностная усталость, истирание	1,0
Полный след износа, %	100 %		100 %

– *физико-механические характеристики*: твёрдость контактирующих тел  $HB_{12} = HB_1 \cdot HB_2$ , Па<sup>2</sup>; модуль упругости  $E_{12} = E_1 \cdot E_2$ , Па<sup>2</sup>; теплопроводность  $\lambda_{123} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , [Вт/(м·К)]<sup>3</sup>; твёрдость загрязнений на поверхности контакта  $HB_k$ , МПа;

– *физические параметры*: масса  $M_{12} = M_1 \cdot M_2$ , кг<sup>2</sup>;

– *температурные*: температура объёмная контактирующих тел  $\Theta_{12} = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ , °C<sup>2</sup>; температурный градиент этих тел  $\Delta\Theta_{12} = \Delta\Theta_1 \cdot \Delta\Theta_2$ , °C<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>; коэффициент теплоотдачи узлом трения  $\sigma_{12} = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ , [Вт/(м<sup>2</sup>К)]<sup>2</sup>.

В системе основных единиц  $MLT\Theta$ , где  $M$  – масса, кг;  $L$  – линейный размер, м;  $T$  – время, с;  $\Theta$  – температура, °C, были отобраны 4 базисных параметра, оказывающих наиболее существенное влияние на фрикцион-

но-износные характеристики узла и имеющие независимые размерности. К ним были отнесены:  $P$  – нагрузка, Н,  $\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ;  $v$  – скорость относительного перемещения контактирующих тел,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\sigma_{12}$  – коэффициент теплоотдачи шпинтона 1 и втулки 2,  $[\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})]^2$ ,  $\text{кг}^2\cdot\text{с}^{-6}\cdot\text{К}^{-2}$ ;  $d$  – посадочный диаметр шпинтона 1 и втулки 2, м.

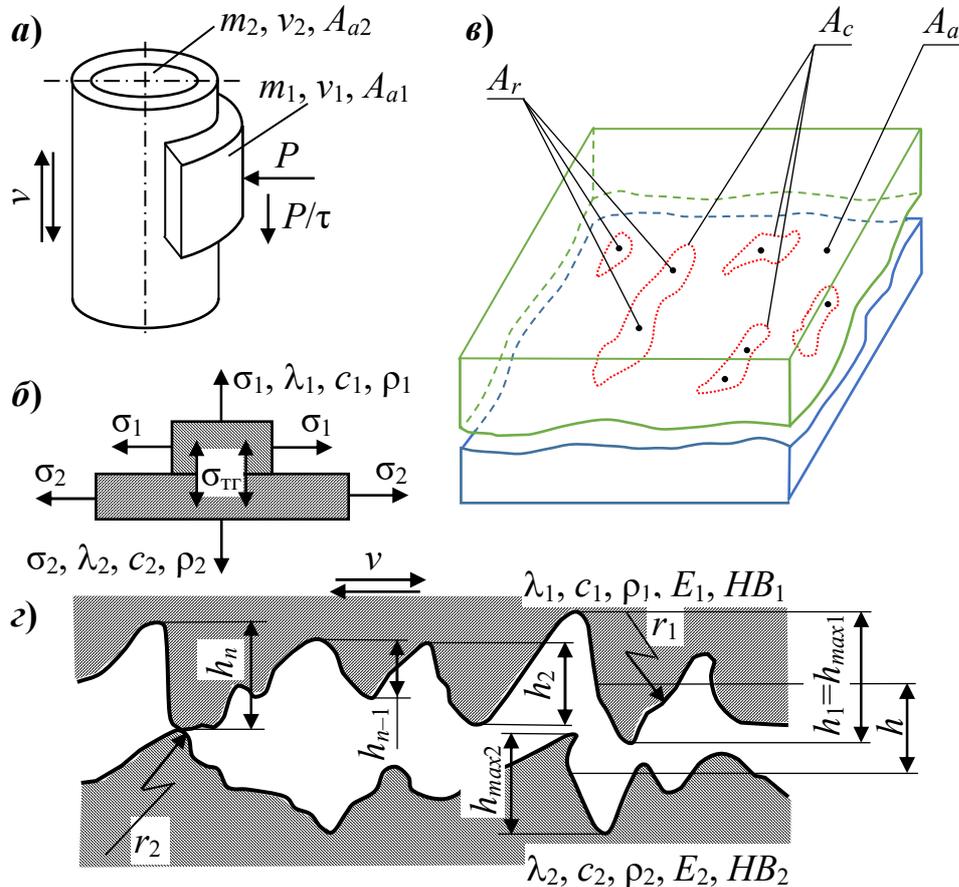


Рис. 1.7 – Подмодели трения: *a* – кинематическая (макроконтактирования), *б* – тепловая; *в* – микроконтактирования; *г* – единичного контакта;  $P$  – нагрузка;  $v$  – скорость скольжения;  $t$  – время;  $m$  – масса;  $\lambda$  – теплопроводность;  $c$  – теплоёмкость;  $\rho$  – плотность;  $E$  – модуль упругости;  $HB$  – твёрдость;  $\sigma$  – коэффициент теплоотдачи; площади:  $A_a$  – номинальная,  $A_c$  – контурная;  $A_r$  – фактическая;  $r$  – радиус шероховатости поверхности;  $h$  – высота шероховатости поверхности  $R_z$

Запишем размерности в системе  $MLT\Theta$

$$\left. \begin{aligned} [P] &= [M]^1 [L]^1 [T]^{-2} [\Theta]^0; & [\sigma_{12}] &= [M]^2 [L]^0 [T]^{-6} [\Theta]^{-2}; \\ [v] &= [M]^0 [L]^1 [T]^{-1} [\Theta]^0; & [d] &= [M]^0 [L]^1 [T]^0 [\Theta]^0. \end{aligned} \right\}$$

Составим систему уравнений, образованную четырьмя базисными параметрами

$$\left. \begin{aligned} \ln P &= 1 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L - 2 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta; \\ \ln v &= 0 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L - 1 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta; \\ \ln \sigma_{12} &= 2 \cdot \ln M + 0 \cdot \ln L - 6 \cdot \ln T - 2 \cdot \ln \Theta; \\ \ln d &= 0 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L + 0 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta. \end{aligned} \right\}$$

Независимость размерностей достигается неравенством нулю определителя, составленного из показателей степеней размерностей этих параметров в системе  $MLT\Theta$

$$D_0 = \begin{matrix} & \overbrace{M \quad L \quad T \quad \Theta} \\ P: & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \\ v: & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \sigma_{12}: & 2 & 0 & -6 & -2 \\ d: & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ & \end{matrix} = 2. \quad (1.44)$$

В уравнении (1.44) определитель  $D_0 \neq 0$ , чем подтверждается независимость выбранных нами размерностей  $P$ ;  $v$ ;  $\sigma_{12}$ ;  $d$ .

Определим критерии подобия небазисных параметров. Для этого поочередно заменяем в  $D_0$  (1.44) строки с размерностями  $P$ ;  $v$ ;  $\sigma_{12}$ ;  $d$  строками с размерностью параметра, для которого определяется критерий подобия. Для каждого параметра получим четыре определителя и выведем критерии подобия.

Например, для критерия скорости нарастания нагрузки, имеющего размерность Н/с или  $\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-3}$  в системе основных единиц имеем следующую размерность параметра  $[P/\tau] = [MLT^{-3}]$ . Выполним расчёт определителей и показателей степени, входящих в критерий подобия (1.30):

$$D_{P/\tau}^\alpha = \begin{matrix} & \overbrace{M \quad L \quad T \quad \Theta} \\ P/\tau: & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ v: & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \sigma_{12}: & 2 & 0 & -6 & -2 \\ d: & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ & \end{matrix} = 2; \quad \alpha = \frac{D_{P/\tau}^\alpha}{D_0} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$D_{P/\tau}^\beta = \begin{matrix} & \overbrace{M \quad L \quad T \quad \Theta} \\ P: & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \\ P/\tau: & 1 & 1 & -3 & 0 \\ \sigma_{12}: & 2 & 0 & -6 & -2 \\ d: & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ & \end{matrix} = 2; \quad \beta = \frac{D_{P/\tau}^\beta}{D_0} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$D_{P/\tau}^\gamma = \begin{matrix} & \overbrace{M \quad L \quad T \quad \Theta} \\ P: & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 0 \\ v: & 0 & 1 & -1 & 0 \\ P/\tau: & 1 & 1 & -3 & 0 \\ d: & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| \\ & \end{matrix} = 0; \quad \gamma = \frac{D_{P/\tau}^\gamma}{D_0} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$D_{P/\tau}^{\delta} = \begin{matrix} & \overbrace{M \quad L \quad T \quad \Theta} \\ P: & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ v: & \\ \sigma_{12}: & \\ P/\tau: & \end{matrix} = -2; \quad \delta = \frac{D_{P/\tau}^{\delta}}{D_0} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Критерий подобия для параметра скорости нарастания нагрузки  $P/\tau$  будет иметь вид:

$$\pi_{P/\tau} = \frac{[P/\tau]}{P^{\alpha} v^{\beta} \sigma_{12}^{\gamma} d^{\delta}} = \frac{[P/\tau]}{P^1 v^1 \sigma_{12}^0 d^{-1}} \quad \text{или} \quad \pi_{P/\tau} = \frac{[P/\tau] \cdot d}{P \cdot v}$$

Осуществим проверку справедливости критерия, поставив в него размерности параметров

$$\pi_{P/\tau} = \frac{[MLT^{-3}] \cdot L}{[MLT^{-2}] \cdot [LT^{-1}]} = \frac{MLLT^2T}{T^3MLL} = 1.$$

Проверка выполнена, критерий подобия  $\pi_{P/\tau}$  верен. Аналогично определяются и другие критерии, которые представлены в табл. 1.9.

Табл. 1.9 – Критерии подобия, используемые для моделирования трения и износа гасителя колебаний при знакопеременном скольжении и нестационарном нагружении

Параметр	Размерность	Критерий подобия
1	2	3
Нагрузка $P$ , Н	$MLT^{-2}$	Базисный параметр
Скорость скольжения $v$ , м/с	$LT^{-1}$	
Коэффициент теплоотдачи $\sigma_{12} = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ , $[Вт/(м^2К)]^2$	$M^2T^{-6}\Theta^{-2}$	
Посадочный диаметр $d$ , м	$L$	
<i>внешние механические воздействия</i>		
Частота собственных колебаний $\omega$ , с <sup>-1</sup>	$T^{-1}$	$\pi_{\omega} = \frac{\omega d}{v}$
Амплитуда колебаний $A$ , м	$L$	$\pi_A = \frac{A}{d}$
Скорость нарастания нагрузки $P/\tau$ , Н/с	$MLT^{-3}$	$\pi_{P/\tau} = \frac{[P/\tau] \cdot d}{P \cdot v}$
<i>геометрические характеристики</i>		
Площади теплоотдающих поверхностей $A_{a12} = A_{a1} \cdot A_{a2}$ , м <sup>4</sup>	$L^4$	$\pi_{A_{a12}} = \frac{A_{a1} \cdot A_{a2}}{d^4}$

1	2	3
Комплекс геометрических размеров $Kz_{12} = Kz_1 \cdot Kz_2, \text{ м}^6$	$L^6$	$\pi_{Kz_{12}} = \frac{Kz_1 \cdot Kz_2}{d^6}$
<i>физико-механические характеристики</i>		
Твёрдость контактирующих тел $HB_{12} = HB_1 \cdot HB_2, \text{ Па}^2$	$M^2 L^{-2} T^{-4}$	$\pi_{HB_{12}} = \frac{HB_1 \cdot HB_2 \cdot d^4}{P^2}$
Модуль упругости $E_{12} = E_1 \cdot E_2, \text{ Па}^2$	$M^2 L^{-2} T^{-4}$	$\pi_{E_{12}} = \frac{E_1 E_2 d^4}{P^2}$
Теплопроводность $\lambda_{123} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]^3$	$M^3 L^3 T^{-9} \Theta^{-3}$	$\pi_{\lambda_{123}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\sqrt{\sigma_{12}^3} d^3}$
Твёрдость загрязнений на поверхности контакта $HB_k, \text{ Па}$	$ML^{-1} T^{-2}$	$\pi_{HB_k} = \frac{HB_k d^2}{P}$
<i>физические параметры</i>		
Масса контактирующих тел $M_{12} = M_1 \cdot M_2, \text{ кг}^2$	$M^2$	$\pi_{M_{12}} = \frac{M_1 M_2 v^4}{P^2 d^2}$
<i>температурные характеристики</i>		
Температура объёмная поверхности трения $\Theta_{12} = \Theta_1 \cdot \Theta_2, \text{ }^\circ\text{C}^2$	$\Theta^2$	$\pi_{\Theta_{12}} = \frac{\Theta_1 \Theta_2 \sigma_{12} d^4}{P^2 v^2}$
Градиент температуры $\Delta\Theta_{12} = \Delta\Theta_1 \cdot \Delta\Theta_2, \text{ }^\circ\text{C}^2/\text{м}^2$	$L^{-2} \Theta^2$	$\pi_{\Delta\Theta_{12}} = \frac{\Delta\Theta_1 \Delta\Theta_2 \sigma_{12} d^6}{P^2 v^2}$

Уравнение, составленное из критериев подобия, получит вид:

$$f = \Phi \left( \frac{\omega d}{v}; \frac{A}{d}; \frac{[P/\tau] \cdot d}{P \cdot v}; \frac{A_{a1} \cdot A_{a2}}{d^4}; \frac{Kz_1 \cdot Kz_2}{d^6}; \frac{HB_1 \cdot HB_2 \cdot d^4}{P^2}; \frac{E_1 E_2 d^4}{P^2}; \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\sqrt{\sigma_{12}^3} d^3}; \frac{HB_k d^2}{P}; \frac{M_1 M_2}{d^2}; \frac{\Theta_1 \Theta_2 \sigma_{12} d^4}{P^2 v^2}; \frac{\text{grad } \Theta_1 \text{ grad } \Theta_2 \sigma_{12} d^6}{P^2 v^2} \right). \quad (1.45)$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Согласно  $\pi$ -теореме число критериев  $n = m - k = 16 - 4 = 12$ , что соответствует уравнению (1.45).

*Масштабы подобия* для пересчёта с натуры (объекта исследования) на модель и наоборот определяют по следующей методике. Учитывая, что процессы для модели и натуры подобны, а одноимённые критерии тождественны, уравнение подобия (1.45) записывается в симплексной форме:

$$C_f = \Phi \left( \frac{C_\omega C_l}{C_v}; \frac{C_A}{C_l}; \frac{C_{P/\tau} C_l}{C_P C_v}; \frac{C_{A_{a12}}}{C_l^4}; \frac{C_{Kz_{12}}}{C_l^6}; \frac{C_{HB_{12}} C_l^4}{C_P^2}; \frac{C_{E_{12}} C_l^4}{C_P^2}; \frac{C_{\lambda_{123}}}{C_{\sigma_{12}^{3/2}} C_l^3}; \frac{C_{HB_k} C_l^2}{C_P}; \frac{C_{M_{12}}}{C_l^2}; \frac{C_{\Theta_{12}} C_{\sigma_{12}} C_l^4}{C_P^2 C_v^2}; \frac{C_{\Delta\Theta_{12}} C_{\sigma_{12}} C_l^6}{C_P^2 C_v^2} \right). \quad (1.46)$$

За симплекс известного параметра примем отношение линейных размеров оригинала и модели, относительно которого решается система:

$$C_l = d_o / d_m ,$$

где  $d_o, d_m$  – посадочный диаметр шпинтона 1 и втулки 2 (рис. 1.6).

При записи в симплексной форме каждый критерий подобия приравнивается к единице (1.12) и выражается далее через симплекс известного параметра, например геометрического масштаба  $C_l$

$$\pi_{P/\tau} = \frac{C_{P/\tau} C_l}{C_P C_v} = idem, \text{ то есть } \frac{C_{P/\tau}}{C_P C_v} = C_l^{-1} .$$

Логарифмируя каждый критерий, представленный в симплексной форме, его можно рассматривать как линейное уравнение.

Составим из критериев (1.46) систему линейных уравнений, описывающих моделируемый процесс. Чтобы каждое из уравнений системы (1.46) состояло из одноимённых членов, что даёт возможность записать определитель системы, симплексы параметров, которые включены в критерии, дописываются в виде  $0 \cdot \ln C_\omega, 0 \cdot \ln C_M$  и так далее:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \ln C_\omega + 0 \cdot \ln C_A + 0 \cdot \ln C_{P/\tau} + \dots + 0 \cdot \ln C_{\Delta\Theta_{12}} + 0 \cdot \ln C_P + 1 \cdot \ln C_v + 0 \cdot \ln C_\sigma &= -1 \cdot \ln C_l \\ 0 \cdot \ln C_\omega + 1 \cdot \ln C_A + 0 \cdot \ln C_{P/\tau} + \dots + 0 \cdot \ln C_{\Delta\Theta_{12}} + 0 \cdot \ln C_P + 0 \cdot \ln C_v + 0 \cdot \ln C_\sigma &= 1 \cdot \ln C_l \\ 0 \cdot \ln C_\omega + 0 \cdot \ln C_A + 1 \cdot \ln C_{P/\tau} + \dots + 0 \cdot \ln C_{\Delta\Theta_{12}} + 1 \cdot \ln C_P + 1 \cdot \ln C_v + 0 \cdot \ln C_\sigma &= -1 \cdot \ln C_l \\ &\vdots \\ 0 \cdot \ln C_\omega + 0 \cdot \ln C_A + 0 \cdot \ln C_{P/\tau} + \dots + 1 \cdot \ln C_{\Delta\Theta_{12}} + 2 \cdot \ln C_P + 2 \cdot \ln C_v - 1 \cdot \ln C_\sigma &= -6 \cdot \ln C_l \end{aligned}$$

В результате получаем систему из 12 строк (числа критериев подобия небазисных параметров) и 16 столбцов (влияющих параметров)

$C_\omega$	$C_A$	$C_{P/\tau}$	$C_{A_{q12}}$	$C_{Kz_{12}}$	$C_{HB_{12}}$	$C_{E_{12}}$	$C_{\lambda_{123}}$	$C_{HB_k}$	$C_{M_{12}}$	$C_{\Theta_{12}}$	$C_{\Delta\Theta_{12}}$	$C_P$	$C_v$	$C_{\sigma_{12}}$	$C_l$
1	0											0	1	0	-1
0	1	0										0	0	0	1
	0	1	0									1	1	0	-1
		0	1	0								0	0	0	4
			0	1	0							0	0	0	6
				0	1	0						2	0	0	-4
					0	1	0					2	0	0	-4
						0	1	0				0	0	1,5	3
							0	1	0			1	0	0	-2
								0	1	0		0	0	0	2
									0	1	0	2	2	-1	-4
										0	1	2	2	-1	-6

Для приведения системы к стандартному виду в соответствии с третьей теоремой подобия введём в рассмотрение граничные условия:

- 1) частоты собственных колебаний  $\omega, c^{-1} - C_\omega = 1$ ;
- 2) твёрдости контактирующих тел  $HB_{12}, \text{Па}^2 - C_{HB_{12}} = 1$ ;
- 3) градиента температуры  $\Delta\Theta_{12}, \text{°C}^2/\text{м}^2 - C_{\Delta\Theta_{12}} = 1$ ,

то есть при экспериментальных исследованиях необходимо выполнить для модели и природы одинаковыми: частоты собственных и вынужденных колебаний  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ , твёрдости контактирующих тел  $HB_{12}$ ,  $\text{Па}^2$  и градиент температуры обоих контактирующих тел  $\Delta\Theta_{12}$ ,  $^{\circ}\text{C}^2/\text{м}^2$ . С вводом краевых условий система становится замкнутой, состоящей из матрицы уравнений ( $12 \times 13$ )

$$\begin{array}{cccccccc|cccc}
 C_A & C_{P/\tau} & C_{Aa_{12}} & C_{K\Gamma_{12}} & C_{E_{12}} & C_{\lambda_{123}} & C_{HB_k} & C_{M_{12}} & C_{\Theta_{12}} & C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & & & & & & & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 & & 0 & 1 & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 & & & & 0 & 0 & & & & 2 & 0 & 0 & -4 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & & & 2 & 0 & 0 & -1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1,5 & 3 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & -4 \\
 & & & & & & & & & 0 & 2 & 2 & -1 & -6
 \end{array} \quad (1.47)$$

Определитель (1.47) решается на ЭВМ по стандартной программе методом исключения неизвестных. Он может быть решён и без матрицы путём раскрытия её по единицам диагонали. Для этого вычислим следующий определитель, составленный из параметров граничных условий

$$D'_0 = \begin{array}{l} \omega: \\ HB_{12}: \\ \Delta\Theta_{12}: \end{array} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}^{C_P \ C_v \ C_{\sigma_{12}}} = 2.$$

Поочерёдной заменой столбцов определителя  $D'_0$  столбцами, составленными из размерностей параметров, представленных в системе, приведённого к стандартному виду (1.47), находим значения масштабов подобия. Определители матриц данных параметров представлены уравнениями

$$D_A = \begin{array}{l} \omega: \\ HB_{12}: \\ \Delta\Theta_{12}: \\ A: \end{array} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{C_P \ C_v \ C_{\sigma_{12}} \ C_l} = 2; \quad D_{P/\tau} = \begin{array}{l} \omega: \\ HB_{12}: \\ \Delta\Theta_{12}: \\ P/\tau: \end{array} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}^{C_P \ C_v \ C_{\sigma_{12}} \ C_l} = 4;$$

$$\begin{aligned}
D_{A_{a12}} &= \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ A_{a12}: & \end{matrix} = 8; & \quad D_{Kz_{12}} = \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ Kz_{12}: & \end{matrix} = 12; \\
D_{E_{12}} &= \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ E_{12}: & \end{matrix} = 0; & \quad D_{\lambda_{123}} = \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 3 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ \lambda_{123}: & \end{matrix} = 6; \\
D_{HB_\kappa} &= \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ HB_\kappa: & \end{matrix} = 0; & \quad D_{M_{12}} = \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ M_{12}: & \end{matrix} = 4; \\
D_{\Theta_{12}} &= \begin{matrix} C_P & C_v & C_{\sigma_{12}} & C_l \\ \omega: & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\ HB_{12}: & \\ \Delta\Theta_{12}: & \\ \Theta_{12}: & \end{matrix} = 4.
\end{aligned}$$

Далее определим численные значения показателей степени при параметрах

$$\begin{aligned}
\alpha_A &= \frac{D_A}{D'_0} = \frac{2}{2} = 1; & \alpha_{P/\tau} &= \frac{D_{P/\tau}}{D'_0} = \frac{4}{2} = 2; & \alpha_{A_{a12}} &= \frac{D_{A_{a12}}}{D'_0} = \frac{8}{2} = 4; \\
\alpha_{Kz_{12}} &= \frac{D_{Kz_{12}}}{D'_0} = \frac{12}{2} = 6; & \alpha_{E_{12}} &= \frac{D_{E_{12}}}{D'_0} = \frac{0}{2} = 0; & \alpha_{\lambda_{123}} &= \frac{D_{\lambda_{123}}}{D'_0} = \frac{6}{2} = 3; \\
\alpha_{HB_\kappa} &= \frac{D_{HB_\kappa}}{D'_0} = \frac{0}{2} = 0; & \alpha_{M_{12}} &= \frac{D_{M_{12}}}{D'_0} = \frac{4}{2} = 2; & \alpha_{\Theta_{12}} &= \frac{D_{\Theta_{12}}}{D'_0} = \frac{4}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Система уравнений (1.46) будет иметь следующие корни:

$$\begin{aligned}
\ln C_A &= \alpha_A \ln C_l, & C_A &= C_l^{\alpha_A} = C_l; \\
\ln C_{P/\tau} &= \alpha_{P/\tau} \ln C_l, & C_{P/\tau} &= C_l^{\alpha_{P/\tau}} = C_l^2; \\
\ln C_{A_{a12}} &= \alpha_{A_{a12}} \ln C_l, & C_{A_{a12}} &= C_l^{\alpha_{A_{a12}}} = C_l^4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln C_{Kz_{12}} &= \alpha_{Kz_{12}} \ln C_l, & C_{Kz_{12}} &= C_l^{\alpha_{Kz_{12}}} = C_l^6; \\
\ln C_{E_{12}} &= \alpha_{E_{12}} \ln C_l, & C_{E_{12}} &= C_l^{\alpha_{E_{12}}} = C_l^0 = 1; \\
\ln C_{\lambda_{123}} &= \alpha_{\lambda_{123}} \ln C_l, & C_{\lambda_{123}} &= C_l^{\alpha_{\lambda_{123}}} = C_l^3; \\
\ln C_{HB_\kappa} &= \alpha_{HB_\kappa} \ln C_l, & C_{HB_\kappa} &= C_l^{\alpha_{HB_\kappa}} = C_l^0 = 1; \\
\ln C_{M_{12}} &= \alpha_{M_{12}} \ln C_l, & C_{M_{12}} &= C_l^{\alpha_{M_{12}}} = C_l^2; \\
\ln C_{\Theta_{12}} &= \alpha_{\Theta_{12}} \ln C_l, & C_{\Theta_{12}} &= C_l^{\alpha_{\Theta_{12}}} = C_l^2.
\end{aligned}$$

Масштабы подобия, или масштабные коэффициенты перехода с объекта на модель, получают вид:

$$\left. \begin{aligned}
C_A &= \frac{[A]_H}{[A]_M} = C_l; & C_{P/\tau} &= \frac{[P/\tau]_H}{[P/\tau]_M} = C_l^2; \\
C_{A_{a12}} &= \frac{[A_{a1}A_{a2}]_H}{[A_{a1}A_{a2}]_M} = C_l^4; & C_{Kz_{12}} &= \frac{[Kz_1Kz_2]_H}{[Kz_1Kz_2]_M} = C_l^6; \\
C_{E_{12}} &= \frac{[E_1E_2]_H}{[E_1E_2]_M} = 1; & C_{\lambda_{123}} &= \frac{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]_H}{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]_M} = C_l^3; \\
C_{HB_\kappa} &= \frac{[HB_\kappa]_H}{[HB_\kappa]_M} = 1; & C_{M_{12}} &= \frac{[M_1M_2]_H}{[M_1M_2]_M} = C_l^2; \\
C_{\Theta_{12}} &= \frac{[\Theta_1\Theta_2]_H}{[\Theta_1\Theta_2]_M} = C_l^2.
\end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Используя соотношения (1.48), получим формулы для пересчёта натуральных параметров на модельные с использованием масштаба геометрических размеров  $C_l$ . Результаты пересчёта сведены в табл. 1.10.

Используя критериальные уравнения (1.46), выразим базисные параметры через параметр известного фактора – линейный масштаб

$$\begin{aligned}
\pi_{HB_\kappa} &= \frac{C_{HB_\kappa} C_l^2}{C_P} = 1, & C_{HB_\kappa} &= 1, & C_P &= C_l^2; \\
\pi_\omega &= \frac{C_\omega C_l}{C_v} = 1, & C_\omega &= 1, & C_v &= C_l; \\
\pi_{\Delta\Theta_{12}} &= \frac{C_{\Delta\Theta_{12}} C_{\sigma_{12}} C_l^6}{C_P^2 C_v^2} = 1, & C_{\Delta\Theta_{12}} &= 1, & C_{\sigma_{12}} &= \frac{C_P^2 C_v^2}{C_{\Delta\Theta_{12}} C_l^6} = \frac{C_l^4 C_l^2}{C_l^6} = 1,
\end{aligned}$$

а результаты вычислений сведём в табл. 1.10 пересчётных параметров.

Табл. 1.10 – Пересчётные параметры с натуры на модель

Параметр	Критерий подобия	Масштаб подобия	Формула пересчёта с оригинала на модель
1	2	3	4
Нагрузка $P, H$	Базисные параметры	$C_P = C_l^2$	$[P]_M = \frac{[P]_H}{C_l^2}$
Скорость скольжения $v, \text{м/с}$		$C_v = C_l$	$[v]_M = \frac{[v]_H}{C_l}$
Коэффициент теплоотдачи $\sigma_{12} = \sigma_1 \cdot \sigma_2, [\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})]^2$		$C_{\sigma_{12}} = 1$	$[\sigma_{12}]_M = [\sigma_{12}]_H$
Посадочный диаметр $d, \text{м}$		$C_l = \text{var}$	$[d]_M = \frac{[d]_H}{C_l}$
Частота собственных колебаний $\omega, \text{с}^{-1}$	$\pi_\omega = \frac{\omega d}{v}$	$C_\omega = 1$	$[\omega]_M = [\omega]_H$
Амплитуда колебаний $A, \text{м}$	$\pi_A = \frac{A}{d}$	$C_A = C_l$	$[A]_M = \frac{[A]_H}{C_l}$
Скорость нарастания нагрузки $P/\tau, \text{Н/с}$	$\pi_{P/\tau} = \frac{[P/\tau] \cdot d}{P \cdot v}$	$C_{P/\tau} = C_l^2$	$[P/\tau]_M = \frac{[P/\tau]_H}{C_l^2}$
Площади теплоотдающих поверхностей $A_{a12} = A_{a1} \cdot A_{a2}, \text{м}^4$	$\pi_{A_{a12}} = \frac{A_{a12}}{d^4}$	$C_{A_{a12}} = C_l^4$	$[A_{a12}]_M = \frac{[A_{a12}]_H}{C_l^4}$
Комплекс геометрических размеров $K_{z12} = K_{z1} \cdot K_{z2}, \text{м}^6$	$\pi_{K_{z12}} = \frac{K_{z12}}{d^6}$	$C_{K_{z12}} = C_l^6$	$[K_{z12}]_M = \frac{[K_{z12}]_H}{C_l^6}$
Твёрдость контактирующих тел $HB_{12} = HB_1 \cdot HB_2, \text{Па}^2$	$\pi_{HB_{12}} = \frac{HB_{12} \cdot d^4}{P^2}$	$C_{HB_{12}} = 1$	$[HB_{12}]_M = [HB_{12}]_H$
Модуль упругости $E_{12} = E_1 \cdot E_2, \text{Па}^2$	$\pi_{E_{12}} = \frac{E_{12} d^4}{P^2}$	$C_{E_{12}} = 1$	$[E_{12}]_M = [E_{12}]_H$
Теплопроводность $\lambda_{123} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})]^3$	$\pi_{\lambda_{123}} = \frac{\lambda_{123}}{\sqrt{\sigma_{12}^3} d^3}$	$C_{\lambda_{123}} = C_l^3$	$[\lambda_{123}]_M = \frac{[\lambda_{123}]_H}{C_l^3}$
Твёрдость загрязнений на поверхности контакта $HB_k, \text{Па}$	$\pi_{HB_k} = \frac{HB_k d^2}{P}$	$C_{HB_k} = 1$	$[HB_k]_M = [HB_k]_H$
Масса контактирующих тел $M_{12} = M_1 \cdot M_2, \text{кг}^2$	$\pi_{M_{12}} = \frac{M_{12} v^4}{P^2 d^2}$	$C_{M_{12}} = C_l^2$	$[M_{12}]_M = \frac{[M_{12}]_H}{C_l^2}$

1	2	3	4
Температура объём- ная поверхности трения $\Theta_{12} = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ , $^{\circ}\text{C}^2$	$\pi_{\Theta_{12}} = \frac{\Theta_{12} \sigma_{12} d^4}{P^2 v^2}$	$C_{\Theta_{12}} = C_l^2$	$[\Theta_{12}]_M = \frac{[\Theta_{12}]_H}{C_l^2}$
Градиент температу- ры $\Delta\Theta_{12} = \Delta\Theta_1 \cdot \Delta\Theta_2$ , $^{\circ}\text{C}^2/\text{M}^2$	$\pi_{\Delta\Theta_{12}} = \frac{\Delta\Theta_{12} \sigma_{12} d^6}{P^2 v^2}$	$C_{\Delta\Theta_{12}} = 1$	$[\Delta\Theta_{12}]_M = [\Delta\Theta_{12}]_H$

С использованием вышерассмотренной методики был сконструирован стенд для подбора и испытаний материалов втулок фрикционного гасителя колебаний тележек пассажирских вагонов КВЗ-ЦНИИ, подобрано новое металлопокрытие со стабильными триботехническими характеристиками. Погрешность лабораторных испытаний на трение и износ относительно данных эксплуатации составила 10–15 %.

## 2 ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ФРИКЦИОННЫХ ПОДСИСТЕМ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

При решении научно-исследовательских задач при создании или модернизации машин, механизмов, подвижного состава зачастую требуется провести комплексные расчётно-экспериментальные испытания. На начальном этапе ограничиваются математическим моделированием. Однако практически любые изменения в конструкции машин, механизмов или подвижного состава завершаются физическими экспериментами либо на натурном подвижном составе, либо на модельном стенде, выполненном в некотором геометрическом масштабе. В первом указанном случае такие испытания зачастую требуют больших капиталовложений на создание и постройку натурального образца, либо разрешений ведомственных организаций на изменение конструкции, что связано с обеспечением безопасной её эксплуатации.

В этой связи в данном подразделе приведём методику выполнения научно-исследовательской работы по созданию и обоснованию физико-математической модели тягового подвижного состава, следующего в криволинейных участках пути малого радиуса. Целью исследований является определение *оптимальной ширины колеи в кривых малого радиуса*.

Так как условия вписывания локомотивов с трёхосными тележками в криволинейные участки пути малого радиуса являются самыми неблагоприятными, то в качестве типового подвижного состава был выбран магистральный тепловоз 2ТЭ116.

Кузов тепловоза 2ТЭ116 выполнен с несущей рамой. Тягово-ходовая часть секции тепловоза выполнена тележечной на двух подвижных тележках с осевой формулой  $3_0-3_0$ . От конструкции тележек в значительной степени зависят передача и реализация силы тяги, плавность хода и взаимодействие экипажной части и пути, безопасность движения и другие динамические характеристики тепловоза. Тележка представляет собой унифицированную бесчелюстную трёхосную тележку с индивидуальным приводом каждой колёсной пары через односторонний и одноступенчатый редуктор от тягового электродвигателя постоянного тока ЭД-118А или ЭД-118Б с циркуляционной принудительной системой смазки моторно-осевых подшипников. Для улучшения прохождения кривых участков пути средняя колёсная пара имеет свободный ход относительно рамы тележки. Нагрузка от надтележечного строения тепловоза передаётся на четыре комбинированные с резинометаллическими элементами роликовые опоры, которые размещены на боковинах рамы тележки. Как возвращающий момент, так и момент упругих сил опор обеспечивают гашение относительных колебаний кузова и тележек в горизонтальной плоскости без установки дополнительных демпферов при движении тепловоза со скоростью до 120 км/ч.

Как было сказано ранее, физико-математическое моделирование натуральных систем включает несколько этапов. Так, при математическом

моделировании критерием выбора оптимальности ширины колеи примем расчётное значение фактора износа (Дж/с) по всем колёсным парам. Если при уменьшении ширины колеи с 1535/1530 мм до 1520 мм суммарный фактор износа снижается, то ширина колеи 1520 мм является оптимальной и унификация ширины колеи в кривых малого радиуса допустима. Уточнение результатов математического моделирования выполним в последующем подразделе на универсальном модельном стенде «подвижной состав – путь». При этом критерием выбора оптимальности ширины колеи примем минимальную величину боковой силы (Н) по всем колёсным парам, возникающей в контакте колёс и рельсов.

## 2.1 Математическое моделирование подвижного состава

Математическая модель допускает многократное повторение эксперимента при различных значениях параметров исследуемой системы. Основной принцип при её построении заключается в том, что при минимальной сложности она должна наиболее полно отражать исследуемые свойства натурального объекта и позволять установить закономерности изменения динамических характеристик в зависимости от изменения параметров системы.

Методы составления математических моделей рельсовых экипажей детально отработаны для различных условий. Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, силы взаимодействия колёс и рельсов и силы в связях экипажа при движении в кривых определяются в основном колебаниями отбоя и виляния подвижных частей экипажа. Параметры выбранного моделируемого магистрального тепловоза 2ТЭ116 представлены в табл. 2.1.

Табл. 2.1 – Расчётные параметры тепловоза 2ТЭ116 и моделируемых участков пути

Параметр	Обозначение	Значение
1	2	3
масса локомотива в целом, т	$m$	275,6
масса кузова, приходящаяся на тележку, т	$m_B$	91,3
момент инерции кузова, т·м <sup>2</sup>	$J_B$	1400
масса тележки, подрессоренная, т	$m_P$	10,5
момент инерции тележки, т·м <sup>2</sup>	$J_P$	30
неподрессоренная масса колёсной пары, т	$m_n$	4,25
статическая нагрузка колёсной пары на рельсы, кН	$2P$	225,4
половина расстояния между центрами тележек, м	$a_в$	4,815
половина шкворневой базы кузова, м	$a_{ш}$	3,315

Продолжение табл. 2.1

1	2	3
продольное расстояние шкворня относительно средней колёсной пары, м	$a_c$	-0,185
половина базы тележки, м	$a_p$	1,85
поперечное упругое перемещение кузова, мм	$y_{B1}$ $y_{B2}$	0...20 20...40
поперечная жёсткость кузов-тележка, кН/м	$C_{YB0}$ $C_{YB1}$	756 4000
поперечное сопротивление кузов-тележка, кН·с/м	$B_{YB}$	60
угловая жёсткость в связи кузов-тележка, кН·м/рад	$C_{\phi B}$	300
угловое сопротивление в связи кузов-тележка, кН·с·м/рад	$B_{\phi B}$	0
поперечная жёсткость в связи рама тележки – крайняя колёсная пара, кН/м	$C_{YP1}$	8000
поперечная жёсткость в связи рама тележки – средняя колёсная пара ( $y > y_{20}$ ), кН/м	$C_{YP2}$	8000
поперечное сопротивление в связи рама тележки – крайняя колёсная пара, кН·с/м	$B_{YP1}$	0
поперечное сопротивление в связи рама тележки – средняя колёсная пара, кН·с/м	$B_{YP2}$	0
свободный разбег средней колёсной пары (на сторону), м	$y_{P20}$	0,014
половина максимального зазора в колее, м – в прямолинейном и криволинейном $R > 350$ м участках пути и ширине колеи 1520 мм – в криволинейном $R > 300$ м участке пути и ширине колеи 1530 мм – в криволинейном $R > 250$ м участке пути и ширине колеи 1535 мм	$\sigma_0$ $\sigma_1$ $\sigma_1$	0,007 0,012 0,0145
высота центра тяжести, м	$h_C$	2
половина расстояния между кругами катания, м	$bs$	0,8
радиус колеса, м	$r_o$	0,525
коничность бандажа	$\beta$	0,05
боковая жёсткость пути при скреплениях ЖБР-65, МН/м	$C_r$	23
расчётная скорость, км/ч	$V_p$	35 50 70

1	2	3
радиус кривой пути, м	$R$	250 300
возвышение наружной рельсовой нити над внутренней, мм	$h_y$	130 100

Модель пути представим в виде следующих участков:

- прямого участка пути на входе длиной  $s_{r0} = 10$  м и возвышением  $h = 0$  мм;
- переходной кривой на входе длиной  $s_{r1} = 50$  м и линейным повышением возвышения;
- круговой кривой длиной 150 м и заданным возвышением (табл. 2.1);
- переходной кривой на выходе длиной  $s_{r2} = 50$  м и линейным снижением возвышения до минимального уровня;
- участка прямой длиной  $s_R = 200$  м и нулевым возвышением.

Изменение ширины колеи в переходной кривой от номинального на прямой до допустимого (с учётом уширения) в круговой кривой примем по линейному закону.

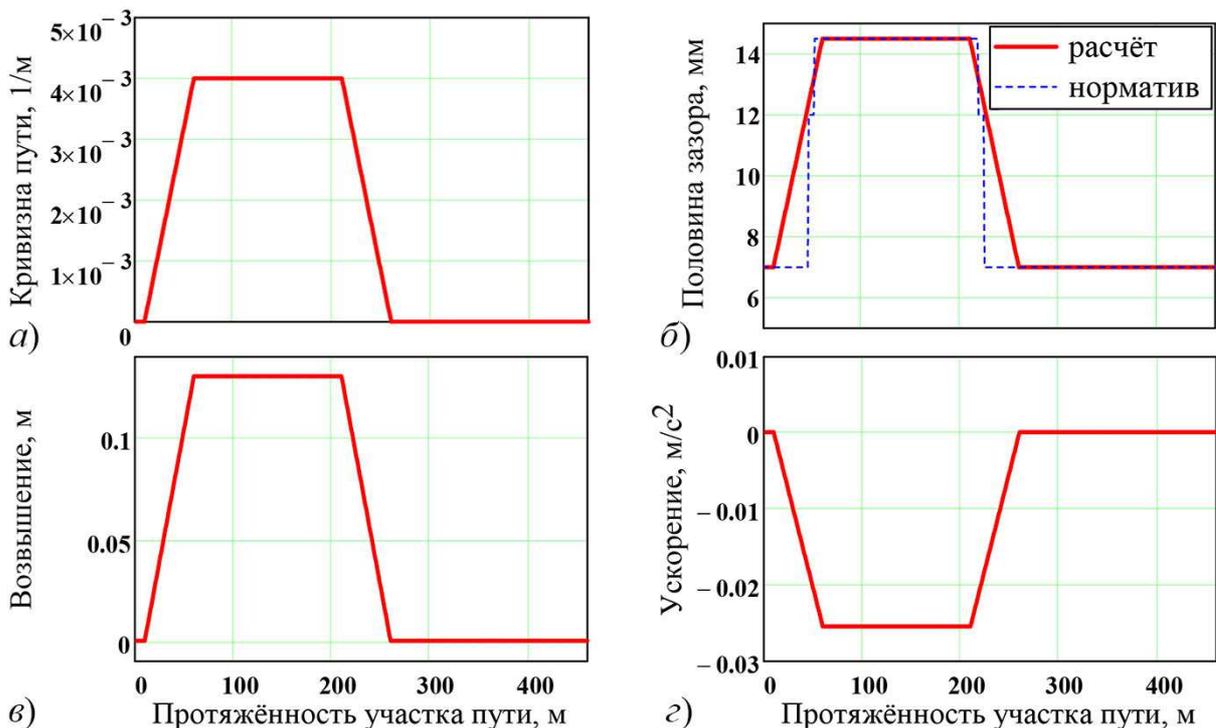


Рис. 2.1 – Параметры моделируемого железнодорожного пути: а – функция кривизны пути; б – половина свободного зазора в колее; в – возвышение наружного рельса; г – расчётное значение непогашенного ускорения

Для решения задачи необходимо представить переменные в виде функции кривизны пути  $\rho$  от пройденного пути, где кривизна пути  $\rho$  (рис. 2.1,а) обратно пропорциональна радиусу кривой  $R$ :

$$\begin{aligned}
\rho(s) = & \rho_0 + \Phi(s - s_{r0}) \frac{\rho_1 - \rho_0}{s_{r1}} (s - s_{r0}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1}) \frac{\rho_1 - \rho_0}{s_{r1}} (s - s_{r0} - s_{r1}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) \frac{\rho_1 - \rho_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) + \\
& + \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}) \frac{\rho_1 - \rho_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $s$  – пройденный путь, м;

$\Phi(s)$  – функция Хэвисайда;

$\rho_1 = 1/R$  – кривизна траектории пути;

$\rho_0 = 1/\infty = 0$  – кривизна прямого участка пути;

По нормам устройства пути величина половины свободного зазора в колее должна соответствовать регламентирующему выражению:

$$\sigma_{\max}(\rho) = \sigma_0 + 0,005\Phi(349 - 1/\rho) + 0,0025\Phi(299 - 1/\rho),$$

а учёт уширения колее в кривых различных радиусов реализуется функцией половины свободного зазора в колее в зависимости от кривизны пути (рис. 2.1,б)

$$\begin{aligned}
\sigma(s) = & \sigma_0 + \Phi(s - s_{r0}) \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{s_{r1}} (s - s_{r0}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1}) \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{s_{r1}} (s - s_{r0} - s_{r1}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) + \\
& + \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}) \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\sigma_1$  – свободный зазор в кривой пути (табл. 2.1);

$\sigma_0$  – свободный зазор в прямолинейном участке пути.

Функция возвышения наружного рельса вдоль пути (рис. 2.1,в):

$$\begin{aligned}
h(s) = & h_0 + \Phi(s - s_{r0}) \frac{h_1 - h_0}{s_{r1}} (s - s_{r0}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1}) \frac{h_1 - h_0}{s_{r1}} (s - s_{r0} - s_{r1}) - \\
& - \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) \frac{h_1 - h_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R) + \\
& + \Phi(s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}) \frac{h_1 - h_0}{s_{r2}} (s - s_{r0} - s_{r1} - s_R - s_{r2}),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $h_1$  – возвышение наружного рельса в круговой кривой пути (табл. 2.1);

$h_0$  – возвышение наружного рельса в прямолинейном участке пути.

Введём в рассмотрение задачи перераспределение нагрузок от колёс на рельсы, вызванные реализацией силы тяги и торможения, действием центробежных сил, динамическими процессами при колебаниях экипажа. Для исследования изменения сил в горизонтальной плоскости, возникающих при прохождении кривых участков пути, будем рассматривать изменение вертикальной нагрузки от колёс на рельсы только от действия непогашенного поперечного ускорения (рис. 2.1,з)

$$a_n(s) = V^2 \cdot \rho(s) - \frac{g \cdot h(s)}{2 \cdot bs}, \quad (2.4)$$

где  $V$  – скорость движения подвижного состава, м/с;

$\rho$  – кривизна пути (2.1),  $\text{м}^{-1}$ ;

$g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$ ;

$h$  – возвышение наружного рельса (2.3), м;

$bs$  – половина расстояния между кругами катания (табл. 2.1), м.

Рассмотрим классическую схему двухточечного контакта колеса с рельсом (рис. 2.2).

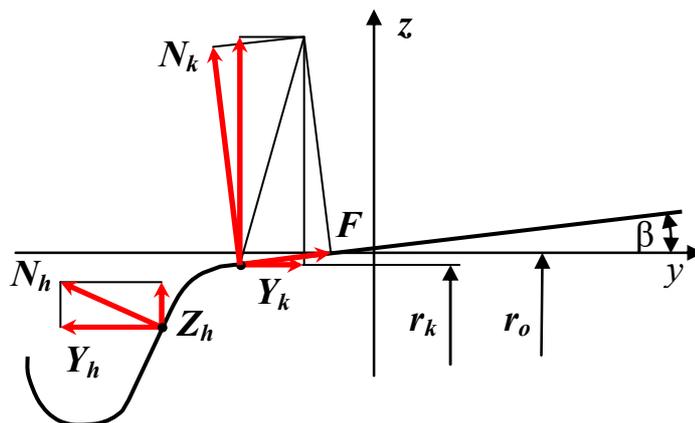


Рис. 2.2 – Схема сил в контакте колеса и рельса

Проекции переносной скорости  $V$  на оси координат инерциальной системы  $xOy$  равны

$$\begin{aligned} V_x &= V \cdot \cos \psi; \\ V_y &= V \cdot \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\psi$  – угол поворота колёс в профиле пути.

В общем случае нагрузку от колеса на рельс следует рассматривать как переменную. Трибологическое взаимодействие колёс и рельсов (рис. 2.3) описывается на основании *теории крипа* в зависимости от скорости проскальзывания колёс по рельсам.

Переносное движение колёсной пары на участке пути с кривизной  $\rho$  представим состоящим из поступательного движения центра масс со скоростью  $v$  в направлении касательной к осевой линии пути и вращения вокруг центра масс с угловой скоростью  $\omega = \rho v$ .

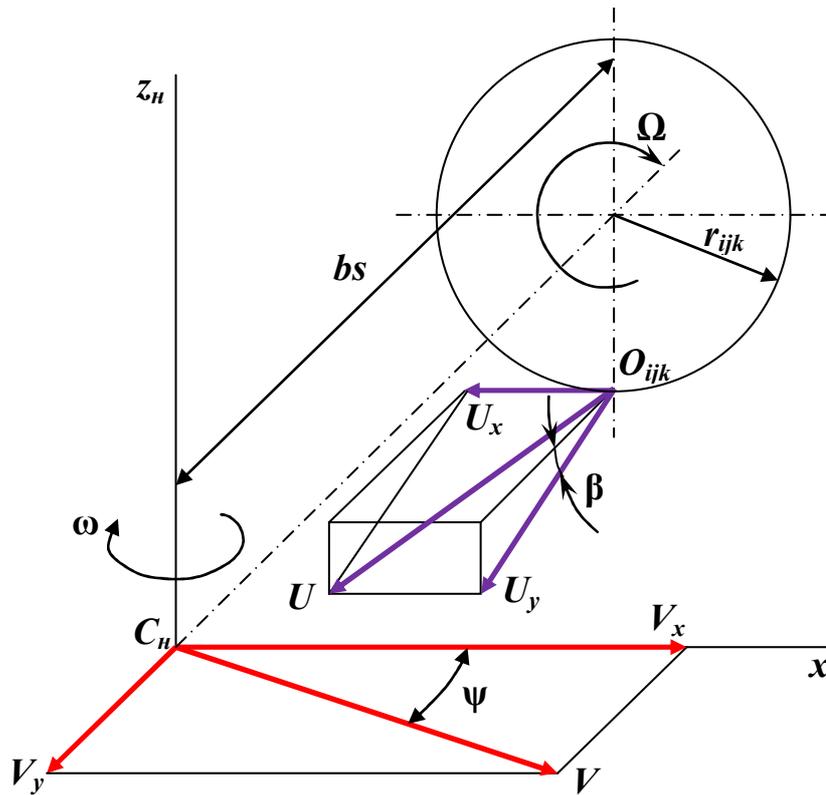


Рис. 2.3 – Схема векторов скоростей в контакте колеса с рельсом

При взаимодействии колёсных пар с рельсами возникает сопротивление, которое можно оценить эмпирической зависимостью *коэффициента трения* для данной скорости (рис. 2.4,а)

$$f_m = 0,25 + \frac{8}{100 + 20V_k}, \quad (2.6)$$

где  $V_k$  – скорость движения подвижного состава (табл. 2.1), км/ч.

В зоне контакта тягового колеса с рельсом возникают продольные  $U_x$  и поперечные  $U_y$  силы, определяемые удельным коэффициентом крипа

$$K_s = \frac{K}{P \cdot f_m}, \quad (2.7)$$

где  $P$  – статическая нагрузка колеса на рельс (табл. 2.1), кН

$$P = \frac{(m_e + 2m_p + 6m_n) \cdot g}{12} = \frac{(91,3 + 2 \cdot 10,5 + 6 \cdot 4,25) \cdot 9,81}{12} = 112,7 \text{ кН}; \quad (2.8)$$

$m_e$  – масса кузова, (табл. 2.1), т;

$m_p$  – подрессоренная масса тележки (табл. 2.1), т;

$m_n$  – неподрессоренная масса (табл. 2.1), т;

$g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,81$ ;

12 – количество колёс локомотива;

$K$  – коэффициент крипа по Мюллеру, кН

$$K = 235 \cdot P - 2,4 \cdot P^2 + 0,01 \cdot P^3,$$

$f_m$  – коэффициент трения скольжения (2.6).

Продольное проскальзывание колёс  $u_x$  определяется несоответствием путей, проходимых колёсами по внешнему и внутреннему рельсам. Для случая движения на выбеге без боксования и юза

$$u_{xij} = \Delta r_k + (-1)^k \cdot bs \cdot \left( \rho(s) - \frac{\dot{\psi}_{ij}}{V} \right); \quad (2.9)$$

где  $i$  – номер тележки ( $i = 1, 2$ );

$j$  – номер колёсной пары ( $j = 1, 2, 3$ );

$k$  – принятый номер колёс, для наружного  $k = 1$ , внутреннего –  $k = 2$ ;

$\Delta r_k$  – относительное изменение радиуса круга катания при поперечном перемещении колёсной пары для конического бандажа

$$\Delta r_k = \frac{\eta_{ij} + (2 - j)a_p \psi_{ij}}{r_0} \beta_k;$$

$h_{ij}$  – поперечное смещение колёсных пар, по расчёту;

$a_p$  – половина базы тележки (табл. 2.1), м;

$\psi_{ij}$  – угол поворота колёсных пар в профиле пути, по расчёту;

$r_0$  – средний радиус катания колеса (табл. 2.1), м;

$\beta_k$  – угол наклона конической части профиля колеса по кругу катания

$$\beta_k = \arctg(0,05) \cdot (-1)^{k+1}. \quad (2.10)$$

$bs$  – половина расстояния между кругами катания, м (табл. 2.1);

$\rho(s)$  – функция изменения кривизны траектории пути (2.1).

$\dot{\psi}_{ij}$  – скорость изменения угла поворота колёсных пар в профиле пути, по расчёту;

$V$  – скорость движения локомотива, м/с (табл. 2.1).

Поперечное скольжение колеса относительно рельса определяется переносной скоростью  $V_y$  (2.5) и разностью относительных скоростей колеса и рельса, что при малых угловых колебаниях позволяет выполнить замену  $\sin \psi_{ij} \cong \psi_{ij}$  и получить приближённое расчётное значение

$$u_{yij} = \psi_{ij} - \frac{\dot{\eta}_{ij} + (2 - j)a_p \dot{\psi}_{ij}}{V} + (2 - j) \cdot a_p \cdot \rho(s), \quad (2.11)$$

где  $\psi_{ij}$  – угол поворота колёсных пар в профиле пути, по расчёту;

$\dot{\eta}_{ij}$  – скорость поперечного смещения колёса, по расчёту.

Полное проскальзывание колеса складывается из величин продольного и поперечного скольжения колеса относительно рельса

$$u_{ij} = \sqrt{u_{xij}^2 + \left( \frac{u_{yij}}{\cos \beta_k} \right)^2}, \quad (2.12)$$

где  $u_{xij}$  – продольное проскальзывание колёс (2.9);

$u_{yij}$  – поперечное скольжение колёс (2.11);

$\beta_k$  – угол наклона конической части профиля колеса (2.10).

Нормальная сила  $N_k$  в точке контакта колеса по кругу катания

$$N_k(s) = \frac{P \cdot \left[ 1 + \frac{h_c}{g \cdot bs} \cdot a_n(s) \cdot (-1)^{k+1} \right]}{\xi(u) \cdot u_y \cdot \operatorname{tg} \beta_k + \cos \beta_k}, \quad (2.13)$$

где  $P$  – статическая нагрузка колеса на рельс (2.8), кН;

$h_c$  – высота центра тяжести локомотива от уровня головок рельсов (табл. 2.1), м;

$a_n(s)$  – непогашенное поперечное ускорение (2.4);

$\xi(u)$  – нелинейная функция касательной силы трения в точке контакта колеса и рельса (рис. 2.4, б)

$$\xi(u) = f_m \frac{K_S}{\sqrt{1 + K_S^2 u^2}}, \quad (2.14)$$

$f_m$  – эмпирический коэффициент трения скольжения (2.6);

$K_S$  – удельный коэффициент крива (2.7);

$u$  – полное проскальзывание колеса относительно рельса (2.12);

$u_y$  – поперечное скольжение колёс (2.11);

$\beta_k$  – угол наклона конической части профиля колеса (2.10).

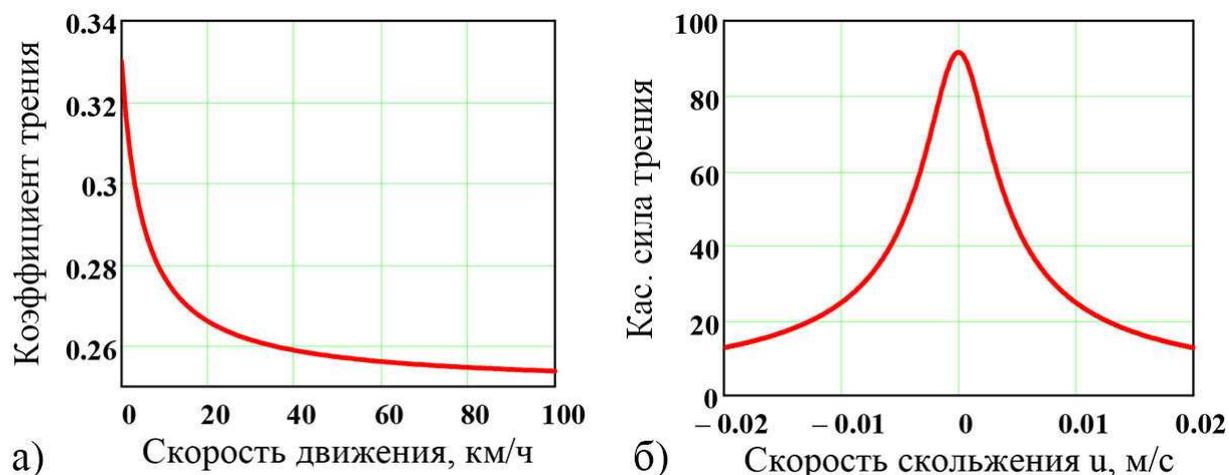


Рис. 2.4 – Теоретические функции: а – зависимости коэффициента трения скольжения от скорости движения локомотива; б – касательной силы трения

Проекции силы Крива в продольном и поперечном направлениях определяются значением нормальной силы в точке контакта колеса по кругу катания (2.13)

$$\begin{aligned}
X_{ijk} &= N_k \cdot \xi(u) \cdot u_x = \\
&= \frac{P \cdot \left[ 1 + \frac{h_c}{g \cdot bs} \cdot a_n(s) \cdot (-1)^{k+1} \right]}{f_m \frac{K_S \cdot u_y}{\sqrt{1 + K_S^2 u^2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_k + \cos \beta_k} \cdot f_m \frac{K_S \cdot u_x}{\sqrt{1 + K_S^2 u^2}} ; \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{ijk} &= N_k \cdot [\xi(u) u_y - \sin \beta_k] = \\
&= \frac{P \cdot \left[ 1 + \frac{h_c}{g \cdot bs} \cdot a_n(s) \cdot (-1)^{k+1} \right]}{f_m \frac{K_S \cdot u_y}{\sqrt{1 + K_S^2 u^2}} \cdot \operatorname{tg} \beta_k + \cos \beta_k} \cdot \left( f_m \frac{K_S \cdot u_y}{\sqrt{1 + K_S^2 u^2}} - \sin \beta_k \right), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

где  $N_k$  – нормальная сила в точке контакта колеса по кругу катания (2.13);

$\xi(u)$  – нелинейная функция касательной силы трения в точке контакта колеса и рельса (2.14);

$u_x$  – продольное проскальзывание колёс (2.9);

$u_y$  – поперечное скольжение колёс (2.11);

$\beta_k$  – угол наклона конической части профиля колеса (2.10).

На основании изучения конструкции конструкции магистрального тепловоза 2ТЭ116 и постановки задачи исследования составлена расчётная схема, представленная на рис. 2.5.

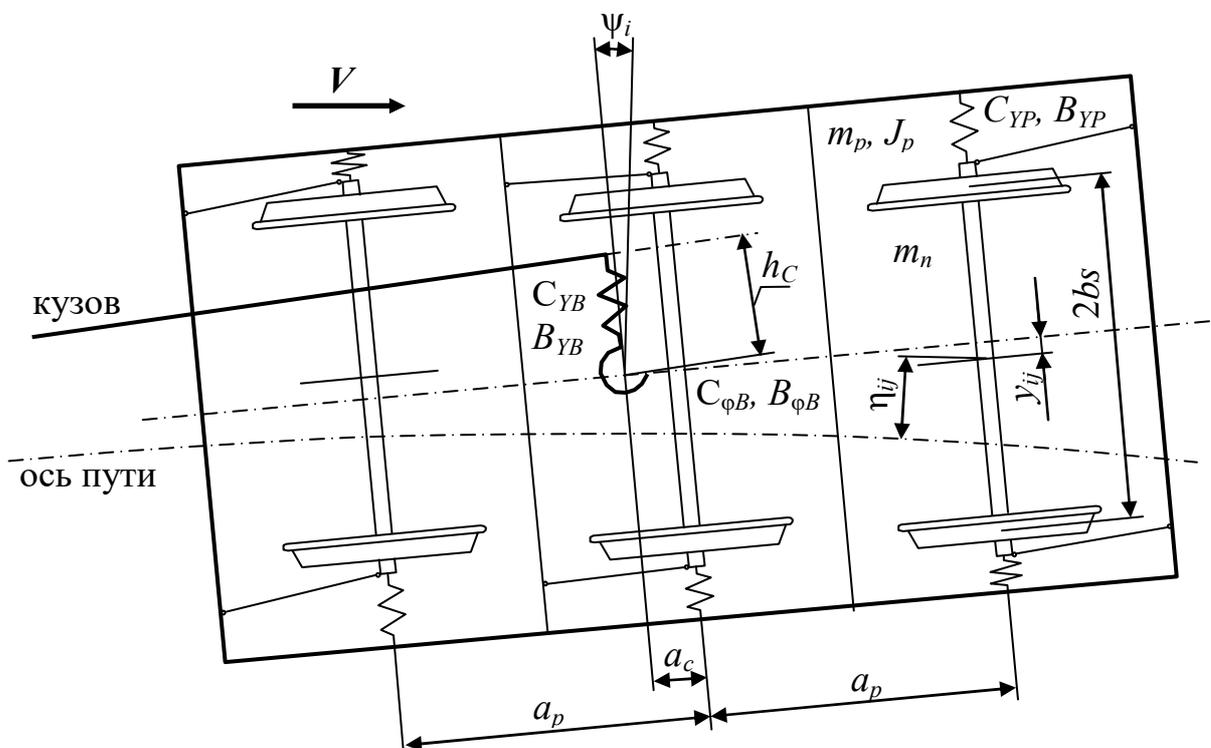


Рис. 2.5 – Расчётная схема тележки тепловоза 2ТЭ116

Продольная жёсткость связи рамы тележки и колёсных пар осуществляется через буксовые поводки. Продольная жёсткость связи рамы тележки и колёсной пары на порядок больше поперечной жёсткости. Поэтому для задачи определения поперечных сил в кривой можно положить, что колёсная пара имеет одну степень свободы – поперечное перемещение, а угол поворота колёсной пары определяется углом поворота тележки.

Магистральный тепловоз в данном случае представлен в виде системы, состоящей из 9 сосредоточенных тел: кузова, обрессоренных частей двух тележек, шести колёсных пар, соединённых между собой упруго-диссипативными связями. Положим, что все тела совершают колебания поперечного отбоя и виляния в горизонтальной плоскости.

Уравнения, описывающие поперечные колебания кузова, имеют вид

$$m_B \ddot{\eta}_B + \sum_{i=1}^2 [B_{YB} (\dot{\eta}_B - \dot{\eta}_{Pi}) + F_{YB} (\eta_B - \eta_{Pi})] = m_B a_n(s), \quad (2.17)$$

где  $m_B$  – масса кузова, приходящаяся на тележку, т (табл. 2.1);

$F_{YB}(\xi)$  – нелинейная упругая характеристика поперечной связи «кузов – тележка», жёсткость которого определяется работой роликовых опор, и участок, включающий дополнительный упругий упор (рис. 2.6,а)

$$F_{YB}(\xi) = C_{YB0} \xi + (C_{YB1} - C_{YB0}) \cdot \left[ \xi + \frac{|\xi - y_{B0}| - |\xi + y_{B0}|}{2} \right] + \\ + 20C_{YB1} \cdot \left[ \xi + \frac{|\xi - y_{B1}| - |\xi + y_{B1}|}{2} \right]; \quad (2.18)$$

$C_{YB0}$ ,  $C_{YB1}$ ,  $B_{YB}$  – коэффициенты жёсткости (кН/м) и сопротивления (кН·с/м) поперечной связи кузова с тележкой (табл. 2.1);

$\eta_B$ ,  $\eta_{Pi}$  – поперечное перемещение центра масс кузова и  $i$ -й тележки;

$y_{B0}$ ,  $y_{B1}$  – поперечное упругое перемещение кузова, м (табл. 2.1);

$a_n(s)$  – непогашенное ускорение, действующее на центр массы (2.4).

Уравнения, описывающие поперечные и угловые колебания обрессоренных частей тележек ( $i = 1, 2$ )

$$m_{Pi} \ddot{\eta}_{Pi} + B_{YP1} (2\dot{\eta}_{Pi} - \dot{\eta}_{1i} - \dot{\eta}_{3i}) + C_{YP1} (2\eta_{Pi} - \eta_{1i} - \eta_{3i}) + \\ + B_{YP2} (\dot{\eta}_{Pi} - \dot{\eta}_{2i}) + F_{YP2} (\eta_{Pi} - \eta_{2i}) = \\ = B_{YP} (\dot{\eta}_B - \dot{\eta}_{Pi}) + F_{YB} (\eta_B - \eta_{Pi}) + m_{Pi} a_n(s); \\ J_{Pi} \ddot{\psi}_{Pi} + a_{Pi} [B_{YP1} (2a_{Pi} \dot{\psi}_{Pi} + \dot{\eta}_3 - \dot{\eta}_1) + C_{YP1} (2a_{Pi} \psi_{Pi} + \eta_3 - \eta_1)] + \\ + B_{\varphi B} \dot{\psi}_{Pi} + C_{\varphi B} (\psi_{Pi} - a_{wi} \rho(s)) = \\ = F_{YB} (\eta_{Pi} - \eta_B) a_{Ci} + bs \sum_{j=1}^3 X_{ij2}(s) - X_{ij1}(s) \quad (2.19)$$

где  $m_{Pi}$  – массы  $i$ -й обрессоренной части тележки, т (табл. 2.1);

$B_{YP1}, C_{YP1}$  – поперечное сопротивление (кН·с/м) и жёсткость (кН/м) в связи «рама тележки – крайняя колёсная пара» (табл. 2.1);

$B_{YP2}, F_{YP2}(\xi)$  – поперечное сопротивление (кН·с/м) и нелинейная упругая характеристика (кН/м) в связи рама тележки – средняя колёсная пара (табл. 2.1). Нелинейная упругая характеристика связи «тележка – средняя колёсная пара» определяется свободным ходом колёсной пары относительно буксы и упругой связью буксы и рамы тележки (рис. 2.6,а)

$$F_{YP2}(\xi) = C_{YP2} \cdot \left[ \xi + \frac{|\xi - y_{P20}| - |\xi + y_{P20}|}{2} \right]; \quad (2.20)$$

$C_{YP2}$  – поперечная жёсткость в связи рама тележки – средняя колёсная пара при  $\xi > y_{P20}$ , кН/м (табл. 2.1);

$y_{P20}$  – свободный разбег средней колёсной пары (на сторону), м (табл. 2.1);

$\eta_B, \eta_{Pi}, \eta_j$  – поперечное перемещение центра масс кузова,  $i$ -й тележки,  $j$ -й колёсной пары;

$a_{Pi}$  – половина базы тележки  $i$ -й тележки (табл. 2.1);

$a_{ш}$  – половина шкворневой базы кузова, м (табл. 2.1);

$a_c$  – продольное расстояние шкворня относительно средней колёсной пары, м (рис. 2.5);

$bs$  – половина расстояния между кругами катания, м;

$\rho(s)$  – функция изменения кривизны траектории пути (2.1);

$J_{Pi}$  – момент инерции  $i$ -й обрессоренной части тележки (табл. 2.1);

$B_{\phi B}, C_{\phi B}$  – коэффициенты демпфирования (кН·с·м/рад) и жёсткости (кН·м/рад) угловой связи кузова с тележкой (табл. 2.1);

$F_{YB}(\xi)$  – нелинейная упругая характеристика поперечной связи «кузов – тележка» (2.18);

$X_{ijk}$  – проекции силы крипа в продольном направлении (2.15) для  $j$ -й колёсной пары соответственно для левого и правого колеса.

$\psi_{Pi}$  – угол поворота (виляние) рамы  $i$ -й тележки.

Уравнения, описывающие поперечные колебания 1-й (набегающей на рельс) колёсной пары имеют вид

$$\begin{aligned} m_{ni} \ddot{\eta}_{li} + B_{YP1} (\dot{\eta}_{li} - \dot{\eta}_{Pi} - a_{Pi} \dot{\psi}_{Pi}) + C_{YP1} (\eta_{li} - \eta_{Pi} - a_{Pi} \psi_{Pi}) = \\ = Y_{i11} - Y_{i12} - Y_{Hi1}(s) + m_{ni} a_n (s + a_{Pi}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $m_{ni}$  – неподрессоренная масса колёсной пары для  $i$ -й тележки, т (табл. 2.1);

$B_{YP1}, C_{YP1}$  – поперечное сопротивление (кН·с/м) и жёсткость (кН/м) в связи «рама тележки – крайняя колёсная пара» (табл. 2.1);

$\eta_{Pi}, \eta_j$  – поперечное перемещение центра масс  $i$ -й тележки,  $j$ -й колёсной пары;

$\psi_{Pi}$  – угол поворота (виляние) рамы  $i$ -й тележки;

$a_{Pi}$  – половина базы тележки  $i$ -й тележки (табл. 2.1);

$Y_{i11}, Y_{i12}$  – проекции силы Крива в поперечном направлении (2.16) для  $i$ -й тележки, 1-й колёсной пары соответственно для левого и правого колеса;

$Y_{Hij}$  – направляющая сила поперечного перемещения колёсной пары, определяющая условия подключения гребня к направлению экипажа (рис. 2.6,б)

$$Y_{Hij} = C_r \cdot \left( \eta_{ij} + 0,5 \left( \left| \eta_{ij} - e \right| - \left| \eta_{ij} + e \right| \right) \right), \quad (2.22)$$

где  $e$  – половина свободного зазора в колесе,  $e = \sigma l$  (табл. 2.1);

$C_r$  – контактная жёсткость, включающая поперечную жёсткость рельса (табл. 2.1), кН/м.

Уравнения, описывающие поперечные колебания 2-й (средней) колёсной пары имеют вид

$$\begin{aligned} m_{ni} \ddot{\eta}_{2i} + B_{YP2} (\dot{\eta}_2 - \dot{\eta}_{Pi}) + F_{YP2} (\eta_2 - \eta_{Pi}) = \\ = Y_{i21} + Y_{22} - Y_{Hi2}(s) + m_{ni} a_n(s) \end{aligned}, \quad (2.23)$$

где  $B_{YP2}$  – поперечное сопротивление (кН·с/м) в связи рама тележки – средняя колёсная пара (табл. 2.1);

$F_{YP2}(\xi)$  – поперечная нелинейная упругая характеристика (кН/м) в связи рама тележки – средняя колёсная пара (2.20);

$Y_{i21}, Y_{i22}$  – проекции силы Крива в поперечном направлении (2.16) для  $i$ -й тележки, 2-й колёсной пары соответственно для левого и правого колеса;

$Y_{Hij}$  – направляющая сила поперечного перемещения колёсной пары (2.22).

Уравнения, описывающие поперечные колебания 3-й (сбегающей с рельса) колёсной пары имеют вид

$$\begin{aligned} m_{ni} \ddot{\eta}_{3i} + B_{YP1} (\dot{\eta}_{3i} - \dot{\eta}_{Pi} + a_{Pi} \dot{\psi}_{Pi}) + C_{YP1} (\eta_{3i} - \eta_{Pi} + a_{Pi} \psi_{Pi}) = \\ = Y_{i31} + Y_{i32} - Y_{Hi3}(s) + m_{ni} a_n(s - a_{Pi}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $Y_{i31}, Y_{i32}$  – проекции силы Крива в поперечном направлении (2.16) для  $i$ -й тележки, 3-й колёсной пары соответственно для левого и правого колеса.

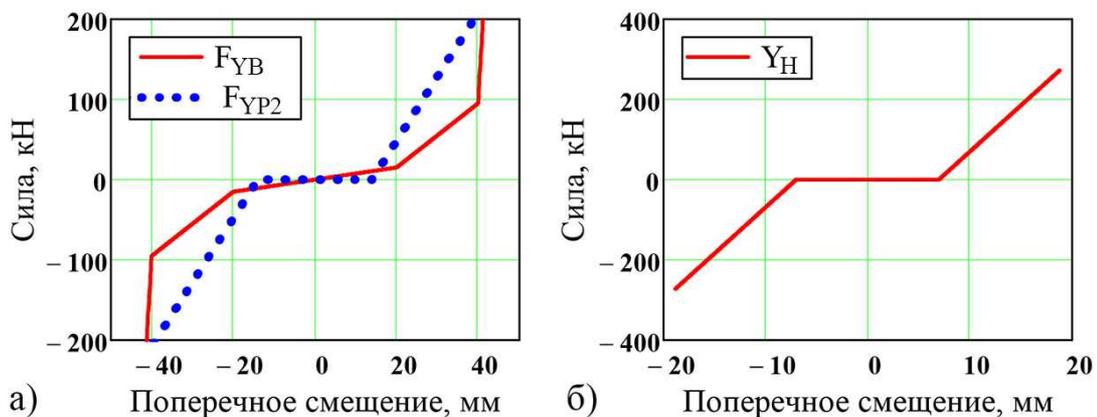


Рис. 2.6 – Нелинейные силовые характеристики: а – поперечной связи «кузов-тележка»  $F_{YB}$  и «тележка – средняя колёсная пара»  $F_{YP2}$ ; б – направляющая сила поперечного смещения колёсной пары  $Y_H$

Решение математической модели из 9 дифференциальных уравнений позволяет оценить прочностные характеристики подсистемы «колесо – рельс». К таким характеристикам можно отнести следующие.

1) Возвращающие в исходное состояние силы определяются характеристиками поперечной связи «кузов – тележка»

$$Y_{Bi} = B_{YB} (\dot{\eta}_B - \dot{\eta}_{Pi}) + F_{YB} (\eta_B - \eta_{Pi})$$

где  $B_{YB}$  – коэффициенты сопротивления (кН·с/м) поперечной связи кузова с тележкой (табл. 2.1);

$F_{YB}(\xi)$  – нелинейная упругая характеристика поперечной связи «кузов – тележка» (2.18).

2) Рамные силы, определяющие поперечный сдвиг пути

$$Y_{Pi} = B_{YPl} (\dot{\eta}_{Pi} - \dot{\eta}_{li} + a_P \dot{\psi}_{Pi}) + C_{YPl} (\eta_{Pi} - \eta_{li} + a_P \psi_{Pi}),$$

где  $B_{YPl}$ ,  $C_{YPl}$  – поперечное сопротивление (кН·с/м) и жёсткость (кН/м) в связи «рама тележки – крайняя колёсная пара» (табл. 2.1).

3) Боковые силы, определяющие отжатие рельс

$$Y_{Rij} = Y_{Hij} - Y_{ijk}, \quad (2.25)$$

где  $Y_{Hij}$  – направляющие силы поперечного перемещения колёсных пар (2.22);

$Y_{ijk}$  – проекции силы Крива в поперечном направлении (2.16).

4) Износ колёс колёсных пар и рельсов связан в основном с износом гребня колеса и боковой поверхности головки рельсов, лимитирующей дальнейшую эксплуатацию колёсных пар и рельсов. В технической литературе в качестве критерия, позволяющего дать качественную оценку износа колёсных пар, предлагается *фактор износа*. За фактор износа принята работа, затрачиваемая на преодоление сил трения в области контакта при движении подвижного состава

$$I_{ij} = Y_{Hij} \left( \psi_{Pi} \pm \frac{a_{Pi}}{R} \right) \cdot f_m, \text{ [Дж/м]} \quad (2.26)$$

где  $a_{Pi}$  – расстояние от центра поворота тележки до колёсной пары – половина базы тележки (табл. 2.1), м;

$f_m$  – коэффициент трения скольжения гребня колеса по рельсу;

$\psi_{Pi}$  – угол поворота (виляние) рамы тележки – угол наклона гребня;

$Y_{Hij}$  – направляющая сила поперечного смещения колёсной пары (2.22).

Приведём результаты вычислений боковых сил (2.25), определяющих отжатие рельса, для тепловоза 2ТЭ116 на тестовом участке пути при унификации ширины рельсовой колеи с 1535 до 1520 мм (рис. 2.7) и с 1530 до 1520 мм (рис. 2.8).

В качестве выходных параметров математического моделирования получим численные значения фактора износа (2.26). Критерий оценки оптимальности ширины колеи по фактору износа является суммарный фак-

тор износа по всем колёсным парам. Если при уменьшении ширины колеи с 1535/1530 мм до 1520 мм суммарный фактор износа снижается, то ширина колеи 1520 мм является оптимальной при отсутствии явления заклинивания колёсных пар.

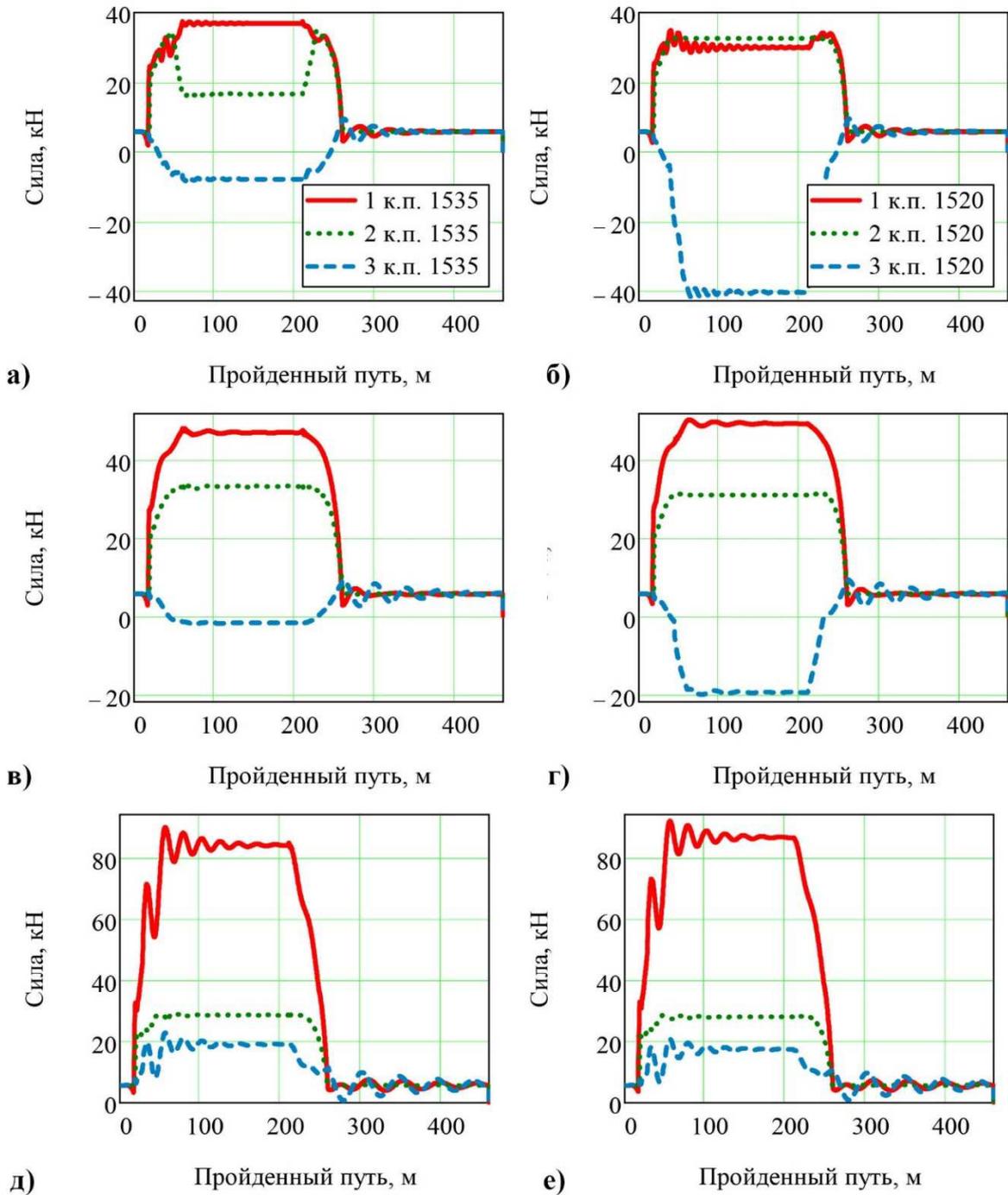


Рис. 2.7 – Боковые силы, действующие в контакте колёс 2ТЭ116 с рельсами при  $R = 250$  м;  $h = 130$  мм: а)  $S = 1535$  мм,  $V = 35$  км/ч; б)  $S = 1520$  мм,  $V = 35$  км/ч; в)  $S = 1535$  мм,  $V = 50$  км/ч; г)  $S = 1520$  мм,  $V = 50$  км/ч; д)  $S = 1535$  мм,  $V = 70$  км/ч; е)  $S = 1520$  мм,  $V = 70$  км/ч

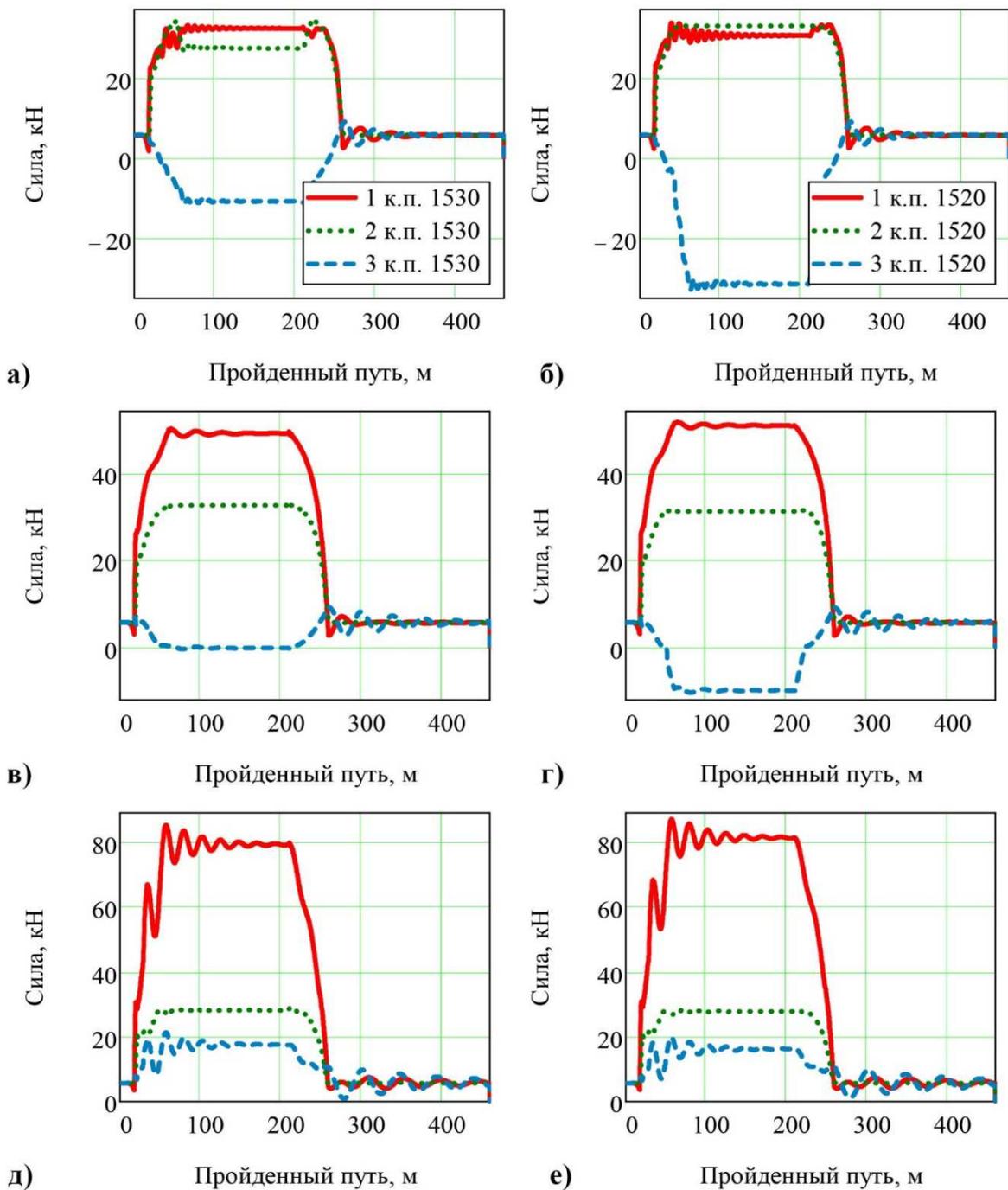


Рис. 2.8 – Боковые силы, действующие в контакте колёс 2ТЭ116 с рельсами при  $R = 300$  м;  $h = 100$  мм: а)  $S = 1530$  мм,  $V = 30$  км/ч; б)  $S = 1520$  мм,  $V = 30$  км/ч; в)  $S = 1530$  мм,  $V = 50$  км/ч; г)  $S = 1520$  мм,  $V = 50$  км/ч; д)  $S = 1530$  мм,  $V = 60$  км/ч; е)  $S = 1520$  мм,  $V = 60$  км/ч

Максимально возможные статистические значения в зависимости от непогашенного поперечного ускорения и ширины колеи поперечных смещений тепловоза 2ТЭ116 приведены на рис. 2.9, боковых сил – на рис. 2.10, а фактора износа – на рис. 2.11.

Выполненные компьютерные математические расчёты позволили сформулировать предварительные выводы:

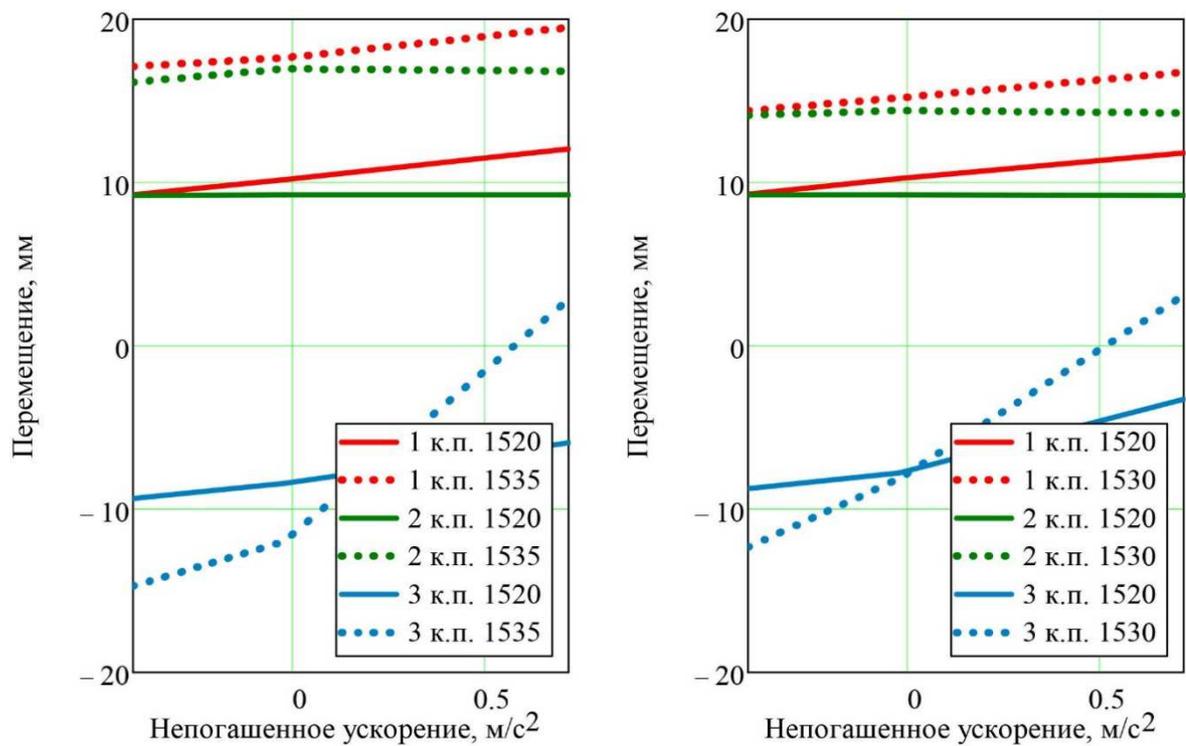


Рис. 2.9 – Максимально возможные значения поперечных смещений колёсных пар 2ТЭ116: *a* – при  $R = 250$  м; *б* – при  $R = 300$  м.

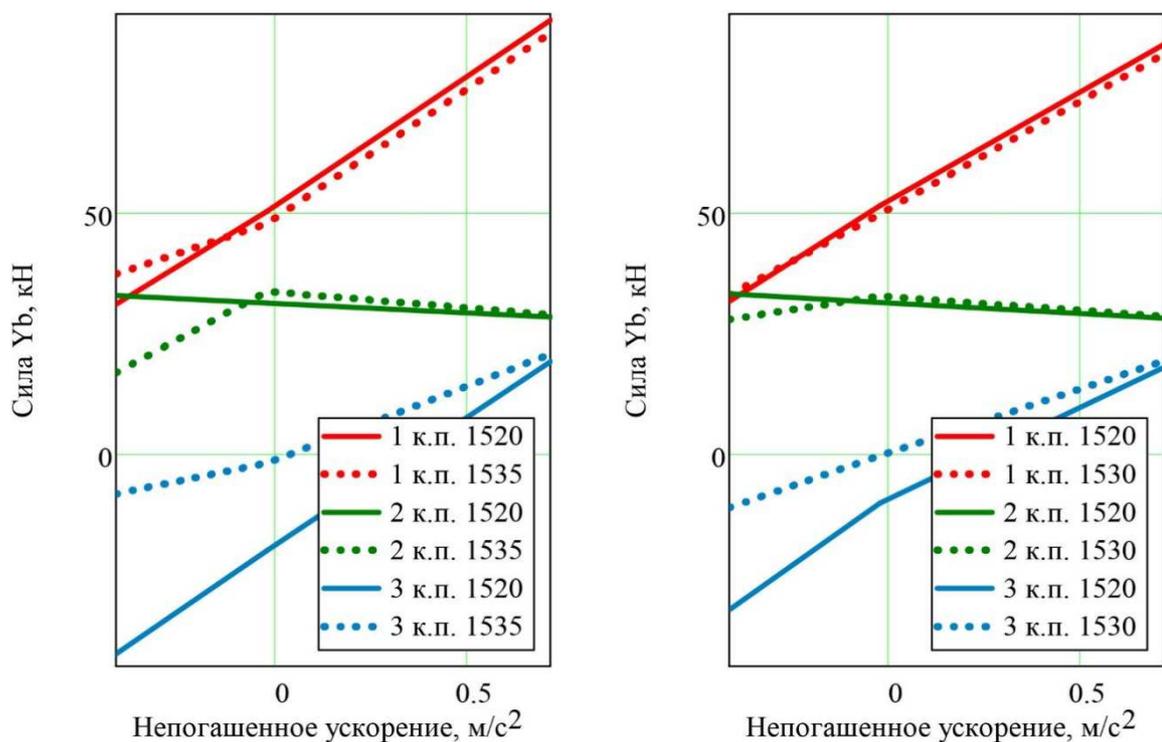


Рис. 2.10 – Максимально возможные значения боковых сил, воздействующих гребнем колеса 2ТЭ116 на рельс: *a* – при  $R = 250$  м; *б* – при  $R = 300$  м.

1) Критерий выбора оптимальности ширины колеи по боковым усилиям не позволяет объективно оценить условия взаимодействия подвижного состава и пути, так как кроме бокового усилия необходимо также учитывать значения фактической площади касания, угла набегания гребня колеса на рельс, непогашенного ускорения, переменную величину коэффи-

циента трения и много других факторов. Уточнение контактных давлений нами выполнены далее при физическом моделировании системы «подвижной состав – путь» на специальном стенде.

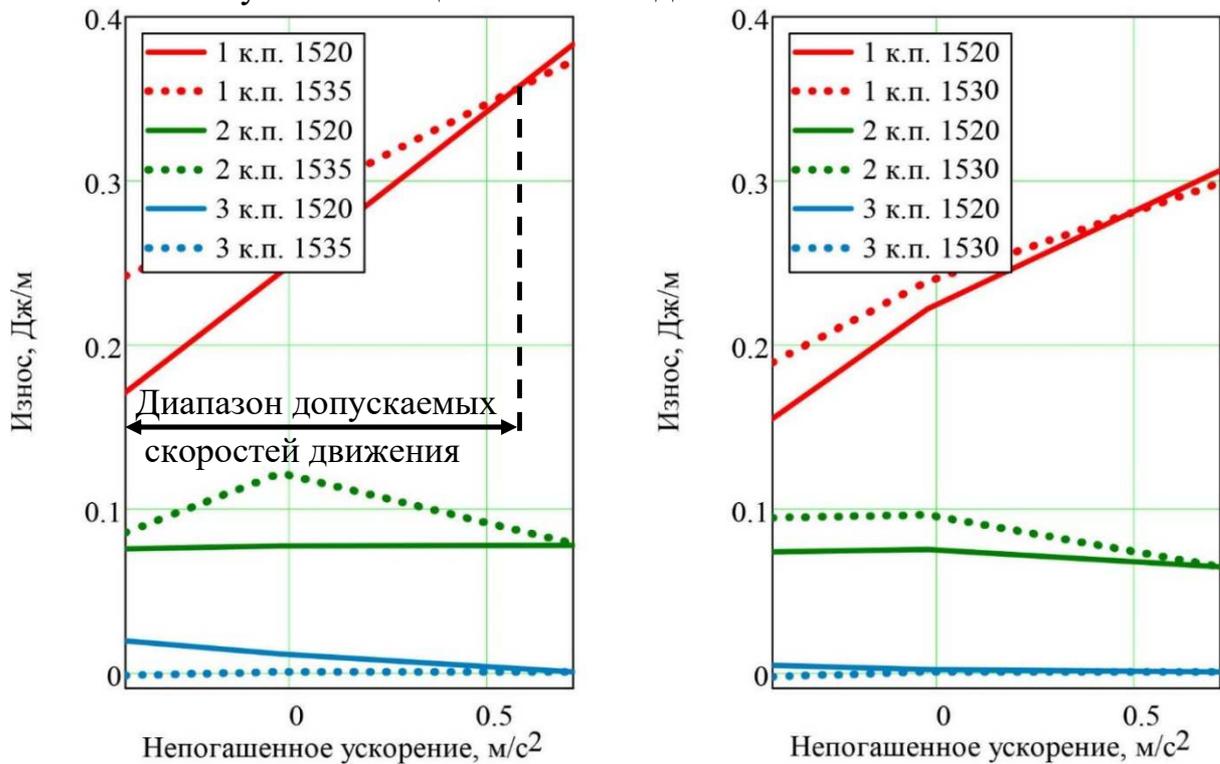


Рис. 2.11 – Максимально возможные значения фактора износа (6.44) колёсных пар 2ТЭ116: *a* – при  $R = 250$  м; *b* – при  $R = 300$  м

2) Во всех приведённых выше результатах расчёта получено, что при унификации ширины рельсовой колеи с 1535 / 1530 мм до 1520 мм поперечные смещения колёсных пар уменьшаются, а также уменьшается угол набегания колёсных пар на рельсы, что свидетельствует о возможной тенденции к снижению износа колёсных пар подвижного состава.

3) Как было сказано ранее, критерием выбора оптимальности ширины колеи по фактору износа (Дж/с) является суммарный фактор износа (2.26) по всем колёсным парам. Если при уменьшении ширины колеи с 1535 / 1530 до 1520 мм суммарный фактор износа снижается, то ширина колеи 1520 мм является оптимальной при отсутствии явления заклинивания колёсных пар.

Было установлено, что при уменьшении ширины колеи с 1535 / 1530 до 1520 мм суммарный фактор износа снижается:

*a*) при радиусах кривой  $R = 250...350$  м для тепловоза 2ТЭ116 при всех значениях непогашенного поперечного ускорения от  $-0,4$  до  $+0,6$  м/с<sup>2</sup> фактор износа снижается на

$$\frac{0,328 - 0,264}{0,328} \cdot 100 = 19,7 \text{ \% при } R = 250 \text{ м и } V = 35 \text{ км/ч;}$$

$$\frac{0,404 - 0,331}{0,404} \cdot 100 = 18,1 \text{ \% при } R = 250 \text{ м и } V = 50 \text{ км/ч;}$$

$$\frac{0,258 - 0,206}{0,258} \cdot 100 = 20,2 \text{ \% при } R = 340 \text{ м и } V = 35 \text{ км/ч;}$$

$$\frac{0,283 - 0,260}{0,283} \cdot 100 = 8,1 \text{ \% при } R = 340 \text{ м и } V = 50 \text{ км/ч;}$$

б) при радиусах кривой  $R = 250 \dots 350$  м и значений непогашенного поперечного ускорения  $+0,5 \dots 0,7$  м/с<sup>2</sup> для тепловоза 2ТЭ116 согласно данному критерию следует уменьшить верхние значения максимально допускаемой скорости подвижного состава, соответствующей непогашенному поперечному ускорению до  $+0,6$  м/с. В ходе произведённых расчётов наблюдаем возрастание фактора износа:

$$\frac{0,451 - 0,460}{0,451} \cdot 100 = -2,0 \text{ \% при } R = 250 \text{ м и } V = 70 \text{ км/ч;}$$

$$\frac{0,308 - 0,316}{0,308} \cdot 100 = -2,6 \text{ \% при } R = 340 \text{ м и } V = 70 \text{ км/ч;}$$

в) предварительно можно заключить, что унификация ширины рельсовой колеи в кривых малого радиуса с 1535 / 1530 мм до 1520 мм возможна. Однако необходимо скорректировать в сторону уменьшения максимально-допустимые скорости движения подвижного состава, непогашенное поперечное ускорение которого можно определить по номограмме рис. 2.11. Окончательные результаты исследований можно сделать только после уточнения результатов математического моделирования при физическом моделировании.

## 2.2 Динамическое подобие механической подсистемы

Как было показано ранее, физически подобная модель характеризуется эквивалентной расчётной схемой натурального объекта, число степеней свободы которой должно соответствовать выбранному количеству масс натурального объекта. При этом динамическая эквивалентность исходной и приведённой систем обеспечивается *идентичностью дифференциальных уравнений движения и равенством частот и форм колебаний*.

Структура дифференциальных уравнений механической системы (2.17), (2.19), (2.21), (2.23), (2.24) натурального магистрального тепловоза 2ТЭ116 одинакова, поэтому *при создании физической модели* рассмотрим только два уравнения из ранее указанных, соответствующих поступательному поперечному смещению набегавшей колёсной пары (2.21) только для первой тележки ( $i = 1$ ). В последующих выражениях индекс  $i$  учитывать не будем. Дифференциальное уравнение (2.21) преобразуем относительно входных и выходных координат состояния

$$m_n \ddot{\eta}_l + B_{Y_{P1}} \dot{\eta}_l + C_{Y_{P1}} \eta_l = B_{Y_{P1}} (\dot{\eta}_P + a_P \dot{\psi}_P) + C_{Y_{P1}} (\eta_P + a_P \psi_P) + Y_{111} + Y_{112} - Y_{H11} + m_n a_n$$

где  $m_n$  – масса колёсной пары (табл. 2.1);

$B_{Y_{P1}}$  – поперечное сопротивление в связи рама тележки – крайняя колёсная пара (табл. 2.1), кН·с/м.

$C_{Y_{P1}}$  – поперечная жёсткость в связи рама тележки – крайняя колёсная пара (табл. 2.1), кН/м;

$Y_{111}$  – проекция силы Крива в поперечном направлении для наружного колеса (2.16)

$$Y_{111} = \frac{P \cdot \left[ 1 + \frac{h_C}{g \cdot bs} \cdot a_H(s) \right]}{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]} \times$$

$$f_m \frac{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left( \frac{\eta_1}{r_0} \beta_1 - bs \left[ \rho(s) - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right] \right)^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s)}{\cos \beta_1} \right)^2 \right]}} \cdot \text{tg} \beta_1 + \cos \beta_1$$

$$\times \left( f_m \frac{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left( \frac{\eta_1}{r_0} \beta_1 - bs \left[ \rho(s) - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right] \right)^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s)}{\cos \beta_1} \right)^2 \right]}} - \sin \beta_1 \right);$$

$Y_{112}$  – проекция силы Крива в поперечном направлении для внутреннего колеса (2.16);

$$Y_{112} = \frac{P \cdot \left[ 1 - \frac{h_C}{g \cdot bs} \cdot a_H(s) \right]}{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]} \times$$

$$f_m \frac{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left( \frac{\eta_1}{r} \beta_2 + bs \left[ \rho(s) - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right] \right)^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s)}{\cos \beta_2} \right)^2 \right]}} \cdot \text{tg} \beta_2 + \cos \beta_2$$

$$\times \left( f_m \frac{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s) \right]}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left( \frac{\eta_1}{r} \beta_2 + bs \left[ \rho(s) - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right] \right)^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_1}{V} + a_P \rho(s)}{\cos \beta_2} \right)^2 \right]}} - \sin \beta_2 \right);$$

$Y_{H11}$  – направляющая сила поперечного перемещения 1-ой колёсной пары (2.22)

$$Y_{H11} = C_r \cdot (\eta_1 + 0,5(|\eta_1 - e| - |\eta_1 + e|));$$

$\eta_1$  – поперечное перемещение центра масс 1-й колёсной пары;

$\eta_P$  – поперечное перемещение центра масс тележки;

$\psi_P$  – угол поворота (виляние) рамы тележки;

$a_n$  – непогашенное поперечное ускорение (2.4).

и угловым колебаниям тележки (2.19)

$$\begin{aligned} J_P \ddot{\psi}_P + [B_{\phi B} + B_{YP1} 2a_P^2] \dot{\psi}_P + [C_{\phi B} + C_{YP1} 2a_P^2] \psi_P = \\ = [B_{YP1} (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_3) + C_{YP1} (\eta_1 - \eta_3)] a_P + F_{YB} a_C + \\ + [X_{112} - X_{111} + X_{122} - X_{121} + X_{132} - X_{131}] bs, \end{aligned}$$

где  $J_P$  – момент инерции тележки,  $\text{т}\cdot\text{м}^2$  (табл. 2.1);

$\psi_P$  – угол поворота (виляние) рамы тележки (табл. 2.1);

$C_{\phi}$  – угловая жёсткость в связи кузов-тележка (табл. 2.1),  $\text{кН}\cdot\text{м}/\text{рад}$ ;

$B_{\phi}$  – угловое сопротивление в связи кузов-тележка (табл. 2.1),  $\text{кН}\cdot\text{с}/\text{м}/\text{рад}$ ;

$a_P$  – половина базы тележки (табл. 2.1), м;

$X_{ljk}$  – проекции силы Крипа в продольном направлении (2.15) для первой тележки и 1-й, 2-й и 3-й колёсных пар соответственно для внешнего и внутреннего колеса.

$$\begin{aligned} X_{jk} = & \frac{P \cdot \left[ 1 + \frac{h_C}{g \cdot bs} a_n(s) (-1)^{k+1} \right]}{K_S \cdot \left[ \psi_P - \frac{\dot{\eta}_j}{V} + (2-j) a_P \rho(s) \right]} \times \\ & \frac{f_m}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left[ \frac{\eta_j}{r_0} \beta_k + (-1)^k bs \left( \rho - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right) \right]^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_j}{V} + (2-j) a_P \rho(s)}{\cos \beta_k} \right)^2 \right]}} \cdot \text{tg} \beta_k + \cos \beta_k \\ & \times \frac{f_m}{\sqrt{1 + K_S^2 \left[ \left[ \frac{\eta_j}{r} \beta_k + (-1)^k bs \left( \rho - \frac{\dot{\psi}_P}{V} \right) \right]^2 + \left( \frac{\psi_P - \frac{\dot{\eta}_j}{V} + (2-j) a_P \rho(s)}{\cos \beta_k} \right)^2 \right]}}; \end{aligned}$$

$bs$  – половина расстояния между кругами катания (табл. 2.1), м.

$F_{YB}$  – характеристика поперечной связи «кузов – тележка» (2.18), Н

$$F_{YB} = C_{YB0} (\eta_P - \eta_B) + (C_{YB1} - C_{YB0}) \cdot \left[ \eta_P - \eta_B + \frac{|\eta_P - \eta_B - y_{B0}| - |\eta_P - \eta_B + y_{B0}|}{2} \right] + \\ + 20C_{YB1} \cdot \left[ \eta_P - \eta_B + \frac{|\eta_P - \eta_B - y_{B1}| - |\eta_P - \eta_B + y_{B1}|}{2} \right].$$

$a_C$  – продольное расстояние шкворня относительно средней колёсной пары (табл. 2.1), м;

В соответствии с третьей теоремой подобия ведём в рассмотрение граничные условия, характеризующие динамические свойства как модельного, так и натурального магистрального тепловоза 2ТЭ116. Такими условиями примем выборочные парциальные частоты и коэффициенты затухания:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{C_{YPI}}{m_n}};$$

$$\omega_{02} = \sqrt{a_P (\eta_1 - \eta_3) \frac{C_{YPI}}{J_P}};$$

$$n_{01} = \frac{B_{YPI}}{2m_n};$$

$$n_{02} = a_P (\eta_1 - \eta_3) \frac{B_{YPI}}{2J_P}.$$

где  $\omega_i$  и  $n_i$  – собственные частоты и коэффициенты затухания колебаний механической системы.

Задача построения модели образца заключается в подборе её параметров  $m_n$ ,  $J_P$ ,  $B_{YPI}$ ,  $C_{YPI}$ ,  $\eta_i$ ,  $\psi_P$  и других таким образом, чтобы обеспечить на модели подобие динамических характеристик натурального подвижного состава. Для нахождения этих условий подобия необходимо привести уравнения системы к безразмерному виду. Для упрощения анализа нелинейные силы будем считать на данном этапе исследований условно постоянными. В последующем, на следующем этапе исследований, мы их будем рассматривать в критериальных соотношениях.

Для выведения критериев подобия механической системы запишем выбранные дифференциальные уравнения соответственно для оригинала и модели, введя соответствующие индексы  $o$  и  $m$  – для объекта исследования:

$$\begin{aligned}
m_{no} \ddot{\eta}_{1o} + B_{YP1o} \dot{\eta}_{1o} + C_{YP1o} \eta_{1o} &= B_{YP1o} \dot{\eta}_{Po} + B_{YP1o} a_{Po} \dot{\psi}_{Po} + C_{YP1o} \eta_{Po} + \\
&+ C_{YP1o} a_{Po} \psi_{Po} + Y_{111o} + Y_{112o} - Y_{H11o} + m_{no} a_{ho}; \\
J_{Po} \ddot{\psi}_{Po} + B_{\phi Bo} \dot{\psi}_{Po} + B_{YP1o} 2a_{Po}^2 \dot{\psi}_{Po} + C_{\phi Bo} \psi_{Po} + C_{YP1o} 2a_{Po}^2 \psi_{Po} &= \\
&= B_{YP1o} a_{Po} (\dot{\eta}_{1o} - \dot{\eta}_{3o}) + C_{YP1o} a_{Po} (\eta_{1o} - \eta_{3o}) + F_{YBo} a_{Co} + \\
&+ [X_{112o} - X_{111o} + X_{122o} - X_{121o} + X_{132o} - X_{131o}] bs_o; \tag{2.27} \\
\omega_{01o} &= \sqrt{\frac{C_{YP1o}}{m_{no}}}; \quad n_{01o} = \frac{B_{YP1o}}{2m_{no}}; \\
\omega_{02o} &= \sqrt{a_{Po} (\eta_{1o} - \eta_{3o}) \frac{C_{YP1o}}{J_{Po}}}; \quad n_{02o} = a_{Po} (\eta_{1o} - \eta_{3o}) \frac{B_{YP1o}}{2J_{Po}},
\end{aligned}$$

– для модели:

$$\begin{aligned}
m_{nm} \ddot{\eta}_{1m} + B_{YP1m} \dot{\eta}_{1m} + C_{YP1m} \eta_{1m} &= B_{YP1m} \dot{\eta}_{Pm} + B_{YP1m} a_{Pm} \dot{\psi}_{Pm} + C_{YP1m} \eta_{Pm} + \\
&+ C_{YP1m} a_{Pm} \psi_{Pm} + Y_{111m} + Y_{112m} - Y_{H11m} + m_{nm} a_{hm}; \\
J_{Pm} \ddot{\psi}_{Pm} + B_{\phi Bm} \dot{\psi}_{Pm} + B_{YP1m} 2a_{Pm}^2 \dot{\psi}_{Pm} + C_{\phi Bm} \psi_{Pm} + C_{YP1m} 2a_{Pm}^2 \psi_{Pm} &= \\
&= B_{YP1m} a_{Pm} (\dot{\eta}_{1m} - \dot{\eta}_{3m}) + C_{YP1m} a_{Pm} (\eta_{1m} - \eta_{3m}) + F_{YBm} a_{Cm} + \\
&+ [X_{112m} - X_{111m} + X_{122m} - X_{121m} + X_{132m} - X_{131m}] bs_m; \tag{2.28} \\
\omega_{01m} &= \sqrt{\frac{C_{YP1m}}{m_{nm}}}; \quad n_{01m} = \frac{B_{YP1m}}{2m_{nm}}; \\
\omega_{02m} &= \sqrt{a_{Pm} (\eta_{1m} - \eta_{3m}) \frac{C_{YP1m}}{J_{Pm}}}; \quad n_{02m} = a_{Pm} (\eta_{1m} - \eta_{3m}) \frac{B_{YP1m}}{2J_{Pm}},
\end{aligned}$$

Соотношения физических параметров между объектом исследования и его моделью выразим через *масштабы подобия*:

$$\begin{aligned}
C_m &= \frac{m_{no}}{m_{nm}}; \quad C_J = \frac{J_{Po}}{J_{Pm}}; \quad C_B = \frac{B_{YP1o}}{B_{YP1m}}; \quad C_{B\phi} = \frac{B_{\phi Bo}}{B_{\phi Bm}}; \quad C_C = \frac{C_{YP1o}}{C_{YP1m}}; \quad C_{C\phi} = \frac{C_{\phi Bo}}{C_{\phi Bm}}; \\
C_l &= \frac{\eta_{1o}}{\eta_{1m}} = \frac{\eta_{Po}}{\eta_{Pm}} = \frac{\eta_{1o}}{\eta_{1m}} = \frac{\eta_{3o}}{\eta_{3m}} = \frac{a_{Po}}{a_{Pm}} = \frac{a_{Co}}{a_{Cm}} = \frac{bs_o}{bs_m}; \quad C_\psi = \frac{\psi_{Po}}{\psi_{Pm}}; \quad C_a = \frac{a_{ho}}{a_{hm}}; \\
C_F &= \frac{F_{YBo}}{F_{YBm}} = \frac{Y_{111o}}{Y_{111m}} = \frac{Y_{112o}}{Y_{112m}} = \frac{Y_{H11o}}{Y_{H11m}} = \frac{X_{1jko}}{X_{1jkm}}; \quad C_\omega = \frac{\omega_{01o}}{\omega_{01m}} = \frac{\omega_{02o}}{\omega_{02m}}; \\
C_n &= \frac{n_{01o}}{n_{01m}} = \frac{n_{02o}}{n_{02m}},
\end{aligned}$$

где *масштабы подобия*:  $C_m$  – массы колёсной пары;  $C_J$  – момента инерции тележки относительно бокового отнosa;  $C_C$  – линейных коэффициентов упругости пружинных комплектов;  $C_{C\phi}$  – угловых коэффициентов упругости;  $C_B$  – линейных коэффициентов сопротивления амортизаторов;  $C_{B\phi}$  – угловых коэффициентов сопротивления;  $C_l$  – геометрических размеров;  $C_\psi$  – угловых колебаний тележки;  $C_a$  – поперечного непогашенного

ускорения;  $C_F$  – нелинейных сил;  $C_\omega$  – собственных частот колебаний;  $C_n$  – показателя затухания колебаний.

Масштабы подобия введём в уравнения (2.28), характеризующие модельный объект, так, что значения полученного уравнения (2.29) численно соответствуют уравнению (2.27) натурального объекта. Имеем:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{C_m C_l}{C_t^2} \right) m_{nm} \ddot{\eta}_{1M} + \left( \frac{C_B C_l}{C_t} \right) B_{YP1M} \dot{\eta}_{1M} + (C_C C_l) C_{YP1M} \eta_{1M} = \\
& = \left( \frac{C_B C_l}{C_t} \right) B_{YP1M} \dot{\eta}_{PM} + \left( \frac{C_B C_l C_\psi}{C_t} \right) B_{YP1M} a_{PM} \dot{\psi}_{PM} + (C_C C_l) C_{YP1M} \eta_{PM} + \\
& + (C_C C_l C_\psi) C_{YP1M} a_{PM} \psi_{PM} + (C_F) Y_{111M} + (C_F) Y_{112M} - (C_F) Y_{H11M} + \\
& + (C_m C_a) m_{nm} a_{HM}; \\
& \left( \frac{C_J C_\psi}{C_t^2} \right) J_{PM} \ddot{\psi}_{PM} + \left( \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} \right) B_{\phi BM} \dot{\psi}_{PM} + \left( \frac{C_B C_l^2 C_\psi}{C_t} \right) B_{YP1M} 2a_{PM}^2 \dot{\psi}_{PM} + \\
& + (C_{C\phi} C_\psi) C_{\phi BM} \psi_{PM} + (C_C C_l^2 C_\psi) C_{YP1M} 2a_{PM}^2 \psi_{PM} = \\
& = \left( \frac{C_B C_l^2}{C_t} \right) B_{YP1M} a_{PM} (\dot{\eta}_{1M} - \dot{\eta}_{3M}) + (C_C C_l^2) C_{YP1M} a_{PM} (\eta_{1M} - \eta_{3M}) + \\
& + (C_F C_l) F_{YBM} a_{CM} + (C_F C_l) \left[ \begin{array}{l} X_{112M} - X_{111M} + X_{122M} - X_{121M} + \\ + X_{132M} - X_{131M} \end{array} \right] b_{SM}; \\
(C_\omega) \omega_{01M} &= \sqrt{\left( \frac{C_C}{C_m} \right) \cdot \frac{C_{YP1M}}{m_{nm}}}; \\
(C_\omega) \omega_{02M} &= \sqrt{\left( \frac{C_C C_l^2}{C_J} \right) a_{PM} (\eta_{1M} - \eta_{3M}) \frac{C_{YP1M}}{J_{PM}}}; \\
(C_n) n_{01M} &= \left( \frac{C_B}{C_m} \right) \cdot \frac{B_{YP1M}}{2m_{nm}}; \\
(C_n) n_{02M} &= \left( \frac{C_B C_l^2}{C_J} \right) a_{PM} (\eta_{1M} - \eta_{3M}) \frac{B_{YP1M}}{2J_{PM}},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Уравнение (2.29) отличается от уравнения (2.28) тем, что перед каждой переменной величиной имеются комплексы, составленные из масштабов подобия. Отсюда можно сделать вывод, что переменные обеих систем могут быть определены одинаковым образом только при условии тождественности уравнений (2.28) и (2.29), а это возможно только тогда, когда комплексы, составленные из масштабов подобия в уравнении системы (2.29), сократятся.

Рассмотрим полученные комплексы, составленные из масштабов подобия. Каждый из критериев подобия, входящих в критериальное уравнение, равен единице, то есть

– из первого уравнения, соответствующего поступательному (поперечному) перемещению:

$$\frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l} = \frac{C_m}{C_B C_t} = 1; \quad \frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l C_\psi} = \frac{C_m}{C_B C_t C_\psi} = 1; \quad (2.30)$$

$$\frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_C C_l} = \frac{C_m}{C_C C_t^2} = 1; \quad \frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_C C_l C_\psi} = \frac{C_m}{C_C C_t^2 C_\psi} = 1; \quad (2.31)$$

$$\frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_F} = \frac{C_m C_l}{C_F C_t^2} = 1; \quad \frac{C_m C_l}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_m C_a} = \frac{C_l}{C_a C_t^2} = \frac{C_l}{\frac{C_l}{C_t^2} C_t^2} = 1; \quad (2.32)$$

$$\frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l} = 1; \quad \frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l C_\psi} = \frac{1}{C_\psi} = 1; \quad (2.33)$$

$$\frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{1}{C_C C_l} = \frac{C_B}{C_C C_t} = 1; \quad \frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{1}{C_C C_l C_\psi} = \frac{C_B}{C_C C_t C_\psi} = 1; \quad (2.34)$$

$$\frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{1}{C_F} = \frac{C_B C_l}{C_F C_t} = 1; \quad \frac{C_B C_l}{C_t} \cdot \frac{1}{C_m C_a} = \frac{C_B C_l}{C_m C_a C_t} = \frac{C_B C_l}{C_m \frac{C_l}{C_t^2} C_t} = \frac{C_B C_t}{C_m} = 1; \quad (2.35)$$

$$C_C C_l \cdot \frac{C_t}{C_B C_l} = \frac{C_C C_t}{C_B} = 1; \quad C_C C_l \cdot \frac{C_t}{C_B C_l C_\psi} = \frac{C_C C_t}{C_B C_\psi} = 1; \quad (2.36)$$

$$C_C C_l \cdot \frac{1}{C_C C_l} = 1; \quad C_C C_l \cdot \frac{1}{C_C C_l C_\psi} = \frac{1}{C_\psi} = 1; \quad (2.37)$$

$$C_C C_l \cdot \frac{1}{C_F} = \frac{C_C C_l}{C_F} = 1; \quad C_C C_l \cdot \frac{1}{C_m C_a} = \frac{C_C C_l}{C_m \frac{C_l}{C_t^2}} = \frac{C_C C_t^2}{C_m} = 1; \quad (2.38)$$

– из второго уравнения, соответствующего угловым колебаниям:

$$\frac{C_J C_\psi}{C_t^2} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l^2} = \frac{C_J C_\psi}{C_B C_l^2 C_t} = 1; \quad \frac{C_J C_\psi}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_C C_l^2} = \frac{C_J C_\psi}{C_C C_l^2 C_t^2} = 1; \quad (2.39)$$

$$\frac{C_J C_\psi}{C_t^2} \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_J C_\psi}{C_F C_l C_t^2} = 1; \quad \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l^2} = \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_B C_l^2} = 1; \quad (2.40)$$

$$\frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} \cdot \frac{1}{C_C C_l^2} = \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_C C_l^2 C_t} = 1; \quad \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_F C_l C_t} = 1; \quad (2.41)$$

$$\frac{C_B C_l^2 C_\psi}{C_t} \cdot \frac{C_t}{C_B C_l^2} = C_\psi = 1; \quad \frac{C_B C_l^2 C_\psi}{C_t} \cdot \frac{1}{C_C C_l^2} = \frac{C_B C_\psi}{C_C C_t} = 1; \quad (2.42)$$

$$\frac{C_B C_l^2 C_\psi}{C_t} \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_B C_l C_\psi}{C_F C_t} = 1; \quad C_{C\phi} C_\psi \cdot \frac{C_t}{C_B C_l^2} = \frac{C_{C\phi} C_\psi C_t}{C_B C_l^2} = 1; \quad (2.43)$$

$$C_{C\phi} C_\psi \cdot \frac{1}{C_C C_l^2} = \frac{C_{C\phi} C_\psi}{C_C C_l^2} = 1; \quad C_{C\phi} C_\psi \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_{C\phi} C_\psi}{C_F C_l} = 1; \quad (2.44)$$

$$C_C C_l^2 C_\psi \cdot \frac{C_t}{C_B C_l^2} = \frac{C_C C_\psi C_t}{C_B} = 1; \quad C_C C_l^2 C_\psi \cdot \frac{1}{C_C C_l^2} = C_\psi = 1; \quad (2.45)$$

$$C_C C_l^2 C_\psi \cdot \frac{1}{C_F C_l} = \frac{C_C C_l C_\psi}{C_F} = 1; \quad (2.46)$$

- из третьего – шестого равенств (2.29), а также в соответствие с *третьей теоремой подобия* модели и объекта, установим граничные условия подобия динамических характеристик:

$$C_\omega = \sqrt{\frac{C_C}{C_m}} = \sqrt{\frac{C_C C_l^2}{C_J}} = 1; \quad C_n = \frac{C_B}{C_m} = \frac{C_B C_l^2}{C_J} = 1. \quad (2.47)$$

Таким образом, на основании подобия дифференциальных уравнений объекта (2.27) и модели (2.28) исследований можно сделать следующие выводы, характеризующие подобие динамических характеристик:

- 1) критерии подобия (2.32), (2.33), (2.37) безусловно выполняются, так как их масштабы подобия взаимно сокращаются друг на друга;
- 2) мы получили подтверждение интерпретации *первой теоремы подобия* о подобии аргументов геометрических функций в оригинале и модели, т.е.  $C_\psi = 1$  – см. выражения (2.33), (2.37), (2.42), (2.45);
- 3) в соответствие с *третьей теоремой подобия* в качестве условия динамического подобия механической подсистемы локомотива 2ТЭ116 ранее была принята идентичность частот собственных колебаний и показателя затухания колебаний объекта исследования и его модели, т.е.  $C_\omega = C_n = 1$  – выражения (2.47);
- 4) так как  $C_\omega = C_n = 1$ , то из (2.47) вытекает, что масштабы подобия массы, жёсткости рессорных комплектов (упругих связей), коэффициента демпфирования амортизаторами колебаний (диссипативных связей) должны быть одинаковы, т.е.  $C_m = C_C$  и  $C_m = C_B$ ;
- 5) из определений п. 2, 4 в объекте и модели ( $C_\psi = 1$ ,  $C_m = C_C$ ,  $C_m = C_B$ ) и выражений (2.30), (2.31), (2.35), (2.38) следует равенство масштаба подобия времени испытаний  $C_t = 1$  – следовательно, все модельные испытания должны проводиться *в реальном масштабе времени*; это также вытекает из того положения, что период колебаний масс механической системы есть величина, обратная частоте колебаний, т.е.  $C_t = 1 / C_\omega = 1$ ;

- 6) из определений п. 2, 4, 5 ( $C_\psi = 1$ ,  $C_m = C_C$ ,  $C_m = C_B$ ,  $C_t = 1$ ) и соотношений (2.34), (2.36), (2.42), (2.45) следует равенство масштабов подобия коэффициентов упругих связей и сопротивления  $C_C = C_B$ ;
- 7) из первого равенства (2.32) следует масштаб подобия сил инерции натурального объекта и его модели – второй закон Ньютона

$$C_F = \frac{C_m C_l}{C_t^2} = C_m C_a, \quad (2.48)$$

где  $C_a$  – масштаб подобия линейного ускорения  $C_a = C_l / C_t^2$ ;

- 8) из первого равенства (2.35) следует масштаб подобия сил сопротивления натурального объекта и его модели

$$C_F = \frac{C_B C_l}{C_t} = C_B C_v, \quad (2.49)$$

где  $C_v$  – масштаб подобия линейной скорости  $C_v = C_l / C_t$ ;

- 9) при выполнении критерия подобия сил сопротивления (2.49) из равенства (2.43) следует подобие аргументов геометрических функций в оригинале и модели, т.е.  $C_\psi = 1$ , что было получено нами ранее в п. 2;
- 10) из первого равенства (2.38) следует масштаб подобия сил упругости натурального объекта и его модели, характеризующий закон Гука

$$C_F = C_C C_l, \quad (2.50)$$

где  $C_l$  – масштаб подобия линейного перемещения;

- 11) при соблюдении критерия подобия сил упругости (2.50) из равенства (2.46) следует подобие аргументов геометрических функций в оригинале и модели, т.е.  $C_\psi = 1$ , что было получено нами ранее в п. 2 и п. 9;
- 12) из соотношения масштабов (2.39), (2.40) вытекает масштаб подобия момента инерции  $[J] = [\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2/\text{рад}] = [\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{рад}]$

$$C_J = \frac{C_C C_l^2 C_t^2}{C_\psi} = \frac{C_F C_l^2 C_t^2}{C_l C_\psi} = \frac{C_F C_l C_t^2}{C_\psi}; \quad (2.51)$$

$$C_J = \frac{C_B C_l^2 C_t^2}{C_\psi} = \frac{C_F C_t C_l^2 C_t^2}{C_l C_\psi} = \frac{C_F C_l C_t^2}{C_\psi} = \frac{\frac{C_m C_l}{C_t^2} C_l C_t^2}{C_\psi} = \frac{C_m C_l^2}{C_\psi},$$

где  $C_C$  – масштаб подобия линейного коэффициента упругости (жёсткости) связи (2.50);

$C_B$  – масштаб подобия линейного коэффициента сопротивления (2.49);

$C_F$  – масштаб подобия силы инерции (2.48);

- 13) зная масштаб подобия момента инерции (2.51) установим величину масштаба подобия момента сил инерции  $[M] = [J\ddot{\psi}] = [\text{Н}\cdot\text{м}]$

$$C_M = \frac{C_J C_\Psi}{C_t^2} = \frac{\frac{C_F C_l C_t^2}{C_\Psi} C_\Psi}{C_t^2} = C_F C_l, \quad (2.52)$$

где  $C_J$  – масштаб подобия момента инерции (2.51);

14) из соотношений (2.40), (2.41), (2.43) определим масштаб подобия момента сил сопротивления  $[M] = [B_\phi \dot{\Psi}] = [Br^2 \dot{\Psi}]$ , где  $r$  – плечо момента

$$\begin{aligned} C_M &= \frac{C_{B\phi} C_\Psi}{C_t} = \frac{\frac{C_B C_l^2}{C_\Psi} C_\Psi}{C_t} = \frac{C_B C_l^2}{C_t} = \frac{\frac{C_F C_t}{C_l} C_l^2}{C_t} = C_F C_l; \\ C_M &= \frac{C_{B\phi} C_\Psi}{C_t} = \frac{\frac{C_C C_l^2 C_t}{C_\Psi} C_\Psi}{C_t} = C_C C_l^2 = \frac{C_F}{C_l} C_l^2 = C_F C_l; \\ C_M &= \frac{C_{B\phi} C_\Psi}{C_t} = \frac{\frac{C_F C_l C_t}{C_\Psi} C_\Psi}{C_t} = C_F C_l; \\ C_M &= \frac{C_B C_l^2 C_\Psi}{C_t} = \frac{\frac{C_F C_t}{C_l} C_l^2 C_\Psi}{C_t} = C_F C_l, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где:  $C_B$  – масштаб подобия линейного коэффициента сопротивления;

$$C_B = \frac{C_F C_t}{C_l} \quad (2.49); \quad C_B = \frac{C_F C_t}{C_l C_\Psi} \quad (2.43);$$

$C_C$  – масштаб подобия линейного коэффициента упругости (2.50);

$C_{B\phi}$  – масштаб подобия коэффициента углового сопротивления  $[B_\phi] = [\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}]$

$$C_{B\phi} = \frac{C_B C_l^2}{C_\Psi} = \frac{C_C C_l^2 C_t}{C_\Psi} = \frac{C_F C_l C_t}{C_\Psi};$$

15) из соотношений критериев подобия (2.43), (2.44), (2.46) определим масштаб подобия момента сил упругости  $[M] = [C_\phi \Psi] = [Cr^2 \Psi]$ , где  $r$  – плечо момента

$$\begin{aligned}
C_M &= C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_B C_l^2}{C_\psi C_t} C_\psi = \frac{C_F C_t C_l^2}{C_l C_\psi C_t} C_\psi = C_F C_l; \\
C_M &= C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_C C_l^2}{C_\psi} C_\psi = \frac{C_F C_l^2}{C_l C_\psi} C_\psi = C_F C_l; \\
C_M &= C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_F C_l}{C_\psi} C_\psi = C_F C_l; \\
C_M &= C_C C_l^2 C_\psi = \frac{C_F}{C_l C_\psi} C_l^2 C_\psi = C_F C_l,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

где:  $C_B$  – масштаб подобия линейного коэффициента сопротивления (2.49);  
 $C_C$  – масштаб подобия линейного коэффициента упругости  $[C] = [\text{Н/м}]$

$$C_C = \frac{C_F}{C_l} \text{ (2.50); } C_C = \frac{C_F}{C_l C_\psi} \text{ (2.46);}$$

$C_{C\phi}$  – масштаб подобия угловой жёсткости  $[C_\phi] = [\text{Н}\cdot\text{м/рад}]$

$$C_{C\phi} = \frac{C_B C_l^2}{C_\psi C_t} = \frac{C_C C_l^2}{C_\psi} = \frac{C_F C_l}{C_\psi};$$

16) разделив критерий (2.39) на критерий (2.40) подобия, установим связь между масштабами подобия момента инерции и углового сопротивления

$$\frac{C_J C_\psi}{C_B C_l^2 C_t} \cdot \frac{C_B C_l^2}{C_{B\phi} C_\psi} = \frac{C_J}{C_{B\phi} C_t} = 1, \tag{2.55}$$

откуда при соблюдении масштаба подобия периода колебаний или времени  $C_t = 1$  следует равенство масштабов  $C_J = C_{B\phi}$ .

17) разделив критерий (2.39) на критерий (2.44) подобия, установим связь между масштабами подобия момента инерции и углового сопротивления

$$\frac{C_J C_\psi}{C_C C_l^2 C_t^2} \cdot \frac{C_C C_l^2}{C_{C\phi} C_\psi} = \frac{C_J}{C_{C\phi} C_t^2} = 1, \tag{2.56}$$

откуда при соблюдении масштаба подобия периода колебаний или времени  $C_t = 1$  следует равенство масштабов  $C_J = C_{C\phi}$ .

Продолжим выполнять анализ полученных результатов. Так как критерии (2.30)...(2.49), (2.55), (2.56) имеют безразмерные величины, то их можно сравнивать друг с другом. Выясним масштабы подобия *нагрузочно-скоростных условий эксплуатации*, определяющих основные термодинамические процессы во фрикционных подсистемах. Процессы трения во

фрикционных подсистемах оцениваются величиной пути трения  $S_{mp}$  и реализуемую в контактной области мощность трения  $N_T = N \cdot v_c = mg \cdot v_c$  размерности  $[N_T] = [\text{Н} \cdot \text{м}/\text{с}] = [\text{Вт}]$  (см. табл. 1.3). Определим критерии подобия скорости скольжения  $C_{vc}$  и нормальной нагрузки  $C_N$ .

1) Критерий подобия относительного скольжения гребней колёсных пар по рельсам получим из критерия подобия сил инерции (2.32). С учётом известных выражений скорости  $v = S / t$  и нормальной нагрузки  $N = F = mg$  представим их индикаторы подобия  $vt / S = idem$ ;  $F / mg = idem$  в симплексной форме  $C_v C_t = C_i$ ;  $C_F = C_m C_g$ , получим

$$\frac{C_m C_l}{C_F C_t^2} = \frac{C_m (C_{vc} C_t)}{(C_m C_g) C_t^2} = \frac{C_{vc}}{C_g C_t} = 1, \quad (2.57)$$

где  $C_{vc}$  – масштаб подобия скорости относительного скольжения,

При обеспечении масштабов подобия ускорения свободного падения  $C_g = 1$  и времени трения  $C_t = 1$  из (2.57) получим масштаб подобия скорости скольжения  $C_{vc} = C_g C_t = 1$ .

2) Выясним теперь соотношение масштабов пособия массы  $C_m$  и силы  $C_F$  (нагрузки  $C_N$ ). С использованием индикатора подобия пути трения  $S / vt = idem$  разделим его критерий подобия  $C_l / C_v C_t = 1$  на критерий подобия сил инерции (2.32), получив новое соотношение этого же критерия

$$\frac{C_l}{C_{vc} C_t} \cdot \frac{C_F C_t^2}{C_m C_l} = \frac{C_F C_t}{C_m C_{vc}} = 1, \quad (2.58)$$

где  $C_{vc}$  – масштаб подобия скорости относительного скольжения,

При обеспечении масштаба подобия скорости скольжения  $C_{vc} = 1$  (2.57) и времени испытаний  $C_t = 1$ , получим требование равенства масштабов подобия силы и массы  $C_F = \frac{C_m C_{vc}}{C_t} = C_m$ .

3) Условия (2.57) и (2.58) обеспечивают подобие реализуемых в контактной области величин мощности трения  $N_T = N \cdot v_c$ , Вт. В этом случае критерий подобия мощности трения будет равен

$$\pi_{N_T} = \frac{C_{N_T}}{C_N C_{vc}} = \frac{C_{N_T}}{\frac{C_N C_t}{C_m C_{vc}} \cdot \frac{C_{vc}}{C_g C_t}} = \frac{C_{N_T} C_m C_g}{C_N} = 1, \quad (2.59)$$

а при обеспечении масштабов подобия нагрузки и массы  $C_N = C_m$  (2.58) и ускорения свободного падения  $C_g = 1$  получим масштаб подобия мощности трения  $C_{N_T} = 1$ .

Критерий подобия мощности трения (2.59) в зоне контакта модельного и натурального узла трения обеспечивает реализацию в контактной области подобие коэффициента трения  $C_f = 1$  и безразмерной величины интенсивности изнашивания  $C_i = 1$ .

4) Критерий подобия поступательной скорости качения получим, умножив критерий подобия (2.58) на критерий подобия сил сопротивления движению (2.35)

$$\frac{C_F C_t}{C_m C_v} \cdot \frac{C_B C_l}{C_F C_t} = \frac{C_B C_l}{C_m C_v} = 1. \quad (2.60)$$

где  $C_v$  – масштаб подобия скорости качения,

Так как ранее было определено  $C_m = C_B$ , то масштаб подобия скорости качения будет равен  $C_v = \frac{C_B C_l}{C_m} = C_l$ , т. е. масштабу подобия геометрических размеров.

Согласно второй теореме подобия интеграл дифференциальных уравнений (2.29), описывающих движение системы представим как функцию от критериев подобия (2.30)...(2.60)

$$\Phi \left( \begin{array}{l} \frac{C_m}{C_B C_t}; \frac{C_m}{C_C C_t^2}; \frac{C_m C_l}{C_F C_t^2}; \frac{C_l}{C_a C_t^2}; \frac{C_B}{C_C C_t}; \frac{C_B C_l}{C_F C_t}; \frac{C_B C_l}{C_m C_a C_t}; \frac{C_B C_t}{C_m}; \\ \frac{C_C C_t}{C_B}; \frac{C_C C_l}{C_F}; \frac{C_C C_t^2}{C_m}; \frac{C_m C_a}{C_F}; \frac{C_B C_v}{C_F}; \frac{C_F C_l}{C_M}; \frac{C_B C_l^2}{C_M C_t}; \frac{C_C C_l^2}{C_M}; \\ \frac{C_{vc}}{C_g C_t}; \frac{C_F C_t}{C_m C_{vc}}; \frac{C_P C_m C_g}{C_N}; \frac{C_B C_l}{C_m C_v}; \frac{C_m}{C_B C_t C_\psi}; \frac{C_m}{C_C C_t^2 C_\psi}; \\ \frac{C_B}{C_C C_t C_\psi}; \frac{C_C C_t}{C_B C_\psi}; \frac{C_J C_\psi}{C_B C_l^2 C_t}; \frac{C_J C_\psi}{C_C C_l^2 C_t^2}; \frac{C_J C_\psi}{C_F C_l C_t^2}; \frac{C_{B_\phi} C_\psi}{C_B C_l^2}; \\ \frac{C_{B_\phi} C_\psi}{C_C C_l^2 C_t}; \frac{C_{B_\phi} C_\psi}{C_F C_l C_t}; C_\psi; \frac{C_B C_\psi}{C_C C_t}; \frac{C_B C_l C_\psi}{C_F C_t}; \frac{C_{C_\phi} C_\psi C_t}{C_B C_l^2}; \\ \frac{C_{C_\phi} C_\psi}{C_C C_l^2}; \frac{C_{C_\phi} C_\psi}{C_F C_l}; \frac{C_C C_\psi C_t}{C_B}; \frac{C_C C_l C_\psi}{C_F}; \frac{C_J}{C_{B_\phi} C_t}; \frac{C_J}{C_{C_\phi} C_t^2}; \\ \frac{C_J C_\psi}{C_m C_l^2}; C_\omega = \sqrt{\frac{C_C}{C_m}} = \sqrt{\frac{C_C C_l^2}{C_J}}; C_n = \frac{C_B}{C_m} = \frac{C_B C_l^2}{C_J} \end{array} \right) = 0 \quad (2.61)$$

Результаты выполненного анализа сведены в табл. 2.2.

Табл. 2.2 – Масштабы подобия модели и натуре тепловоза 2ТЭ116

Наименование физических величин	Масштаб подобия
1	2
1) Геометрические размеры, м	$C_l$
2) Угловые координаты, рад	$C_\psi = 1$ (2.42)
3) Частоты собственных колебаний, $c^{-1}$	$C_\omega = \sqrt{\frac{C_C}{C_m}} = \sqrt{\frac{C_C C_l^2}{C_J}} = 1$ (2.47)

1	2
4) Коэффициент затухания амплитуд, $c^{-1}$	$C_n = \frac{C_B}{C_m} = \frac{C_B C_l^2}{C_J} = 1$ (2.47)
5) Сила инерции, Н	$C_F = \frac{C_m C_l}{C_t^2} = C_m C_a$ (2.48)
6) Сила сопротивления, Н	$C_F = \frac{C_B C_l}{C_t} = C_B C_v$ (2.49)
7) Сила упругости, Н	$C_F = C_C C_l$ (2.50)
8) Момент сил инерции, Н·м	$C_M = \frac{C_J C_\psi}{C_t^2} = C_F C_l$ (2.52)
9) Момент сил сопротивления, Н·м (2.53)	$C_M = \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} = \frac{C_B C_l^2}{C_t} = C_F C_l;$ $C_M = \frac{C_{B\phi} C_\psi}{C_t} = C_C C_l^2 = C_F C_l$
10) Момент сил упругости, Н·м (2.54)	$C_M = C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_B C_l^2}{C_\psi C_t} C_\psi = C_F C_l;$ $C_M = C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_C C_l^2}{C_\psi} C_\psi = C_F C_l;$ $C_M = C_{C\phi} C_\psi = \frac{C_F C_l}{C_\psi} C_\psi = C_F C_l;$ $C_M = C_C C_l^2 C_\psi = C_F C_l,$
11) Мощность трения, Вт	$C_{N_\tau} = C_N C_{vc} = \frac{C_N}{C_m C_g}$ (2.59)
12) Скорость качения, м/с	$C_v = \frac{C_B C_l}{C_m} = C_l$ (2.60)
13) Скорость скольжения, м/с	$C_{vc} = C_g C_t = 1$ (2.57)
14) Период колебаний; время трения, с	$C_t = \frac{C_m}{C_B} = 1$ (2.30) $C_t = \sqrt{\frac{C_m}{C_C}} = 1$ (2.31)
15) Масса, кг	$C_m = C_B = C_C$ (2.47) $C_m = \frac{C_F C_t}{C_{vc}}, C_m = C_F$ (2.58)

1	2
16) Момент инерции, кг·м <sup>2</sup> /рад	$C_J = C_{B\varphi}$ (2.55) $C_J = C_{C\varphi}$ (2.56) $C_J = C_B C_l^2 = C_C C_l^2$ (2.47) $C_J = \frac{C_C C_l^2 C_t^2}{C_\psi} = \frac{C_B C_l^2 C_t}{C_\psi}$ (2.51) $C_J = \frac{C_F C_l C_t^2}{C_\psi} = \frac{C_m C_l^2}{C_\psi}$ (2.51)
17) Коэффициент линейного сопротивления, Н·с/м	$C_B = \frac{C_F C_t}{C_l}$ (2.35) $C_B = \frac{C_F}{C_{vc}} = \frac{C_F}{C_g C_t}$ (2.49), (2.57) $C_B = C_F$
18) Коэффициент углового сопротивления, Н·м·с/рад (2.40), (2.41), (2.43)	$C_{B\varphi} = \frac{C_B C_l^2}{C_\psi} = \frac{C_C C_l^2 C_t}{C_\psi} = \frac{C_F C_l C_t}{C_\psi}$
19) Линейная жёсткость, Н/м (2.36), (2.38)	$C_C = \frac{C_m}{C_t^2} = \frac{C_B}{C_t} = \frac{C_F}{C_l}$
20) Угловая жёсткость вала, Н·м/рад (2.43), (2.44), (2.46)	$C_{C\varphi} = \frac{C_B C_l^2}{C_\psi C_t} = \frac{C_C C_l^2}{C_\psi} = \frac{C_F C_l}{C_\psi}$

В данном примере мы рассмотрели только два дифференциальных уравнения: поступательных поперечных колебаний (2.21) и угловых колебаний тележки (2.19). При этом мы не рассматривали зависимости нелинейных функций сил от перемещений. Несмотря на это обстоятельство, результаты последующего усложнения задачи дадут незначительные изменения в результатах анализа или будут совпадать с вышеизложенными.

Следовательно, выполнив анализ механических систем на основе их дифференциальных уравнений (2.27) и (2.28) соответственно для объекта и его модели, можно сделать заключение, что для динамического подобия физической модели натурному объекту необходимо в соответствии с третьей теоремой подобия соблюдать следующие *граничные условия* по значениям масштабов подобия

$$C_\omega = C_n = C_t = C_T = C_\psi = C_{vc} = 1;$$

$$C_m = C_B = C_C = C_F = C_N;$$

$$C_J = C_{B\varphi} = C_{C\varphi};$$

$$C_{B\varphi} = C_B C_l^2; \quad C_{C\varphi} = C_C C_l^2;$$

$$C_J = C_m C_l^2 \text{ при обеспечении } C_\psi = 1;$$

$$C_M = C_F C_l;$$

$$C_v = \frac{C_B C_l}{C_m} = C_l \text{ при обеспечении } C_m = C_B,$$

где *масштабы подобия*:  $C_\omega$  – частот собственных колебаний;  $C_n$  – коэффициента затухания амплитуд колебаний;  $C_t$  – времени испытаний;  $C_T$  – периода колебаний (времени релаксации фрикционных связей);  $C_\psi$  – угловых координат;  $C_{Vc}$  – скорости относительного скольжения;  $C_m$  – массы;  $C_B$  – коэффициента сопротивления связей;  $C_C$  – коэффициента упругих свойств связей;  $C_F$  – силы;  $C_N$  – нагрузки;  $C_J$  – момента инерции;  $C_{B\phi}$  – коэффициента сопротивления угловым колебаниям;  $C_{C\phi}$  – коэффициента угловых упругих связей;  $C_J$  – момента инерции;  $C_M$  – крутящего момента;  $C_v$  – скорости качения.

### 2.3 Динамическое подобие фрикционной подсистемы

При фрикционном взаимодействии твёрдых тел на поверхностях трения происходят сложные механические и физико-химические процессы: окисление, диффузионное перераспределение, фазовые и структурные превращения, упругое и пластическое деформирование микронеровностей, разрушение поверхностных слоёв. Чем выше уровень подсистемы, тем менее инерционны эти процессы.

Адекватные условия сцепления поверхностей трения натурального колеса и рельса и их модели характеризуются характерным *видом износа и интенсивностью изнашивания контактирующих тел*.

Если разрабатываемая динамическая модель достаточно точно отражает поведение системы, то она содержит *необходимые ограничения*, а это позволяет получить решение, которое отражает возможное для физической реализации состояние системы. Рассмотрим возможные ограничения для фрикционных систем.

При создании физической модели натурального узла трения необходимо учитывать помимо всего прочего различие между прочностью адгезионной связи и прочностью нижележащих слоёв. Если связь менее прочна, чем нижележащие слои, то имеет место положительный градиент механических свойств по глубине

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} > 0,$$

где  $\sigma_x$  – разрушающее напряжение в направлении плоскости касания;  
 $z$  – координата, перпендикулярная к плоскости касания.

При этом условии имеет место внешнее трение, так как поверхностные свойства твёрдых тел характеризуют этот процесс, и все деформации сосредоточиваются в тонком поверхностном слое. В противном случае связь прочнее нижележащих слоёв, разрушение будет происходить по бо-

лее слабому месту на значительной глубине от поверхности контакта, в деформировании будут участвовать значительные объёмы, поверхности будут шероховатыми, а тангенциальное сопротивление будет обусловлено объёмными свойствами твёрдых тел. Трение перейдёт в разрушение значительных толщин контактирующих тел.

Если в физической модели натурального узла трения не учитывать указанное выше обстоятельство, то результаты модельных исследований могут быть ошибочными. Следовательно, непременным условием подобия модельного и натурального узлов трения является обеспечение равенства реализуемых в контактной области величин коэффициента трения  $f$  и его масштаба подобия  $C_f$

$$f = \frac{F}{N} = idem, \quad C_f = \frac{(f)_H}{(f)_M} = 1,$$

где  $F$  – тангенциальная сила трения, Н;

$N$  – сила нормального воздействия контактирующих тел, Н.

В результате взаимного перемещения контактирующих поверхностей, взаимодействия компонентов (микронеровностей) на фрикционном контакте возникают деформации материалов контактирующих тел, что приводит к возникновению нормальных и тангенциальных напряжений в контактной области, вынужденных колебаний с частотой  $\omega$  возмущающей силы, а также сопротивления движению. Трение скольжения всегда сопровождается возникновением колебаний и выделением тепла.

Под *активным микрообъёмом материала поверхности трения* (рис. 2.12) будем понимать ту зону деформаций материалов контактирующих тел, в которой развиваются процессы, приводящие к изменению физико-механических свойств материалов контактирующих поверхностей.

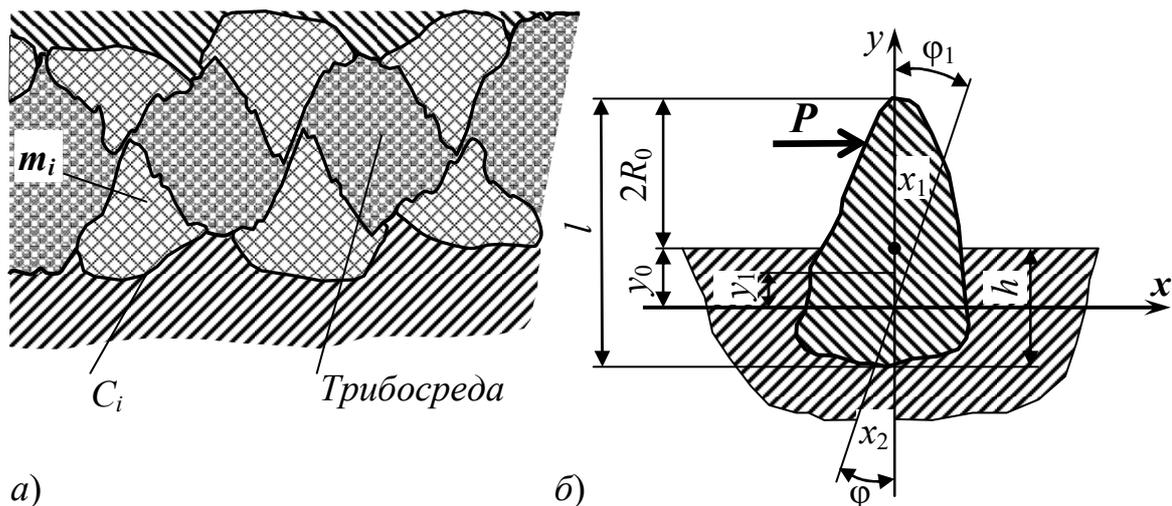


Рис. 2.12 – Активный микрообъём материала поверхности трения: *а* – последовательность активных объёмов ( $m_i$  – масса  $i$ -го объёма;  $C_i$  – жёсткость  $i$ -го объёма); *б* – характеристики  $i$ -го объёма ( $P$  – внешняя сила;  $h$  – глубина внедрения в основной материал;  $2R_0$  – средняя высота;  $l$  – высота;  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – координаты центра тяжести;  $\varphi, \varphi_1$  – углы деформации)

Активный микрообъём – это тот тонкий трибослой, определяющий, в конечном счёте, триботехнические характеристики пар трения.

При моделировании фрикционных подсистем необходимым условием, обеспечивающим характерный вид изнашивания поверхностей модели и натуры является идентичность контактного давления  $Q$  (табл. 1.3) и, соответственно, масштаба подобия давления  $C_Q$

$$Q = \frac{N}{A_r} = idem, \quad C_Q = \frac{(Q)_H}{(Q)_M} = 1,$$

где  $A_r$  – фактическая площадь касания образца и контрообразца, м<sup>2</sup> (2.125).

Идентичность контактного давления объекта исследования и модели  $C_Q = 1$  обуславливает равенство масштаба подобия нормальной нагрузки (силы) масштабу подобия площади контакта  $C_{Ar}$ , то есть

$$C_N = C_F = C_{Ar} = C_l^2.$$

Константа подобия ускорения свободного падения  $C_g = 1$  обуславливает равенство масштабов подобия массы  $C_m$ , силы  $C_N$  и фактической площади касания контактирующих тел  $C_{Ar}$

$$C_m = C_N = C_{Ar} = C_l^2, \quad \text{так как } C_m = C_N / C_g.$$

Скорость скольжения  $v_c$  может влиять на величину коэффициента трения  $f$  через скорость распространения пластической деформации. При постоянной номинальной площади касания  $A_a$  увеличение скорости скольжения  $v_c$  как натурального, так и модельного узлов трения приводит к:

- снижению молекулярной прочности фрикционных связей с локализацией пластической деформации в тонком поверхностном слое,
- выглаживанию поверхности трения,
- уменьшению её шероховатости  $R_a$  или  $R_z$ ,
- повышению объёмной температуры  $\Theta_V$ ,
- повышению средней температуры на номинальной (или контурной) поверхности трения  $\Theta^*$ ,
- значительному повышению температурной вспышки  $\Theta_{всп}$ , как функции от  $v_c^{1/2}$ ,
- снижению коэффициента трения  $f$ .

Кроме того, частота вынужденных колебаний напряжений для данного активного микрообъёма (рис. 2.12) будет определяться числом импульсов взаимодействий микрообъёмов  $n$  в единицу времени  $t$ , то есть  $n/t$ . Так как количество импульсов взаимодействий в единицу времени  $n/t$  пропорционально скорости скольжения  $v_c = S/t$ , то скорость относительного проскальзывания прямо пропорциональна пути трения скольжения  $S$  и частотам вынужденных колебаний  $\omega_i$  активных микрообъёмов. Следовательно, масштаб подобия скорости относительного скольжения при модельных и натуральных испытаниях определяется как

$$v_c = \frac{S}{t} = idem, \quad C_{vc} = \frac{C_S}{C_t} = \frac{1}{1} = 1,$$

где *масштабы подобия*:  $C_S$  – пути трения скольжения;  $C_t$  – продолжительности трения.

Совпадение частоты колебаний  $\omega$  с одной из собственных частот активных микрообъёмов  $\omega_i = \sqrt{C_i/m_i}$  (рис. 2.12) способствует резонансу данного  $i$ -го активного объёма, что, в конечном счёте, снижает устойчивость формирования фрикционных связей. Данные состояния заключаются в *формировании одной или нескольких несущих частот трибоспектра и совпадении их с  $n$ -ыми собственными частотами фрикционной системы*.

Частота собственных колебаний определяет динамические свойства системы, реализацию идентичных равновесных шероховатостей натурального образца и его модели. Следовательно, при моделировании фрикционного контакта частоты собственных колебаний  $\omega$  напряжений для данного активного микрообъёма модели и натуры также должны быть идентичны, что обеспечивается масштабом подобия  $C_\omega$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{C_i}{m_i}} = \sqrt{\frac{C_i r_i^2}{J_i}} = idem, \quad C_\omega = \sqrt{\frac{C_C}{C_m}} = \sqrt{\frac{C_C \cdot C_r^2}{C_J}} = 1,$$

где *масштабы подобия*:  $C_C$  – коэффициента упругости (жёсткости связи) активного микрообъёма;  $C_r$  – радиуса приложения силы;  $C_J$  – момента инерции активного микрообъёма.

Так как период релаксации (восстановления) фрикционных связей  $T$  связан обратной пропорциональностью с частотой  $\omega$  их деформации, возникновения нормальных и тангенциальных напряжений, то процессы трения и изнашивания при моделировании натуральных систем необходимо исследовать только в реальном времени  $t$ . При этом масштаб подобия времени испытаний  $C_t$ , периода колебаний активных микрообъёмов  $C_T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = idem, \quad C_T = \frac{1}{C_\omega} = \frac{1}{1} = 1.$$

Подобие нагрузочно-скоростных условий эксплуатации и динамических характеристик фрикционного контакта натурального объекта и его модели (давления  $C_Q = 1$ , скорости скольжения  $C_{vc} = 1$ , частот  $C_\omega = 1$  и периода  $C_T = 1$  собственных колебаний) возможно только, если амплитуды деформации фрикционных связей  $A$  пропорциональны скорости относительного скольжения ( $A = v_c t$  или в масштабах подобия  $C_A = C_{vc} C_t$ ). При обеспечении масштабов подобия времени  $C_t = 1$  и скорости скольжения  $C_{vc} = 1$  получим масштаб амплитуд деформации связей  $C_A = 1$ .

Перечисленные выше граничные условия подобия для фрикционного контакта натурального объекта и его модели определяют их физико-механические характеристики, такие как:

- модуль упругости Юнга  $E$ , МПа (масштаба подобия  $C_E = 1$ );
- твёрдость  $HB$ , МПа (масштаба подобия  $C_{HB} = 1$ );
- плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup> (масштаба подобия  $C_\rho = 1$ );
- градиента температуры  $\Delta\Theta$ , °С/м (масштаба подобия  $C_{\Delta\Theta} = 1$ );

- масс эффективных теплопоглощающих объёмов (рис. 2.12,б)  $m_э$ , кг;
- жёсткости эффективных теплопоглощающих объёмов (рис. 2.12,б)  $C_э$ , Н/м, причём масштабы подобия масс и жесткостей  $C_{mэ} = C_{Cэ}$ .

Следовательно, используемые при моделировании натуральных фрикционных подсистем материалы поверхностей трения должны быть такими же, как и на натурном объекте.

В противном случае, то есть если вышеуказанные масштабы не выполняются, то произвольное изменение какого-либо из масштабов подобия (например, масс эффективных теплопоглощающих объёмов  $C_{mэ}$ , либо их плотности  $\rho$ , либо нормальной нагрузки  $N$  или скорости скольжения  $v_c$ ) может привести к изменению на целый порядок изменение сложившегося равновесного состояния и соотношения между частотами вынужденных и собственных колебаний активных микрообъёмов, амплитудами деформации фрикционных связей, выходных триботехнических параметров узла трения (коэффициента трения и стабильности его значений, износостойкости). В данном случае переход системы в другое равновесное состояние связан с изменением неровности поверхностей трения, реализацией иных частот собственных колебаний активных микрообъёмов, что нежелательно при проведении модельных испытаний.

Рассмотрим параметры микро- и макрогеометрии поверхности контактирующих тел. Различают три типа неровности поверхностей трения:

- *макроотклонения* – это единичные, регулярно не повторяющиеся отклонения поверхности от номинальной формы (конусность, выпуклость, вогнутость рабочей поверхности, овальность, огранку и ряд других видов отклонений);

- *волнистость* – совокупность периодических, близких по размерам выступов и впадин. Расстояние между двумя соседними выступами или впадинами называют *шагом волны*  $S_в$ . *Высоту волны*  $H_в$  определяют, как среднее расстояние от номинального профиля поверхности до верхней точки выпуклости или нижней точки впадины. Для волнистости  $S_в/H_в \geq 40$ ;

- *шероховатость* – совокупность неровностей, шаг которых от 2 до 800 мкм, а высота изменяется от 0,008 до 400 мкм.

Для определения различий между шероховатостью и неровностями других типов установлена так называемая *базовая длина*. За базовую длину принимают длину базовой линии  $l$  (рис. 2.13), используемую для выделения неровностей, характеризующих шероховатость поверхности, и для количественного определения её параметров. ГОСТ 2789-73, ИСО 6508-86 устанавливает значения базовых длин: 0,08; 0,25; 0,80; 2,5; 8 и 25 мм.

При измерении параметров профиля за линию отсчёта принимают *среднюю линию*  $m$ , имеющую форму номинального профиля и проведённую так, что в пределах базовой длины  $l$  среднее квадратичное отклонение профиля (площади по обеим сторонам) от этой линии минимально.

*Линия выступов (впадин) профиля* – линия эквидистантная средней линии, проходящая через высшую (низшую) точку профиля в пределах базовой длины  $l$ .

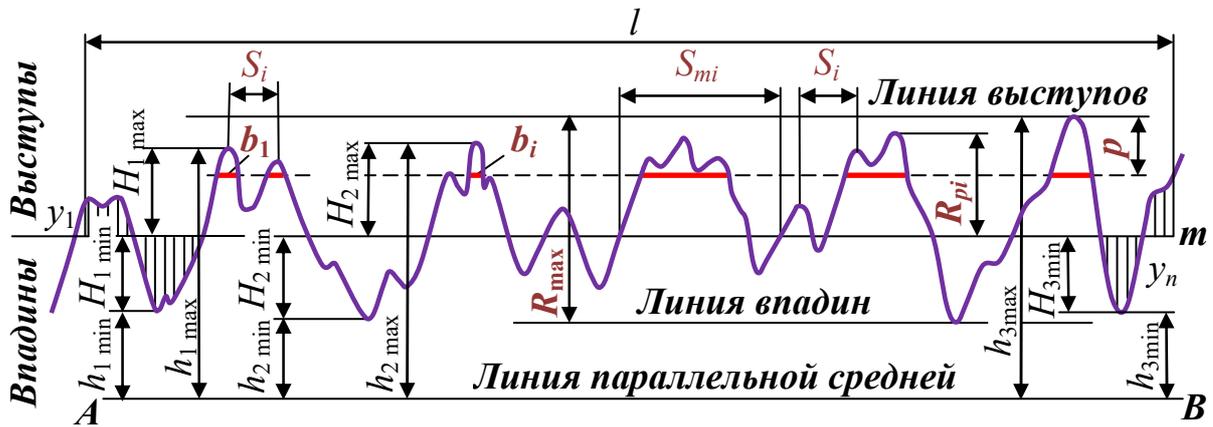


Рис. 2.13 – Параметры шероховатости:  $l$  – базовая длина;  $m$  – средняя линия профиля;  $S_{mi}$  – средний шаг неровностей профиля;  $S_i$  – средний шаг местных выступов профиля;  $H_{i \max}$  – отклонение наибольших максимумов профиля;  $H_{i \min}$  – отклонение наибольших минимумов профиля;  $h_{i \max}$  – расстояние от наибольших максимумов до линии параллельной средней и не пересекающей профиль;  $h_{i \min}$  – расстояние от наибольших минимумов до линии параллельной средней и не пересекающей профиль;  $R_{\max}$  – наибольшая высота профиля;  $R_p$  – расстояние от линии выступов до средней линии;  $y_i$  – отклонения профиля от линии  $m$ ;  $p$  – уровень сечения профиля (расстояние между линией выступов профиля и линией, пересекающей профиль эквидистантной линии выступов профиля);  $b_i$  – длина отрезков, отсекаемых на уровне  $p$ .

Размеры неровностей по нормали к базовой линии отсчёта  $l$  характеризуют параметры:

- среднее арифметическое отклонение профиля  $R_a$ , мкм;
- высота неровностей профиля по десяти точкам  $R_z$ , мкм;
- наибольшая высота неровностей профиля  $R_{\max}$ , мкм;
- наибольшая высота выступа (глубина сглаживания)  $R_p$ , мкм.

*Среднее арифметическое отклонение профиля  $R_a$ , мкм (табл. 2.3)*

$$R_a = \frac{10^3}{\gamma_B l} \int_0^l |y_i| dx \quad \text{или} \quad R_a = \frac{10^3}{\gamma_B n} \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad (2.62)$$

где  $\gamma_B$  – вертикальное увеличение записи микрорельефа;

$l$  – базовая длина, мм (табл. 2.3);

$y$  – расстояние между любой точкой профиля и средней линией, мм, измеренное по нормали, проведённой к средней линии через эту точку;

$n$  – количество выбранных точек.

*Вертикальное увеличение профилографа* вычисляют, исходя из предполагаемого значения высот неровностей и ширины диаграммной ленты, на которой будет записана профилограмма, по формуле

$$\gamma_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{B}{H} \cdot 10^3,$$

где  $B$  – ширина диаграммной ленты, мм;

$H$  – ожидаемая высота (глубина) наибольших неровностей, мкм.

Табл. 2.3 – Классы шероховатости (ГОСТ 2789-73, ОСТ 92-0080-78) и соответствующие им наибольшие значения параметров шероховатости

Классы шероховатости	Параметры шероховатости, мкм *						Базовая длина $l$ , мм
	$R_a$			$R_z$			
грубее 1-го							1600
				1250	1000	800	25
				<b>100</b>	630	500	
1	80	63	<b>50</b>	320	250	<b>200</b>	
2	40	32	<b>25</b>	160	125	<b>100</b>	
3	20	16	<b>12,5</b>	80	63	<b>50</b>	
4	10	8	<b>6,3</b>	40	32	<b>25</b>	2,5
5	5	4	<b>3,2</b>	20	16	<b>12,5</b>	
6	2,5	2	<b>1,6</b>	10	8	—	0,8
7	1,25	1	<b>0,8</b>	<b>6,3</b>	5	4	
8	0,63	0,5	<b>0,4</b>	<b>3,2</b>	2,5	2	
9	0,32	0,25	<b>0,2</b>	<b>1,6</b>	1,25	1	0,25
10	0,16	0,125	<b>0,1</b>	<b>0,8</b>	0,63	0,5	
11	0,08	0,063	<b>0,05</b>	<b>0,4</b>	0,32	0,25	
12	0,04	0,032	<b>0,025</b>	<b>0,2</b>	0,16	0,125	0,08
13	0,02	0,016	<b>0,012</b>	<b>0,1</b>	0,08	0,063	
14	0,01	0,008		<b>0,05</b>	0,04	0,032	
—				<b>0,025</b>			

\* предпочтительные значения выделены полужирным начертанием

Высота неровностей профиля по десяти точкам  $R_z$ , мкм (табл. 2.3)

$$R_z = \frac{10^3}{5\gamma_B} \left( \sum_{i=1}^5 |H_{i \min}| + \sum_{i=1}^5 |H_{i \max}| \right) = \frac{10^3}{5\gamma_B} \left( \sum_{i=1}^5 h_{i \max} - \sum_{i=1}^5 h_{i \min} \right), \quad (2.63)$$

где  $\gamma_B$  – вертикальное увеличение записи микрорельефа;

$H_{i \min}$ ,  $H_{i \max}$  – отклонения наибольших высот впадин и выступов, мм.

Наибольшая высота неровностей профиля, определяемая как расстояние между линией выступов профиля и линией впадин профиля в пределах базовой длины, мкм

$$R_{\max} = \frac{10^3}{\gamma_B} \cdot (H_{\min} + H_{\max}), \quad (2.64)$$

где  $\gamma_B$  – вертикальное увеличение записи микрорельефа;

$H_{\min}$ ,  $H_{\max}$  – наибольшие значения из пяти отклонений наибольших высот впадин и выступов профиля, мм.

Наибольшая высота выступа – это расстояние между линией выступов и средней линией профиля, мкм:

$$R_p = \frac{10^3}{\gamma_B 5} \sum_{i=1}^5 |R_{pi}|, \quad (2.65)$$

где  $\gamma_B$  – вертикальное увеличение записи микрорельефа;

$R_{pi}$  – максимальные отклонения от линии выступов до средней линии, мм.

Параметр  $R_a$  является предпочтительным.

К *шаговым параметрам неровностей профиля* (табл. 2.4) относят:

- средний шаг неровностей  $S_m$ , мкм;
- средний шаг неровностей по вершинам  $S$ , мкм.

Табл. 2.4 – Средний шаг неровностей  $S_m$  и средний шаг неровностей по вершинам  $S$  (ГОСТ 2789-73), мкм

—	10,0	1,00	0,100	0,010
—	8,0	0,80	0,080	0,008
—	6,3	0,63	0,063	0,006
—	5,0	0,50	0,050	0,005
—	4,0	0,40	0,040	0,004
—	3,2	0,32	0,032	0,003
—	2,5	0,25	0,025	0,002
—	2,0	0,20	0,020	—
—	1,6	0,16	0,016	—
12,5	1,25	0,125	0,0125	—

*Средний шаг неровностей* – это среднее арифметическое значение шага неровностей профиля в пределах базовой длины, мкм

$$S_m = \frac{1}{\gamma_r k} \sum_{i=1}^k S_{mi}, \quad (2.66)$$

где  $\gamma_r$  – горизонтальное увеличение профилограммы;

$k$  – число выступов, используемых при определении (не менее 5);

$S_{mi}$  – длины отрезков средней линии между точками её пересечения с одноименными сторонами двух соседних местных выступов профиля, мм;

*Средний шаг неровностей по вершинам* (местных выступов), мкм

$$S = \frac{1}{\gamma_r u} \sum_{i=1}^u S_i,$$

где  $\gamma_r$  – горизонтальное увеличение профилограммы;

$u$  – число выступов, используемых при определении (не менее 5);

$S_i$  – шаг неровностей профиля по вершинам в пределах базовой длины.

К *структурным параметрам неровностей профиля* поверхности относят:

- средний радиус кривизны вершин выступов  $r$ , мкм;
- средний угол наклона неровностей профиля  $\varphi$ , рад;

– относительную опорную длину профиля  $t_p$ , %

*Средний радиус кривизны вершин выступов* – это среднее значение кривизны выступов вершин, определяемое для пяти наиболее высоким выступам в пределах базовой длины

$$r = \sqrt{r_n r_{np}}, \quad (2.67)$$

где  $r_n$  и  $r_{np}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин выступов для поперечной и продольной профилограмм (табл. 2.5)

$$r_n = \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{d_{ni}^2}{h_{ni}}; \quad r_{np} = \frac{\gamma_{впр}}{8\gamma_{\Gamma пр}^2} \cdot \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{d_{npi}^2}{h_{npi}}, \quad (2.68)$$

где  $\gamma_B$  и  $\gamma_\Gamma$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для поперечной профилограммы;

$\gamma_{впр}$  и  $\gamma_{\Gamma пр}$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для продольной профилограммы;

$s, u$  – число наиболее высоких выступов;

$d_{ni}$  и  $d_{npi}$  – ширина сечений на расстоянии  $0,3R_a$  или  $0,06R_{max}$  от вершин  $h_n$  и  $h_{np}$  (рис. 2.14).

Табл. 2.5 – Радиусы кривизны вершин выступов и средние значения угла наклона боковых сторон неровностей профиля

Вид обработки	Класс	Радиус, мкм		Угол наклона, °	
		поперечный $r_n$	продольный $r_{np}$	поперечный $\varphi_n$	продольный $\varphi_{np}$
точение	5–6	20–40	100–300	20–5	20–5
	7–8	40–120	400–500		
шлифование	6–7	4–10	100–15000	35–7	10–2
	4–5	30–60	400–500		
фрезерование	6–7	60–80	400–500		
	8–9	300–700			
полирование	10	500–1000	500–1000	13–3	4–1
	10–12	15–250	7000–35000		
доводка				20–5	10–2

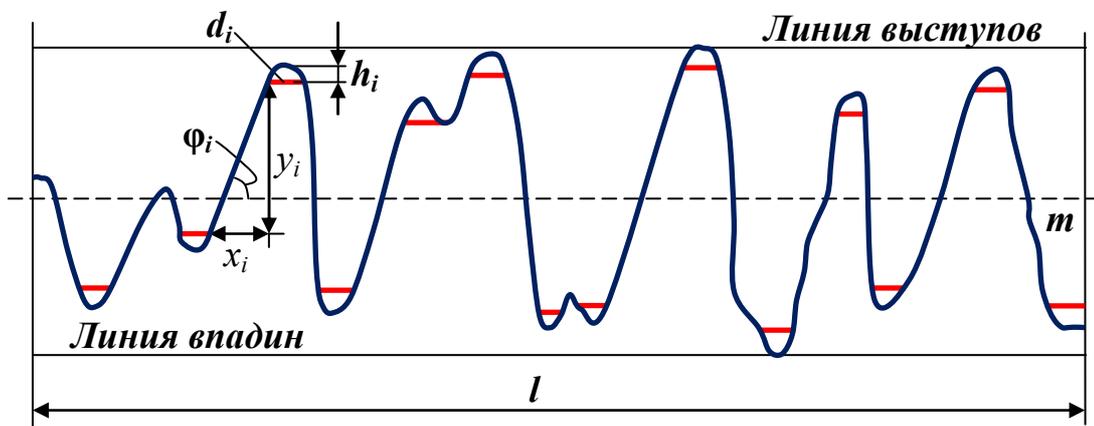


Рис. 2.14 – Схема для расчёта радиусов кривизны вершин выступов и углов наклона

Длину продольной профилограммы  $l$  выбирают больше базовой длины так, чтобы на ней было не менее *пяти* выступов. Если же шероховатость поверхности недостаточно однородна, то обрабатывают ряд профилограмм, снятых с различных участков поверхности.

В случаях, когда требуется определить радиус кривизны не вершины, а всего выступа (моделируемого сферическим сегментом), ширину сечений выступов берут по средней линии.

Для расчётов принимают среднее значение угла наклона  $\varphi$  боковых сторон неровностей профиля к средней линии в пределах базовой длины

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{tg}(\varphi_i) \right], \quad (2.69)$$

где  $n$  – количество измеренных углов;

$\varphi_i$  – углы наклона элементов профиля к средней линии

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_{\Gamma} y_i}{\gamma_{\text{В}} x_i},$$

где  $x_i$  и  $y_i$  – катеты треугольника (рис. 2.14), образованного перпендикуляром к средней линии  $y_i$ , опущенным из точки профиля, удалённой от вершины на  $0,3R_a$  ( $0,06R_{\max}$ );

$\gamma_{\text{В}}$  и  $\gamma_{\Gamma}$  – вертикальное и горизонтальное увеличение профилограммы.

*Опорная кривая* характеризует распределение материала по высоте шероховатого слоя (рис. 2.15), показывающая закономерность нарастания площади опоры в выбранном сечении  $p$  при сближении в процессе взаимодействия абсолютно гладкого тела с реальной шероховатой поверхностью. Опорная кривая преимущественно строится в относительных величинах. В этом случае по оси абсцисс откладывают отношение суммы сечений выступов на данном уровне к длине обрабатываемой профилограммы, а по оси ординат  $\varepsilon_{\max}$  – отношение сближения  $a$  к наибольшей высоте неровностей профиля  $R_{\max}$  или наибольшей высоте выступа  $R_p$ .

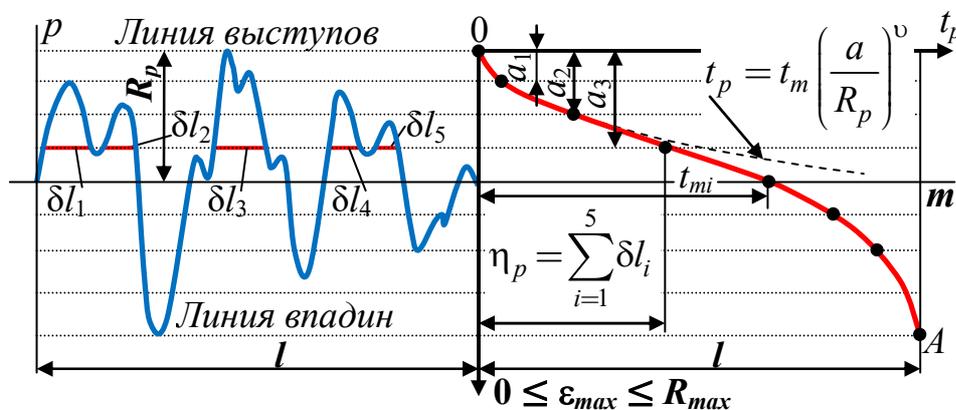


Рис. 2.15 – Схема построения опорной кривой Аббота

В этом случае *относительная опорная длина профиля* позволяет судить о фактической площади контакта на заданном уровне сечения  $p$ , ко-

торый выбирается из ряда 10; 15; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90 % от  $R_{max}$ , а начальная часть опорной кривой может быть представлена в виде

$$t_p = \frac{\eta_p}{l} = \frac{1}{\gamma_r l} \sum_{p=1}^n \delta l_p \times 100\% \approx \frac{A_r}{A_c} = b_p \varepsilon_{max}^v = t_m \varepsilon^v, \quad (2.70)$$

где  $t_p$  – относительная опорная длина профиля: 10; 15; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90 %;

$\gamma_r$  – горизонтальное увеличение профилограммы;

$l$  – базовая длина, мм (табл. 2.3);

$\delta l_p$  – длины отрезков в пределах базовой длины  $l$  на заданном уровне  $p$  в материале выступов профиля линией, параллельной средней линии;

$A_p$  – фактическая площадь касания на уровне  $p$ ;

$A_c$  – контурная площадь поверхности по базовой длине;

$\varepsilon_{max}, \varepsilon$  – относительные величины  $\varepsilon_{max} = a/R_{max}$ ,  $\varepsilon = a/R_p$ ;

$a$  – величина сближения на уровне  $p$ ;

$b_p$  – параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (от вершины до средней линии)

$$b_p = t_m \left( \frac{R_{max}}{R_p} \right)^v; \quad (2.71)$$

$R_{max}$  – наибольшая высота неровностей профиля, мкм;

$R_p$  – наибольшая высота выступа (глубина сглаживания), мкм.

$t_m$  – относительная опорная длина по средней линии  $t_{mi}$  (рис. 2.15) для пяти профилограмм, имеющих длину, равную базовой

$$t_m = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_{mi}; \quad (2.72)$$

$t_{mi}$  – относительная опорная длина на уровне  $p$  (2.70), соответствующем средней линии профиля;

$v$  – параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки

$$v = 2t_m \frac{R_p}{R_a} - 1. \quad (2.73)$$

И.В. Крагельский, Е.Ф. Непомнящий, В.С. Комбалов предложили оценивать шероховатость поверхности комплексной характеристикой, учитывающей остроту микровыступов и их распределение по высоте

$$\Delta = \frac{R_{max}}{r \cdot b_p^{1/v}}, \quad (2.74)$$

где  $R_{max}$  – наибольшая высота неровностей профиля, мкм (2.64);

$r$  – средний радиус кривизны вершин выступов, мкм (2.67);

$b_p$  – параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (2.71);

$\nu$  – параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки (2.73).

Для контакта двух шероховатых поверхностей параметры  $R_p$  (2.65),  $r$  (2.67),  $b_p$  (2.71),  $t_m$  (2.72) и  $\nu$  (2.73) принимают значения

$$R_p = (R_{p1} + R_{p2}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{\nu_1 + \nu_2}}\right); \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2};$$

$$b_p = b_{p1} b_{p2} \frac{K_2 (R_{\max 1} + R_{\max 2})^{\nu_1 \nu_2}}{R_{\max 1}^{\nu_1} R_{\max 2}^{\nu_2}}; \quad \nu = \sqrt[3]{(\nu_1 + \nu_2)^2}; \quad (2.75)$$

$$t_m = t_{m1} t_{m2} \frac{K_2 (R_{p1} + R_{p2})^{\nu_1 \nu_2}}{R_{p1}^{\nu_1} R_{p2}^{\nu_2}}; \quad K_2 = \frac{\Gamma(\nu_1 + 1) \Gamma(\nu_2 + 1)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + 1)},$$

где параметры  $R_{p1}$ ,  $r_1$ ,  $b_{p1}$ ,  $t_{m1}$  и  $\nu_1$  берутся из первой профилограммы, а параметры  $R_{p2}$ ,  $r_2$ ,  $b_{p2}$ ,  $t_{m2}$  и  $\nu_2$  – из второй профилограммы;

$K_2$  – коэффициент гамма-функции  $\Gamma(x)$  начальной части опорной кривой поверхности трения;

$\Gamma(x)$  – Гамма-функция аргумента  $x$ .

Характеристики волнистости определяют по волнограммам.

Наибольшую высоту волн  $H_\epsilon$  и средний шаг волны  $S_\epsilon$  получают также, как характеристики шероховатости  $R_{\max}$  (2.64) и  $S_m$  (2.66), поэтому специальных пояснений здесь не требуется. Следует отметить только, что волнограмма должна иметь длину не менее пяти средних шагов волны  $S_\epsilon$ . Предельные значения высоты волны  $H_\epsilon$  должны выбираться из ряда 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 1,6; 3,2; 6,3; 12,5; 25; 50; 100; 200; 400 мкм.

Средний радиус кривизны вершин волн меняется в пределах от 10 мм (например, при внутреннем или круглом шлифовании, 6–9 классы шероховатости) до 1000 мм (например, при шабрении, 8 класс шероховатости) и оценивают выражением, аналогичным (2.67)

$$R_\epsilon = \sqrt{R_{\epsilon n} R_{\epsilon np}}, \quad (2.76)$$

где  $R_{\epsilon n}$  и  $R_{\epsilon np}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин волн для поперечной и продольной волнограмм

$$R_{\epsilon n} = \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{\epsilon ni}^2}{h_{\epsilon i}}; \quad R_{\epsilon np} = \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{d_{\epsilon npi}^2}{h_{\epsilon npi}},$$

$\gamma_B$  и  $\gamma_\Gamma$  – вертикальное и горизонтальное увеличение;

$k$  и  $q$  – число волн в поперечном и продольном направлении;

$d_{\epsilon i}$  – длина сечения волны средней линией;

$h_{\epsilon i}$  – расстояние от вершины волны до средней линии.

Для расчёта контурной площади контакта  $A_c$  в выражении (2.70) используется модель волн в виде сферических (или эллиптических) сегментов. Если шероховатость невелика  $R_{\max} < 0,1 \cdot H_e$ , где  $H_e$  – высота волны, то волны можно рассматривать как гладкие и использовать для расчёта зависимости, основанные на формулах Герца. При большой шероховатости  $R_{\max} \geq 0,1 \cdot H_e$  деформируемые микронеровности, расположенные на вершинах волн, начинают влиять одна на другую. Взаимное влияние микровыступов проявляется в возникновении упругого приседания элементов площади контакта в результате суммарного воздействия расположенных на них контактирующих микровыступов. Взаимное влияние микровыступов приводит к сглаживанию эпюры давления и существенному увеличению площади контакта по сравнению с рассчитанной по формулам Герца.

При расчётах различают случаи:

- малой и большой высоты выступов по отношению к высоте волн;
- упругой и пластической деформации микронеровностей;
- малое число волн  $n_e = 1-3$ , когда оно не меняется с увеличением нагрузки, и большое число волн, когда по мере нагружения число контактирующих волн возрастает;
- обе поверхности волнистые или одна волнистая, а другую можно принять плоской.

Различают следующие пять вариантов расчёта контурной площади касания, зависящей от условий эксплуатации узла трения и, как было сказано ранее, соотношения глубины сглаживания  $R_{\max}$  и высоты волны  $H_e$ .

1) При  $R_{\max} < 0,1 \cdot H_e$ , небольших нагрузках, малой номинальной площади касания  $A_a$ , соизмеримой с шагом волны  $S_e^2$ , имеем по формуле Герца

$$A_c = 2,8 \cdot \sqrt[3]{n_e \left( \frac{R_e N}{E^*} \right)^2},$$

где  $n_e$  – количество контактирующих волн ( $n_e = 1-3$ );

$R_e$  – приведённый радиус волны, м

$$R_e = \frac{R_{e1} R_{e2}}{R_{e1} + R_{e2}}; \quad (2.77)$$

$N$  – нормальная нагрузка, Н;

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па

$$E^* = \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} = \frac{E_1 E_2}{E_2 (1 - \mu_1^2) + E_1 (1 - \mu_2^2)}; \quad (2.78)$$

$\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты Пуассона материалов контактирующих тел;

$E_1, E_2$  – модули упругости материалов контактирующих тел, Па;

Если контактирующие поверхности изготовлены из одного и того же материала, то приведённый модуль упругости (2.78)

$$E^* = \left( 2 \frac{1 - \mu^2}{E} \right)^{-1}.$$

2) При  $R_{\max} < 0,1 \cdot H_g$ , количестве контактирующих волн  $n_g > 3$ , номинальной площади касания  $A_a$ , значительно превышающей шаг волны  $S_g^2$

$$A_c = 2,2 A_a^{0,14} \left( \frac{R_g}{H_g} \right)^{0,43} \left( \frac{N}{E^*} \right)^{0,86},$$

где  $A_a$  – номинальная площадь, м<sup>2</sup> (2.79);

$R_g$  – приведённый радиус волны, мкм (2.77);

$H_g$  – высота волны, мкм;

$N$  – нормальная нагрузка, Н;

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.78).

Номинальная площадь касания (см. рис. 1.7,в), м<sup>2</sup> по теории Г. Герца (1882 г.) совпадает со всей площадью контактирующей поверхности

$$A_a = l \times b_a, \text{ м}^2, \quad (2.79)$$

где  $l$  – ширина участка поверхности трения, м;

$b_a$  – полуширина площадки контакта пары трения, м, определяющей максимальные напряжения по площади контакта (эллипсу) на глубине от поверхности, равной  $z = 0,8b_a$

$$b_a = 1,522 \sqrt{\frac{N}{lE} \left/ \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right.},$$

$N$  – нагрузка на номинальном контакте, Н;

$E$  – модуль Юнга, Па;

$r_1$  – радиус кривизны образца, м;

$r_2$  – радиус кривизны контробразца, м.

3) При  $R_{\max} \geq 0,1 \cdot H_g$ , количестве контактирующих волн  $n_g = 1-3$  и упругой деформации выступов контурная площадь касания асимптотически равна

$$A_c \approx \pi n_g \left[ \left( \frac{3R_g N}{4n_g E^*} \right)^{0,86} + 2,6 R_p R_g \left[ \frac{r}{R_p} \cdot \left( \frac{N}{n_g H} \right)^2 \right]^{0,14} \right]^{0,78},$$

где  $n_g$  – количество контактирующих волн ( $n_g = 1-3$ );

$R_g$  – приведённый радиус волны, м (2.77);

$N$  – нормальная нагрузка, Н;

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.78);

$R_p$  – наибольшая высота выступа, м (2.65);

$r$  – средний радиус кривизны вершин выступов, м (2.67);

$H$  – микротвёрдость по ГОСТ 9450-76 (твёрдость микрообъёмов материала – рис. 2.12,б), для правильной четырёхгранной алмазной пирамидки с углом при вершине  $136^\circ$

$$H = 1,854 \frac{N^*}{\bar{d}^2}, \quad (2.80)$$

$N^*$  – нагрузка вдавливания пирамидки,  $N^* = 0,01-5$  Н;

$\bar{d}$  – среднее арифметическое длины обеих диагоналей отпечатка после снятия нагрузки, мм.

По ГОСТ 9450-76 микротвёрдость записывают без единицы измерения с указанием нагрузки, например,  $140HV0,01$  (140 – число твёрдости, а 0,01 – нагрузка в Н. Для ряда материалов в первом приближении можно считать, что микротвёрдость  $H$  примерно равна твёрдости по Бринеллю  $HB$  и Виккерсу  $HV$ , то есть  $H \approx HB \approx HV$ .

4) При  $R_{\max} \geq 0,1 \cdot H_g$ , количестве контактирующих волн  $n_g = 1-3$  и *пластической деформации выступов* контурная площадь касания асимптотически равна

$$A_c \approx \pi n_g \left[ \left( \frac{3R_g N}{4n_g E^*} \right)^{0,89} + 1,8R_p R_g \left( \frac{N}{n_g H} \right)^{0,33} \right]^{0,75},$$

где  $n_g$  – количество контактирующих волн ( $n_g = 1-3$ );

$R_g$  – приведённый радиус волны, м (2.77);

$N$  – нормальная нагрузка, Н;

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.78);

$R_p$  – наибольшая высота выступа, м (2.65);

$H$  – микротвёрдость по ГОСТ 9450-76 (2.80).

5) При  $R_{\max} \geq 0,1 \cdot H_g$  и количестве контактирующих волн  $n_g > 3$

$$A_c = A_a K_g K_w \left[ \frac{N}{A_a E^*} \sqrt{\frac{2R_g}{H_g}} \right]^{\frac{v_g}{v_g + \delta_w}}, \quad (2.81)$$

где  $A_a$  – номинальная площадь,  $m^2$  (2.79);

$K_g, v_g$  – коэффициенты, зависящие от высоты волн (табл. 2.6);

$K_w, \delta_w$  – коэффициенты влияния шероховатости на деформацию волн (табл. 2.6);

$N$  – нагрузка на номинальном контакте, Н;

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.78);

$R_g, H_g$  – радиус (2.76) и высота волны, мкм.

Таким образом, при изменении геометрического масштаба модельного узла трения идентичность его нагрузочно-скоростных условий эксплуатации и динамических характеристик фрикционного взаимодействия натурному объекту возможно только при равенстве *микрogeометрии поверхностей контактирующих поверхностей*

Табл. 2.6 – Значения коэффициентов в формуле контурной площади касания (2.81)

Деформация выступов	$\frac{E^*}{H}$	Коэффициент		$R_{\max} / H_g$						
		$K_g$	$\nu_g$	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	
				$K_w, \delta_w$						
Упругий контакт	—	1,84	2	<i>Шероховатая поверхность, контактирующая с гладкой</i>						
				$K_w$	0,88	0,85	0,80	0,85	1,1	1,8
				$\delta_w$	0,75	1,1	1,7	2,6	3,6	4,5
				<i>Обе шероховатые поверхности</i>						
				$K_w$	1,05	1,06	1,14	1,25	1,5	2,1
				$\delta_w$	0,65	0,8	1,05	1,4	1,95	2,4
Пластический контакт	< 50	2,38	3	<i>Шероховатая поверхность, контактирующая с гладкой</i>						
				$K_w$	0,95	0,9	0,85	0,85	1,1	1,6
				$\delta_w$	0,7	1,05	1,45	2,15	3,15	3,9
				<i>Обе шероховатые поверхности</i>						
				$K_w$	1,05	1,15	1,2	1,35	1,55	2,1
				$\delta_w$	0,6	0,7	0,85	1,15	1,5	2,3
	50 – 100			<i>Шероховатая поверхность, контактирующая с гладкой</i>						
				$K_w$	0,95	0,88	0,85	0,9	1,2	2,1
				$\delta_w$	0,75	1,1	1,6	2,4	3,4	4,0
				<i>Обе шероховатые поверхности</i>						
				$K_w$	1,1	1,17	1,28	1,45	1,75	2,6
				$\delta_w$	0,65	0,8	1	1,3	1,65	2
	100 – 200			<i>Шероховатая поверхность, контактирующая с гладкой</i>						
				$K_w$	0,9	0,85	0,85	0,93	1,35	2,5
				$\delta_w$	0,8	1,2	1,7	2,6	3,6	4
				<i>Обе шероховатые поверхности</i>						
				$K_w$	1,13	1,2	1,35	1,55	2,1	3,3
				$\delta_w$	0,7	0,85	1,1	1,5	2,35	2

$$C_h = C_r = C_\varphi = C_{Ra} = C_{Rz} = C_{R_{\max}} = C_{Rp} = C_{tp} = C_{tm} = \\ = C_{bp} = C_v = C_{Sm} = C_S = C_{H_g} = C_{R_g} = C_{S_g} = 1,$$

где масштабы подобия:  $C_h$  – высоты микрообъемов поверхности (рис. 2.13);  $C_r$  – среднего радиуса кривизны вершин выступов для поперечной и продольной профилограмм (2.67);  $C_\varphi$  – среднего угла наклона неровностей профиля (2.69);  $C_{Ra}$  – среднего арифметического отклонения профиля (2.62);  $C_{Rz}$  – высоты неровностей профиля по десяти точкам (2.63);  $C_{R_{\max}}$  – наибольшей высоты неровностей профиля (2.64);  $C_{Rp}$  – наибольшей высоты выступа (2.65);  $C_{tp}$  – относительной опорной длины профиля (2.70);

$C_{tm}$  – относительной опорной длины по средней линии (2.72);  $C_{bp}$  – параметра степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (от вершины до средней линии) (2.71);  $C_v$  – параметра опорной кривой поверхности трения, зависящего от вида механической обработки (2.73);  $C_{Sm}$  – среднего шага неровностей (2.66);  $C_S$  – среднего шага неровностей по вершинам (местных выступов);  $C_{He}$  – наибольшей высоты волн;  $C_{Re}$  – радиус кривизны выступов вершин волн (2.76);  $C_{Se}$  – среднего шага волны.

При взаимном перемещении поверхностей трения под воздействием нормальной составляющей силы  $F_N$  и скорости относительного скольжения  $v_c$  изменяются величины амплитуд сближения в нормальном  $y(t)$  и тангенциальном  $x(t)$  направлениях, что вызывает в точках соприкосновения активных микрообъёмов двух поверхностей возникновение силы трения  $F_m$ . Обеспечив подобие нагрузочно-скоростных условий фрикционного взаимодействия модельной и натурной фрикционной систем, мы обеспечиваем реализацию подобных значений коэффициента трения  $f$ , масштаб которого равен  $C_f = 1$ , а также общепринятую закономерность изменения коэффициента трения  $f$  от скорости скольжения  $v_c$  в виде падающей характеристики сцепления поверхностей трения (рис. 2.16).

Характеристика состоит из характерных участков: **O** – начальная ветвь предварительного смещения, реализуемая в начальный момент движения тягового подвижного состава при изменении скорости относительного скольжения  $v_c \leq 0,0014v$ , где  $v$  – скорость движения подвижного состава; **OA** – область реализации упругих свойств фрикционного взаимодействия; **OB** – восходящая ветвь предварительного смещения ( $0,0014v < v_c \leq 0,014v$ ), при которой скорости образования фрикционных связей превышают величину скорости относительного скольжения; **B** – состояние неустойчивого равновесия ( $0,014v < v_c \leq 0,025v$ ) соответствует предельным значениям предварительного смещения, при котором скорость образования фрикционных связей уступают величине скорости скольжения  $v_{кр}$ ; **BC** – падающая ветвь скольжения при ухудшении условий сцепления ( $v_c > 0,025v$ ), что соответствует боксованию или автоколебаниям тяговых колёс локомотива по рельсам («насыщенному контакту», при котором число разорванных фрикционных связей равно числу формируемых в единицу времени и не зависит от скорости относительного скольжения).

Возвратная ветвь характеристики сцепления **DO**, характеризующаяся потерей тяговой мощности локомотива, в зависимости от внешних условий эксплуатации и имеет в зависимости от условий взаимодействия колёс с рельсами одну из нескольких скоростей восстановления фрикционной связи  $v_{31}$ ,  $v_{32}$  или  $v_{33}$ .

Суммарная энергия колебаний механической (фрикционной) системы идёт на изменение инерционных масс, жесткостей связей и демпфирующих характеристик (петли гистерезисных потерь). Та часть энергии, которая идёт на увеличение внутренней энергии, является «потерянной» для

механической системы и передаётся в подсистему трения, изменяя поведение её компонентов на глубине  $l$  (рис. 2.12,б), на которой влияние температуры  $\Theta$  на физико-механические свойства материалов трущихся тел ощутимо.

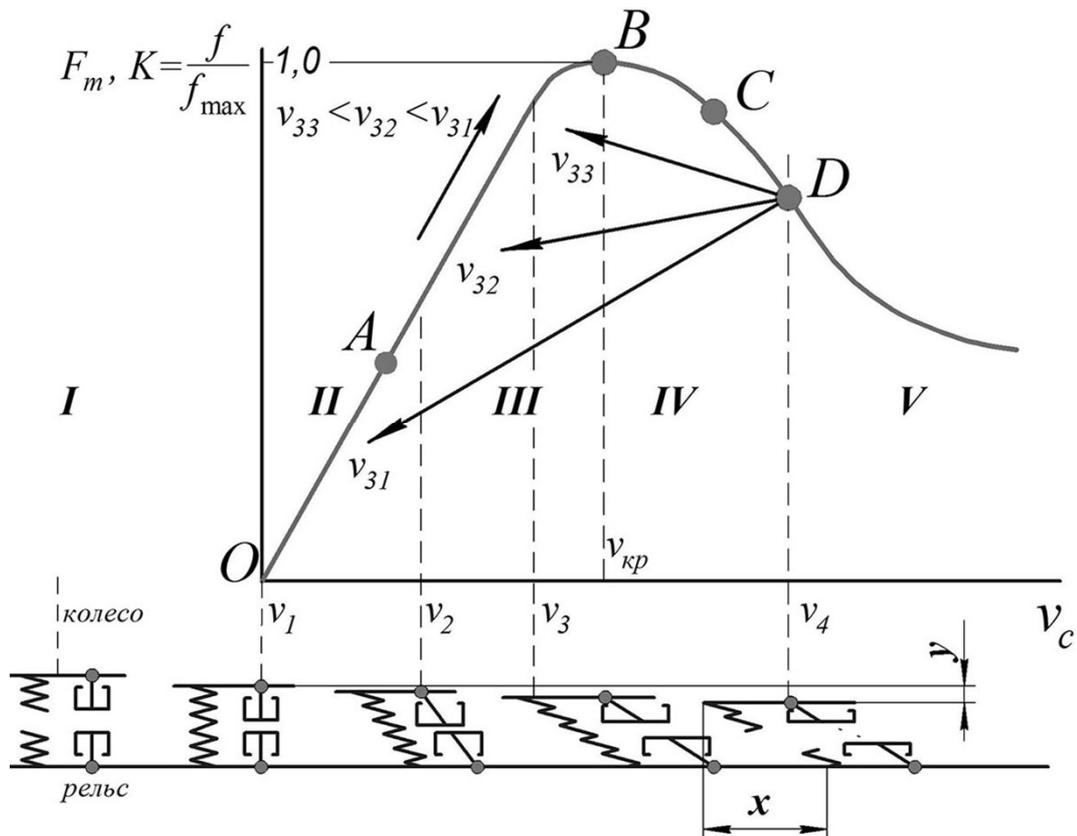


Рис. 2.16 – Схема формирования фрикционных связей при возрастании относительного проскальзывания  $v_c$  колеса относительно рельса:  $K$  – относительная величина коэффициента трения;  $y$  – сближение поверхностей в нормальном направлении фрикционного взаимодействия;  $x$  – тангенциальное смещение в горизонтальном направлении; состояния:  $I$  – покоя,  $II$  – начального момента движения;  $III$  – эксплуатационных режимов движения;  $IV$  – развития пластических деформаций;  $V$  – аномальных режимов движения (например, боксования, юза, потери управления транспортным средством)

Количество теплоты, выделяющейся в зоне трения тел при вращательном и поступательном смещении, определяется мощностью теплового источника

$$N_{\text{вр}} = f \cdot N \cdot r \cdot \omega; \quad N_{\text{пост}} = f \cdot N \cdot v_c, \text{ Вт} \quad (2.82)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения;

$N$  – нормальная нагрузка, Н;

$r$  – радиус приложения нагрузки, м;

$\omega$  – угловая скорость,  $\text{с}^{-1}$ ;

$v_c$  – скорость относительного скольжения твёрдых тел, м/с.

Температура нагревания трущихся тел зависит от теплофизических свойств материалов, состава поверхностного загрязнения, наличия или отсутствия в контактной области смазочных материалов, от конструкции и режимов нагружения трущейся пары. В реальных условиях работы узлов трения их температура на контурной площади касания может меняться от нескольких десятков до нескольких сотен градусов по Цельсию.

В соответствии с работами А.В. Чичинадзе по термодинамике по решению задачи теплопроводности для бесконечной пластины простейшей формы и отсутствию в системе внутренних источников теплоты при нестационарном режиме трения. *Задача теплопроводности при трении* может быть сформулирована следующим образом: найти распределение температур в элементах пары трения (образца 1 и контробразца 2), когда на их контакте действует переменный по времени и координате источник теплоты, а со свободных поверхностей происходит теплоотдача в окружающую среду. Математически она может быть записана для изотропных тел как

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t_T} = a_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z_1^2}, \quad (2.83)$$

где  $\Theta_1, \Theta_2$  – температуры контактирующих тел, К;

$t_T$  – продолжительность трения, с;

$z_2$  – координата по нормали к поверхности трения контробразца, м;

$a_1$  – коэффициент температуропроводности образца, м<sup>2</sup>/с (2.84).

Для многослойных структурных элементов или элементов с покрытиями приведённый коэффициент температуропроводности

$$a_{np} = \frac{\lambda_{np}}{c_{np} \rho_{np}}, \quad (2.84)$$

где  $\lambda_{np}$  – приведённый коэффициент теплопроводности, Вт/м·К (2.85);

$c_{np}$  – приведённая теплоёмкость, Дж/кг·К (2.86);

$\rho_{np}$  – приведённая плотность, кг/м<sup>3</sup> (2.87).

Приведённый коэффициент теплопроводности  $\lambda_{np}$  – это количество теплоты, прошедшей через единицу площади многослойного элемента пары трения в единицу времени при единичном градиенте температуры

$$\lambda_{np} = \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_k}{\lambda_k} \right)^{-1}, \quad (2.85)$$

где  $k$  – количество слоёв элемента пары трения;

$\lambda_k$  – коэффициент теплопроводности  $k$ -го слоя, Вт/м·К;

$\delta_k$  – толщина  $k$ -го слоя элемента пары трения

$$\delta_k = \frac{b A_k}{b_3 A_a},$$

где  $b$  – фактическая толщина  $i$ -го элемента пары трения, м (2.88);

$b_3$  – эффективная толщина  $i$ -го элемента, м (2.89);  
 $A_k$  – контактная площадь  $i$ -го элемента, м<sup>2</sup> (2.92);  
 $A_a$  – номинальная площадь поверхности трения, м<sup>2</sup> (2.79).  
*Приведённая теплоёмкость  $k$ -го слоя, Дж/кг·К*

$$c_{np} = \frac{\sum m_{3i} c_i}{\sum m_{3i}}, \quad (2.86)$$

где  $m_3$  – масса эффективного теплопоглощающего объёма, кг (2.93);  
 $c$  – удельная теплоёмкость материала  $k$ -го слоя, Дж/кг·К.

*Приведённая плотность  $k$ -го слоя, кг/м<sup>3</sup>*

$$\rho_{np} = \frac{\sum m_3}{\sum V_3}, \quad (2.87)$$

где  $\sum V_3$  – эффективный объём теплопоглощающего элемента, м<sup>3</sup>.

Толщину элемента пары трения можно определить как

$$b = \begin{cases} b_3 & \text{при } b_3 \leq b_{1,2} \\ b_{1,2} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.88)$$

где  $b_{1,2}$  – фактическая толщина элемента пары трения, м;

$b_3$  – эффективная глубина проникновения теплоты за время трения  $t_T$ , соответствующее расстоянию от поверхности трения по нормали, на котором повышение температуры составляет менее  $0,05\Theta^*$ , м

$$b_3 = \sqrt{at_T / Fo} = \sqrt{3at_T}; \quad (2.89)$$

$a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с (2.84);

$t_T$  – продолжительность трения, с;

$Fo$  – эффективное число Фурье,  $Fo = 0,333$ .

Для *быстропротекающих процессов трения* продолжительность трения  $t_T$  соответствует эффективной продолжительности распространения теплоты. Для контакта двух цилиндрических поверхностей и контакта цилиндрической поверхности с сегментом второй поверхности эффективная продолжительность процессов трения может быть определена как

$$t_T \leq \frac{(r_2 - r_1)^2}{64a} \text{ и } t_T \leq \frac{r_1^2 \varphi^2}{4a}, \text{ с;} \quad (2.90)$$

$r_1, r_2$  – радиусы кривизны поверхностей трения, м;

$\varphi$  – угол сегмента зоны трения, рад.

Число Фурье – один из критериев подобия нестационарных тепловых процессов, характеризующий соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемого тела

$$Fo = \begin{cases} 1/3 & \text{при } b_3 \leq b_{1,2} \\ \frac{a_{1,2} t_T}{b_{1,2}^2} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.91)$$

где  $a_{1,2}$  – коэффициенты температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$  (2.84);

$t_T$  – продолжительность трения, с;

$b_3$  – эффективная толщина элемента пары трения, м (2.89);

$b_{1,2}$  – фактическая толщина элементов пары трения, м.

Критерий Фурье является критерием гомохронности тепловых процессов и назван именем французского физика и математика Жана Фурье.

Если фактическая толщина элемента пары трения  $b_i \geq \sqrt{3a_i t_T}$ , то за период трения  $t_T$  глубинные слои фрикционного контакта не оказывают существенного влияния на значения поверхностных температур  $\Theta_i^*$ , и в теплопередаче будет эффективно действовать только тонкий поверхностный слой поверхности трения.

Если же число Фурье  $Fo_i \geq 0,333$ , то всё сечение толщины элемента пары трения  $b_i$  эффективно участвует в теплопоглощении.

Контактная площадь  $i$ -го тела  $A_{ki}$  – площадь, по которой осуществляется трение. Например, на рис. 2.17 контактная площадь для элементов пары трения соответственно равна

$$A_{k1} = \pi(R^2 - r^2); \quad A_{k2} = \pi(R^2 + r^2)\phi. \quad (2.92)$$

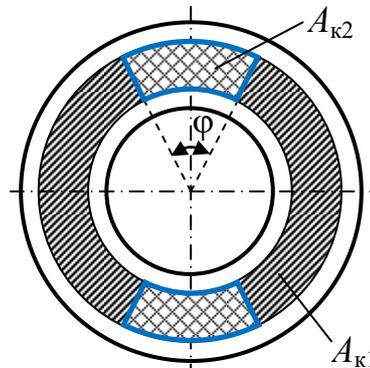


Рис. 2.17 – Схема для уточнения контактной площади  $i$ -го тела

Масса эффективного теплопоглощающего объёма, кг

$$m_3 = A_k b \rho, \quad (2.93)$$

где  $A_k$  – контактная площадь тела,  $\text{м}^2$  (2.92);

$b$  – толщина пары трения, м (2.88);

$\rho$  – плотность материала,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Установим условия решения задачи теплопроводности (2.83).

1) Суммарный тепловой поток от трения на контакте при сближении по нормали к поверхности трения  $z = 0$  равен сумме поверхностной плотности тепловых потоков  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , идущих в тело образца и контробразца

$$\lambda_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z_2} = \lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z_2} = \varphi(x, y, 0, t),$$

где  $\varphi$  – поверхностная плотность теплового потока от более нагретого к менее нагретому телу, Вт/м<sup>2</sup>

$$\varphi(x, y, 0, t) = \frac{\Phi}{A} = \frac{Q}{t_T A_K} = -\lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z_2} = -(1 - \alpha_{\text{тп}}) \frac{W_{\text{тп}} \tau_N}{A_K t_T};$$

$\Phi$  – тепловой поток, Вт;

$A_K$  – контактная площадь тела, м<sup>2</sup> (2.92);

$Q$  – количество теплоты, выделенной в области контакта поверхностей трения за продолжительность трения  $t_T$ , равна полной работе сил трения  $W_{\text{тп}}$ , Дж;

$t_T$  – продолжительность трения, с;

$\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности контробразца 2, Вт/м·К;

$\Theta_2$  – температура контробразца 2, К;

$z_2$  – координата по нормали к поверхности трения контробразца, м;

$\alpha_{\text{тп}}$  – коэффициент распределения тепловых потоков между элементами пары трения (2.98) – (2.103), зависящий от размеров тел, теплофизических свойств материалов и времени;

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_T$ , Дж (2.105);

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения (2.111).

2) Температура на фактических пятнах контакта обоих тел одинакова

$$\Theta_1(x, y, 0, t) = \Theta_2(x, y, 0, t); \quad (2.94)$$

3) На границе тела с окружающей средой происходит теплообмен, который можно вычислить по закону Ньютона

$$\lambda_{1,2} \frac{\partial \Theta_{1,2}}{\partial z} = \sigma_{1,2} (\Theta_{1,2} - \Theta_{\text{окр}}),$$

где  $\sigma_{1,2}$  – коэффициент теплоотдачи образца 1 и контробразца 2, Вт/м<sup>2</sup>·К;

$\Theta_{\text{окр}}$  – температура окружающей среды, К.

4) В начальный момент температура элементов пары трения и окружающей среды одинаковая

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_{\text{окр}} \quad \text{при } t = 0.$$

5) Так как тепловой поток при расчётах объёмной  $\Theta_V$  и поверхностной  $\Theta^*$  температур не превышает 5 % общего количества теплоты, выделяемой при трении, то на свободных концах поверхности трения теплоотдача во внешнюю среду в процессе трения отсутствует:

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial z_i} = 0 \quad \text{при } z_i = b_i,$$

где  $z_i$  – координата по нормали к поверхности трения образца ( $i = 1$ ), контробразца ( $i = 2$ ), м;

$b_i$  – толщина элемента пары трения, м (2.88).

В случае неизотропных тел, наличия теплового сопротивления на контакте (оксидных и смазочных плёнок, продуктов износа, различных загрязнений), сложных условий теплообмена на границе с окружающей средой задача теплопроводности усложняется.

При трении тепловые потоки находятся в следующем соотношении

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, \quad (2.95)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности, Вт/м·К;

$a_1, a_2$  – температуропроводности первого и второго тел, м<sup>2</sup>/с;

$Q_1$  и  $Q_2$  – количество тепла, поступающего в первое и второе тела

$$Q_1 = (1 - \alpha_{\text{тр}}) Q = (1 - \alpha_{\text{тр}}) W_{\text{тр}};$$

$$Q_2 = \alpha_{\text{тр}} Q = \alpha_{\text{тр}} W_{\text{тр}};$$

$\alpha_{\text{тр}}$  – часть теплового потока, идущего во второй элемент трения;

$1 - \alpha_{\text{тр}}$  – часть теплового потока, идущего в первый элемент трения.

Н. Блоком показано, что для схемы контактирования двух шероховатых поверхностей задача определения температур и коэффициентов распределения тепловых потоков сводится к двум случаям в зависимости от значения числа французского физика Ж.К. Пекле.

Число Пекле  $Pe$  – критерий подобия, характеризующий соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла

$$Pe_1 = \frac{v_c d_{r2}}{a_1} \quad \text{и} \quad Pe_2 = \frac{v_c d_{r1}}{a_2}, \quad (2.96)$$

где  $v_c$  – изменяемая в процессе трения скорость скольжения, м/с

$$v_c = \begin{cases} v_{c \max} \cdot (1 - \tau) & \text{при } f; Q_a = \text{const}; \\ v_{c \max} \cdot \sqrt{1 - \tau_W} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.97)$$

$v_{c \max}$  – начальная максимальная скорость скольжения при  $t_T = 0$ , м/с;

$\tau$  – безразмерный коэффициент времени трения ( $\tau = t/t_T$ );

$\tau_W$  – временной фактор работы трения (2.112);

$f; Q_a$  – постоянство величин коэффициента трения и давления;

$d_r$  – средний статический размер пятна касания, м (2.114) или (2.115);

$a$  – коэффициент температуропроводности материала, м<sup>2</sup>/с (2.84).

Н. Блоком показано, что для схемы контактирования двух шероховатых поверхностей трения в зависимости от чисел Пекле (2.96) задача определения температур  $\Theta$  и коэффициентов распределения тепловых потоков  $\alpha_{\text{тр}}$  по данным Г. А. Г. Фазекаса при постоянной скорости скольжения и времени существования температуры вспышки  $t_{\text{всп}} = l_{\text{тр}}/v_c$ , где  $l_{\text{тр}}$  – путь

трения  $l_{\text{тр}} = n \cdot d_{r2}$  единичного пятна фактического касания, а  $n$  – параметр, показывающий, сколько диаметров  $d_{r2}$  (2.114) составляет путь трения  $l_{\text{тр}}$ , сводится к следующим основным случаям.

Для малых скоростей скольжения, когда число Пекле  $Pe_1 \leq 8/25$  подъём температуры в центре движущегося пятна касания достигает 82 % установившейся температуры из неравенства

$$n \geq \frac{25}{16} Pe_2 = \frac{25}{16} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) Pe_1 \quad \text{или} \quad n \geq \frac{25}{16} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) Pe_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{a_2},$$

где  $a_{1,2}$  – коэффициенты температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$  (2.84).

Как показано Д.К. Иегером, в этом случае преобладает *молекулярная теплопроводность*, фактическое пятно касания можно рассматривать как неподвижный источник тепла с максимумом температуры в центре, а процессы трения – стационарными. Среднее значение *коэффициента распределения тепловых потоков*, характеризующего количество тепла, идущего в тело образца на номинальном контакте (2.92), по формуле Ф. Шаррона

$$\alpha_{\text{тп}} = \frac{\sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}}{\sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1} + \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\rho_1 c_1 \lambda_1}{\rho_2 c_2 \lambda_2}}}, \quad (2.98)$$

где  $\sqrt{\rho_i c_i \lambda_i}$  – коэффициент теплового насыщения;

$\rho_1, \rho_2$  – плотность материалов пары трения,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$c_1, c_2$  – удельная теплоёмкость поверхностей трения,  $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ;

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности,  $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ .

По Х. Хассельгруберу при коэффициенте взаимного перекрытия  $K_{\text{вз}} = 0,6 \dots 1$  и числах Пекле  $Pe \geq 0,4$  максимальная температура всегда на поверхности трения и коэффициент распределения тепловых потоков

$$\alpha_{\text{тп}} = \frac{1}{1 + \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}, \quad (2.99)$$

где  $b_1, b_2$  – размеры тел в направлении нормального теплового потока;

$a_1, a_2$  – коэффициенты температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

А.В. Чичинадзе преобразовал формулу Х. Хассельгрубера (2.99), введя в рассмотрение эффективный теплопоглощающий объём тел

$$\alpha_{\text{тп}} = \frac{1}{1 + \frac{V_{\text{э}1} c_1}{V_{\text{э}2} c_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}, \quad (2.100)$$

где  $V_{\text{э}1}, V_{\text{э}2}$  – эффективные теплопоглощающие объёмы тел,  $V_{\text{э}} = b_{\text{э}} \cdot A_{\text{к}}$ ;

$b_{\text{э}}$  – эффективная глубина проникновения,  $\text{м}$  (2.89);

$A_{\text{к}}$  – площадь контакта поверхности трения,  $\text{м}^2$  (2.92).

Если номинальные площади поверхностей трения значительно отличаются, то формулы (2.98) и (2.99) примут вид

$$\alpha_{\text{тр}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{\text{вз}}} \sqrt{\frac{\rho_1 c_1 \lambda_1}{\rho_2 c_2 \lambda_2}}}; \quad \alpha_{\text{тр}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{\text{вз}}} \cdot \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}, \quad (2.101)$$

где  $K_{\text{вз}}$  – коэффициент взаимного перекрытия,  $K_{\text{вз}} = A_{\text{к2}} \cdot A_{\text{к1}} / A_y^2 < 1$ ;  
 $A_{\text{к1}}, A_{\text{к2}}$  – контактная площадь образца и контробразца, м<sup>2</sup> (2.92);  
 $A_y$  – условная площадь трения, полученная вращением элементов пары трения вокруг центра вращения;

$b_1, b_2$  – размеры тел в направлении теплового потока (2.88).

Формулы (2.101) справедливы для случаев, когда эффективная глубина проникновения теплового потока  $b_{iэ}$  (2.89) за период трения (2.90) *больше*, чем реальная толщина тела  $b_i$ . В противном случае (при  $b_{эi} \leq b_i$  и  $Fo_i = 1/3$ , коэффициенте взаимного перекрытия  $K_{\text{вз}} = 0,2 \dots 1$  и числах Пекле  $Pe > 0,4$ ) выражение (2.101) примет вид

$$\alpha_{\text{тр}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{\text{вз}}} \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2}}.$$

При  $K_{\text{вз}} = 0,1 \dots 1$  и  $Pe \geq 0,4$  для нестационарного трения (типа торможения) А.В. Чичинадзе и А.Г. Гинзбург предложили формулу

$$\alpha_{\text{тр}} = \frac{1}{1 + \frac{\psi_{V_2} b_2 \lambda_1}{\psi_{V_1} b_1 \lambda_2} \left( \frac{Fo_2}{Fo_1} - \frac{Fo_1 - Fo_2}{3Fo_1^2 A} \times \left[ \frac{1}{3} \ln \left( \frac{\frac{1}{3} - A}{\frac{1}{3} + A} \right) \left( \frac{1 - Fo_1 + A}{\frac{1}{3} - Fo_1 - A} \right) - A \ln \frac{3}{2} Fo_1 \right] \right)}, \quad (2.102)$$

где  $A = \sqrt{\frac{1}{9} + Fo_1^2}$ ;

$\psi_V$  – коэффициент (2.117), учитывающий понижение температуры за счёт распространения тепла в стороны от дорожки трения.

Коэффициент распределения тепловых потоков (2.99) при  $\tau_N(0) \neq 0$  и коэффициенте взаимного перекрытия  $K_{\text{вз}} < 1$  на номинальном движущемся макроконтакте с учётом второго граничного условия (2.94)

$$\alpha_{\text{тр}} = \frac{1}{1 + \frac{\psi_{V_2} b_2 \lambda_1}{\psi_{V_1} b_1 \lambda_2} \left( \frac{\frac{1}{3} \tau_N + Fo_2 \tau_W - \tau_N}{\frac{1}{3} \tau_N + Fo_1 \tau_W - \tau_N} \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_2 \cdot \tau}}{n^2} \right)}, \quad (2.103)$$

где  $\psi_{V1,2}$  – коэффициенты объёма поверхностей трения (2.117);

$b_{1,2}$  – толщина элементов пары трения, м (2.88);

$\lambda_{1,2}$  – коэффициенты теплопроводности тел, Вт/м·К;

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения (2.111);

$\tau_W$  – временной фактор работы трения (2.112);

$Fo_{1,2}$  – число Фурье (2.91);

$\tau$  – безразмерный коэффициент времени трения ( $\tau = t/t_r$ ).

Из выражения (2.103) ясно, что  $\alpha_{\text{тп}}$  является функцией времени, а коэффициент взаимного перекрытия  $K_{\text{вз}}$  должен учитываться в формуле (2.120) так, как это будет показано далее.

При высоких скоростях относительного скольжения, когда число Пекле  $Pe_1 \geq 20$ , генерируемое тепло трения распределяется между телами иначе. Для больших скоростей скольжения 82 % максимума температуры достигается тогда, когда  $Pe_1 \geq 8 \cdot n/5$ , что даёт

$$n \geq \frac{5}{8} Pe_2 = \frac{5}{8} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) Pe_1 \quad \text{или} \quad n \geq \frac{5}{8} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) Pe_1 = \frac{25}{2} \cdot \frac{a_1}{a_2}.$$

В таких условиях максимум температуры преобладает на задней грани пятна фактического контакта, наблюдается конвективный перенос теплоты и нестационарные условия процессов трения. Для движущегося пятна контакта наиболее целесообразно определять  $\alpha_{\text{тп}}$  по формулам Д.К. Иегера и Н. Блока, учитывающих скорость возникновения и распространения тепла трения, средних ( $a$ ) и максимальных ( $b$ ) температур

$$\alpha_{\text{тп}} = 1 - \frac{\lambda_1 \sqrt{0,5v_c d_{r2}}}{1,125\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{0,5v_c d_{r2}}} \quad (a); \quad \alpha_{\text{тп}} = \frac{4\lambda_2}{4\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{\pi \cdot Pe_1}} \quad (b), \quad (2.104)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности, Вт/м·К;

$Pe_1$  – число Пекле (2.96);

$v_c$  – изменяемая в процессе трения скорость скольжения, м/с (2.97);

$d_{r2}$  – средний статический размер пятна касания, м (2.114) или (2.115).

В перечисленных выше случаях максимальная температура возникает всегда на поверхности трения, то есть при  $z_2 = 0$ .

При взаимном перемещении поверхностей трения возникает трение. В результате совершённой работы против сил трения происходит увеличение внутренней энергии  $E_{\text{вн}}$  эффективных теплопоглощающих объёмов  $V$ , тел, о чём свидетельствует повышение их температуры на величину  $\Delta\Theta$ . Тогда согласно первому закону термодинамики полная работа сил трения расходуется на образование новой свободной поверхности трущихся тел  $W_{\text{св}}$  и на изменение внутренней энергии  $E_{\text{вн}}$  трущейся системы, Дж

$$W_{\text{тп}} = W_{\text{св}} + E_{\text{вн}} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha) + c \cdot m_3 \cdot \Delta\Theta, \quad (2.105)$$

где  $s$  – путь трения скольжения тела под действием силы  $F$ ;

$\alpha$  – угол между направлением вектора силы  $F$  и перемещения  $s$ ;

$c$  – удельная теплоёмкость тела, Дж/кг·К;

$m_3$  – масса эффективного теплопоглощающего объёма (2.93), кг;  
 $\Delta\Theta$  – разность температур, К.

Вначале получим общепринятое выражение для работы. Запишем второй закон Ньютона в виде  $F = ma$ . Умножим обе части равенства на пройденный путь:  $F \cdot s = ma \cdot s$ . Поскольку при равноускоренном движении величина ускорения тела  $a = (v_1^2 - v_0^2) / 2s$ , то работа – это разность кинетических энергий тела в начальной и конечной точке, то есть  $\underline{W_{св.} = mv^2 / 2}$ .

Согласно (2.105) работа силы равна нулю, если сила перпендикулярна перемещению. Однако в действительности это не так. Например, при трении покоя приложенная к телу сила совершает работу. Как же в этом случае вычислить работу? Получается следующая ситуация: приложенная к телу внешняя сила стремится переместить тело на расстояние  $s$ , для чего к телу сообщается импульс силы  $I = Ft_T$  в течении времени трения  $t_T$ . Запишем второй закон Ньютона в дифференциальной форме

$$Fdt_T = d(mv), \quad (2.106)$$

где  $Fdt_T$  – элементарный импульс силы,  $Fdt_T = dI$ ;

$d(mv)$  – элементарный импульс тела (количество движения),  $d(mv) = dp$ .

Если правая часть уравнения (2.106) равна нулю, то тело остаётся неподвижным (скорость  $v = 0$ ) или движется равномерно с постоянной скоростью  $v$ , когда сила тяги  $F_T$  уравнивает силу трения  $F_{тр} = f \cdot mg$ , в то время как левая часть не равна нулю.

После интегрирования уравнения (2.106) получим  $Ft_T = mv$ , то есть импульс силы равен количеству движения, полученному телом. Возведём к квадрат и разделим на  $2m$  обе части полученного равенства. Получим

$$\frac{F^2 t_T^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad W = T, \quad W = \frac{F^2 t_T^2}{2m} = \frac{I^2}{2m}, \quad (2.107)$$

где  $T$  – кинетическая энергия тела;

$I$  – импульс силы,  $I = Ft_T$ .

Выражение (2.107) не связано с путём  $s$ , пройденным телом за время  $t_T$ , поэтому оно может быть использовано для вычисления работы, совершаемой импульсом силы и в том случае, если тело остаётся неподвижным.

Если же сила  $F$  действует под углом  $\alpha$ , то её раскладываем на силу тяги  $F_T = ma$  и силу левитации  $F_L$ , которая стремится уменьшить силу тяжести  $N = mg$ . Используя теорему Пифагора  $F^2 = F_T^2 + F_L^2$ , найдём работу

$$W = W_T + W_L \quad \text{или} \quad \frac{F^2 t_T^2}{2m} = \frac{F_T^2 t_T^2}{2m} + \frac{F_L^2 t_T^2}{2m}. \quad (2.108)$$

Поскольку при равноускоренном движении путь трения скольжения  $s = at_T^2 / 2$ , то равенство (2.108) можно переписать в следующем виде

$$W = ms + \frac{1}{2} mg^2 t_T^2 = F_T s \cos(\alpha) + \frac{1}{2} mg^2 t_T^2.$$

А теперь рассмотрим работу сил трения. Если сила трения является единственной силой, действующей по траектории движения, то работа силы трения будет равна разности кинетических энергий:

$$W_{\text{тр}} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F_{\text{тр}}s = F_{\text{тр}} \frac{|F_{\text{тр}}|t_{\text{т}}^2}{2m} = \frac{1}{2} f^2 mg^2 t_{\text{т}}^2, \quad (2.109)$$

где  $f$  – коэффициент трения по Кулону-Амонтону.

Если же тело движется по шероховатой горизонтальной поверхности с некоторой постоянной скоростью  $v$ , то работу силы трения нельзя вычислять по общепринятой формуле (2.109), поскольку в данном случае постоянную скорость движения  $v = s / t$  обеспечивает сила тяги  $F_{\text{т}} = -F_{\text{тр}}$ . В этом случае пройденный путь  $s$  связан с действием силы тяги  $F_{\text{т}}$  и формулу (2.109) можно представить в виде

$$W_{\text{тр}} = \frac{W_0^2}{4T} = \frac{F_{\text{тр}}^2 s^2}{2mv^2} = \frac{f^2 m^2 g^2 s^2}{2mv^2} = \frac{f^2 mg^2 s^2}{2v^2}, \quad (2.110)$$

где  $s$  – путь трения скольжения тела под действием силы  $F$ ;

$v$  – постоянная скорость движения массы  $m$ ;

$W_0$  – «обычная» работа сил трения,  $W_0 = f \cdot N \cdot s = f \cdot mg \cdot s$ ;

$T$  – кинетическая энергия массы,  $T = mv^2 / 2$ .

Зависимость работы сил трения  $W_{\text{тр}}$  от кинетической энергии  $T$  представлено на рис. 2.18,а, выраженная в долях «обычной» работы сил трения  $W_0$ . Сумма кинетической энергии  $T$  и работы сил трения  $W_{\text{тр}}$  имеет минимум, равный  $W_0$  при  $T = W_0 / 2$ , что показано на рис. 2.18,б.

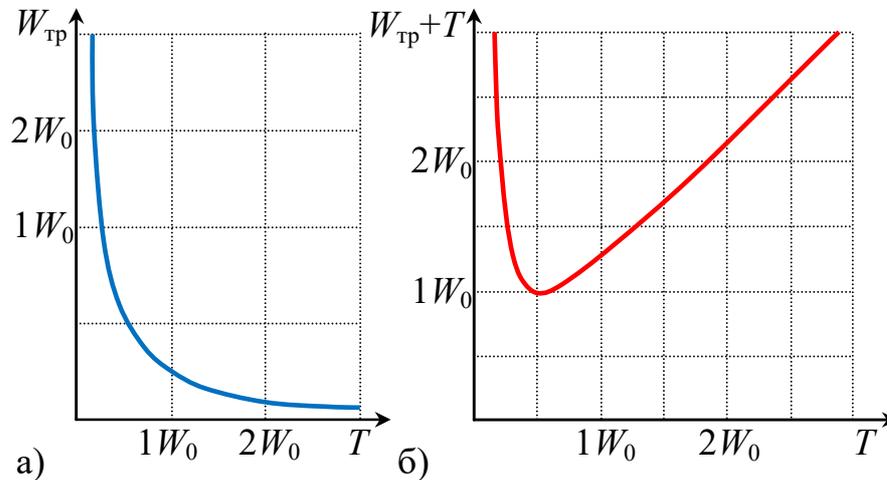


Рис. 2.18 – Зависимости  $W_{\text{тр}}$  от  $T$ , выраженная в долях  $W_0$

При равномерном скольжении тела вниз по шероховатой наклонной плоскости под углом  $\alpha$  выражение для работы сил трения (2.110) будет определяться не величиной пути трения  $s$ , а временем скольжения  $t_{\text{т}}$ :

$$W_{\text{тр}} = \frac{1}{2} f^2 mg^2 t_{\text{т}}^2 \cos^2(\alpha) = \frac{mg^2 h^2}{2v^2} = \frac{m^2 g^2 h^2}{4T} = \frac{P^2 h^2}{4T},$$

где  $f$  – коэффициент трения,  $f = \text{tg}(\alpha)$ ;

$s$  – путь трения скольжения,  $s = vt$ ;

$h$  – высота подъёма тела весом  $P$ ,  $h = s \cdot \sin(\alpha)$ .

При ускоренном движении при наличии сил трения следует отличать два случая производства работы: в первом сущность работы заключается в преодолении внешнего сопротивления движению, которое совершается без увеличения скорости движения тела; во втором – работа обнаруживается увеличением скорости движения, к которому внешний мир относится индифферентно. В реальности мы имеем соединение обоих случаев: сила  $F$  преодолевает сопротивление и меняет скорость движения тела.

**Пример 1.** На тело массы  $m$  действует горизонтальная сила тяги  $F_T$ , которая больше силы трения  $F_{тр} = f \cdot mg$ . Тогда работа силы тяги

$$W = W_a + W_{тр} \quad \text{или} \quad F_T s = F_a s + F_{тр} s,$$

где  $F_a$  – сила, вызывающая ускоренное движение тела в соответствии со вторым законом Ньютона,  $F_a = ma = F_T - F_{тр}$ .

Запишем сумму импульсов сил  $I_T = I_a + I_{тр}$  или  $F_T t_T = F_a t_T + F_{тр} t_T$ . Возведя в квадрат сумму импульсов, получим

$$F_T^2 t_T^2 = F_a^2 t_T^2 + 2F_a F_{тр} t_T^2 + F_{тр}^2 t_T^2.$$

Разделив все члены на  $2m$ , получим значение работы

$$W = W_a + W_{ут} + W_{тр} = \frac{F_a^2 t_T^2}{2m} + \frac{F_a F_{тр} t_T^2}{m} + \frac{F_{тр}^2 s^2}{2mv^2},$$

где  $W_a$  – работа, затрачиваемая на ускоренное движение тела в соответствии со вторым законом Ньютона (2.107);

$W_{ут}$  – работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при ускоренном движении;

$W_{тр}$  – работа, затрачиваемая на преодоление силы трения при равномерном движении (2.110).

**Пример 2.** Рассмотрим более общий случай движения тела с трением, когда на тело действует сила  $F$ , направленная под углом  $\alpha$  к горизонту.

Из условия равновесия запишем уравнение баланса импульсов сил

$$F^2 t_T^2 = F_T^2 t_T^2 + F_{л}^2 t_T^2 = (F_a + F_{тр})^2 t_T^2 + F_{л}^2 t_T^2,$$

где  $F_T$  – сила тяги,  $F_T = F \cdot \cos(\alpha)$ ;

$F_a$  – сила, вызывающая ускоренное движение тела в соответствии со вторым законом Ньютона,  $F_a = ma$ ;

$F_{тр}$  – сила трения,  $F_{тр} = f \cdot (N - F_{л}) = f \cdot (mg - F_{л})$ ;

$F_{л}$  – сила левитации, уменьшающая силу тяжести  $N = mg$ ,  $F_{л} = F \cdot \sin(\alpha)$ ;

$t_T$  – продолжительность трения,  $s$ .

Разделив последнее соотношение на  $2m$ , получим:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{[F_a + (fmg - fF_{\text{т}})]^2 t^2}{2m} + \frac{F_{\text{т}}^2 t^2}{2m} = \\
&= \frac{F_a^2 t^2}{2m} + \frac{2fmg \cdot F_a t^2}{2m} - \frac{2fF_{\text{т}} F_a t^2}{2m} + \frac{f^2 m^2 g^2 t^2}{2m} - \frac{2f^2 mg F_{\text{т}} t^2}{2m} + \frac{(f^2 + 1) F_{\text{т}}^2 t^2}{2m} = \\
&= \left[ \frac{F_a^2}{2m} + fg \cdot F_a - \frac{fF_{\text{т}} F_a}{m} + \frac{1}{2} f^2 mg^2 - f^2 g F_{\text{т}} + \frac{(f^2 + 1) F_{\text{т}}^2}{2m} \right] t^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, под каким бы углом не действовала сила  $F$  на тело массы  $m$ , при наличии трения или без него, за время трения  $t_{\text{т}}$  будет совершена одна и та же работа, даже если тело неподвижно:

$$W = \frac{F^2 t_{\text{т}}^2}{2m}.$$

Временной *фактор мощности трения* вычислим в соответствии с функцией А.Г. Гинзбурга (рис. 2.19) в интервале  $0 \leq \tau \leq 1$

$$\tau_N = \frac{N_{\text{т}} t_{\text{т}}}{W_{\text{тп}}}; \quad \tau_N(n, \tau) = \begin{cases} (n+1)(n+2)\tau^n(1-\tau); \\ (n+1)(n+2)\tau(1-\tau)^n, \end{cases} \quad (2.111)$$

где  $N_{\text{т}}$  – переменная мощности трения (2.82), Вт;

$t_{\text{т}}$  – продолжительность трения, с;

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_{\text{т}}$ , Дж (2.105);

$\tau$  – безразмерный коэффициент времени трения ( $\tau = t/t_{\text{т}}$ );

$n$  – любое рациональное *положительное число*, определяемое из выражений для момента времени  $\tau$  в относительных единицах, когда  $\tau_N$  достигает максимального значения  $\tau_{N_{\text{max}}} = n / (n+1)$  для верхнего равенства (2.111),  $\tau_{N_{\text{max}}} = 1 / (n+1)$  – для нижнего.

Временной *фактор работы трения*, для различных законов изменения работы трения в интервале времени  $0 \leq \tau \leq 1$  рекомендуется использовать функции А.Г. Гинзбурга вида (рис. 2.20)

$$\tau_W = \frac{W_{\text{т}}}{W_{\text{тп}}} = \int_0^{\tau} \tau_N d\tau; \quad \tau_W(n, \tau) \approx \begin{cases} \tau^{n+1} [(n+1)(1-\tau) + 1]; \\ 1 - (1-\tau)^{n+1} [1 + (n+1)\tau], \end{cases} \quad (2.112)$$

где  $W_{\text{т}}$  – переменная работы трения, Дж;

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_{\text{т}}$ , Дж (2.105);

$n$  – любое рациональное положительное число, (2.111);

$\tau$  – безразмерный коэффициент времени трения ( $\tau = t/t_{\text{т}}$ ).

Для кратковременных процессов трения при  $\tau = 0$  и  $\tau = 1$  должны выполняться условия равенства временных факторов мощности (2.111) и работы (2.112) трения:  $\tau_N(0) = 0$ ,  $\tau_W(0) = 0$  и  $\tau_N(1) = 0$ ,  $\tau_W(1) = 1$  соответственно.

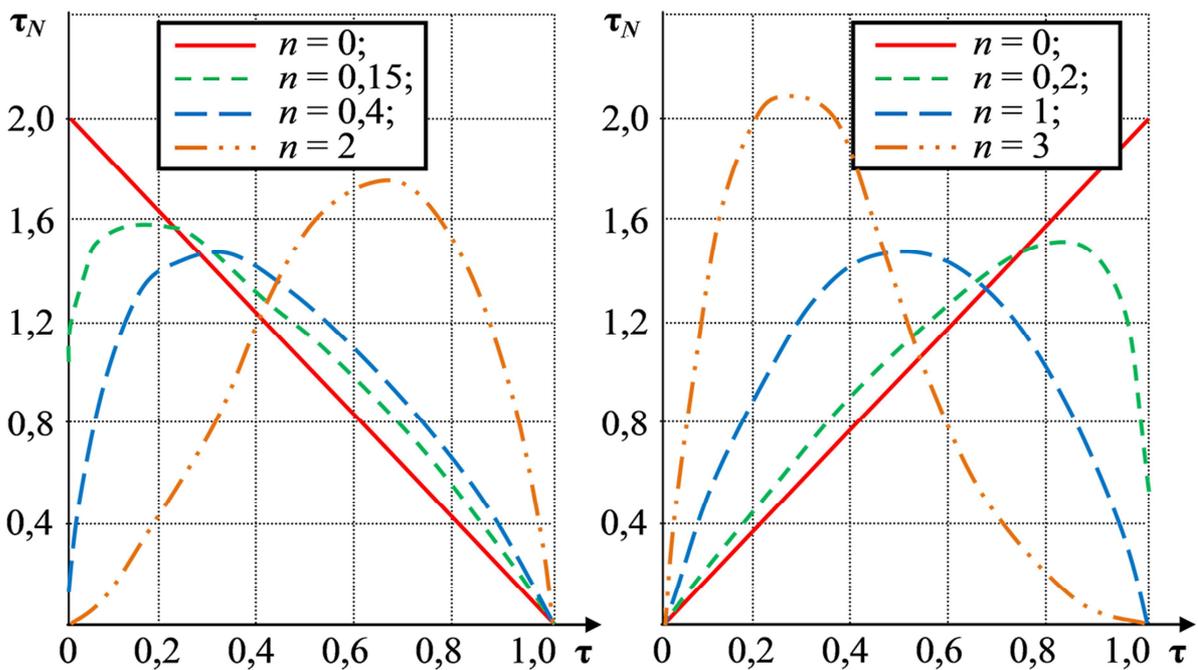


Рис. 2.19 – Характер изменения функции временного фактора мощности трения (2.111) при:  $a - \tau_{Nmax} = n / (n+1)$ ;  $b - \tau_{Nmax} = 1 / (n+1)$

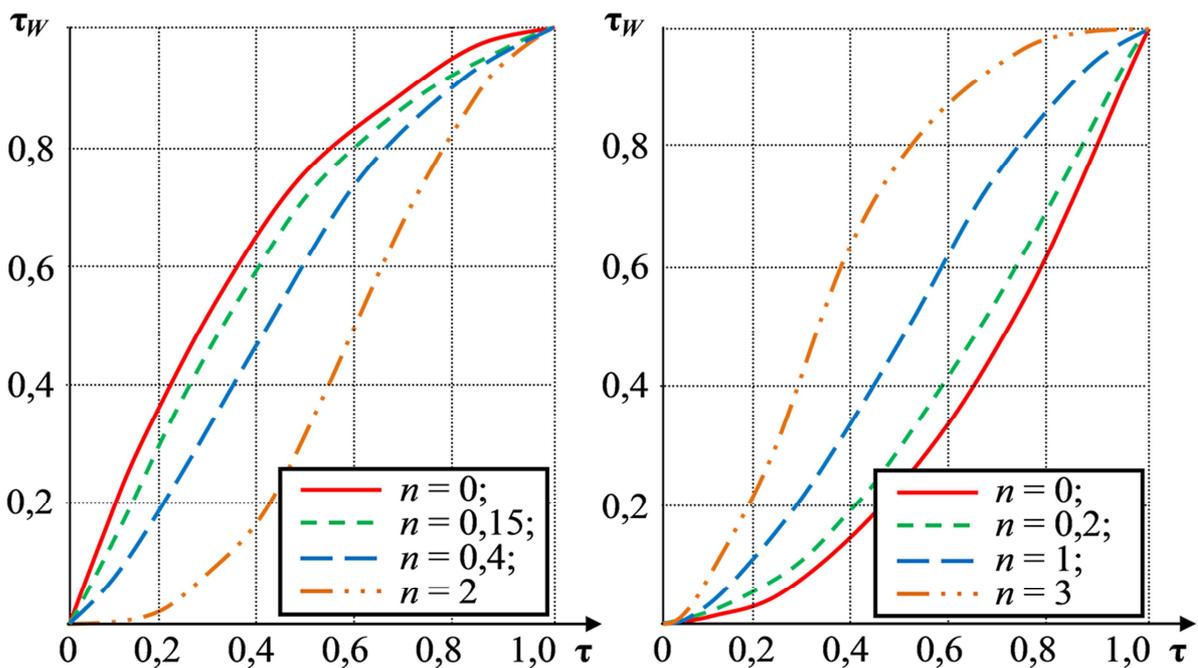


Рис. 2.20 – Характер изменения функции временного фактора работы трения (2.112) при:  $a - \tau_{Nmax} = n / (n+1)$ ;  $b - \tau_{Nmax} = 1 / (n+1)$

Как было указано выше, коэффициент трения фрикционных пар трения зависит определяющих факторов: режима работы, физико-механических характеристик материалов поверхностей трения; конструкции элементов пары трения. Влияние этих факторов на коэффициент трения и износ осуществляется главным образом через температурный режим трения. Опыт применения фрикционных материалов, отличающихся высокой фрикционной теплостойкостью, показывает, что для различных мате-

риалов коэффициент трения зависит от температуры поверхностей трения так, как показано это на рис. 2.21.

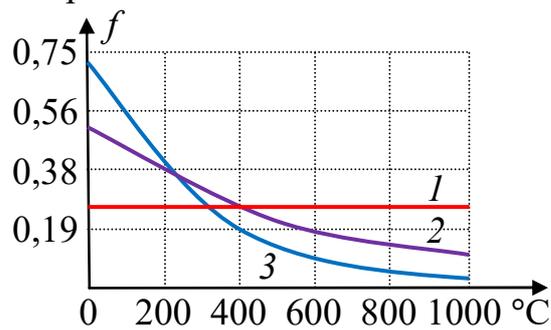


Рис. 2.21 – Характеристики фрикционной теплостойкости современных материалов для тяжело нагруженных узлов трения

Например, фрикционный металлополимерный материал обеспечивает постоянство коэффициента трения  $f$  (1 на рис. 2.21); для фрикционных теплостойких пластмасс, таких как ретинакс, характерно небольшое снижение коэффициента трения  $f \approx 0,45 - 2 \cdot 10^{-4} \Theta^*$  (2 на рис. 2.21), а для фрикционных металлокерамических материалов, таких как ФМК-11, характерна близкая к показательной функции зависимость коэффициента трения  $f \approx 0,7e^{-0,0015 \cdot \Theta}$  (кривая 3 на рис. 2.21).

В зависимости от исходных кривых фрикционной теплостойкости материалов поверхностей трения (рис. 2.21), режима работы по применяемой удельной нагрузке  $Q_a = N / A_a$  (постоянного или переменного), полной мощности  $P$  (2.111) и работы  $A$  (2.112) трения, скорости скольжения, как функции относительной функции времени трения,  $v_c(\tau) = v_{c0} \cdot (1 - \tau)$  за время трения  $t_T$  возможны функции мощности, работы и силы трения, представленные в табл. 2.7.

Табл. 2.7 – Результаты экспериментального определения мощности, работы и силы трения в зависимости от коэффициента времени трения ( $\tau = t/t_T$ )

Характеристика процессов трения	Экспериментальная зависимость трения для		
	мощности, $N_T = \frac{W_{\text{тп}}}{t_T} \tau_N$	работы, $W_T = W_{\text{тп}} \tau_W$	силы, $F_T$
1	2	3	4
1) трение с постоянной мощностью и соответствует тяговым характеристикам автоматического режима <sup>8</sup>	$\tau_N(\tau) = 1$	$\tau_W(\tau) = \tau$	$\frac{W_{\text{тп}}}{t_T v_{\text{max}}} \frac{t_T}{t_T - t}$

<sup>8</sup> Характеристика фрикционной теплостойкости имеет вид кривой 3 (рис. 2.21), то есть при резкой подаче давления и его постоянстве во времени сила (момент) трения возрастает и имеет свой максимум при  $\tau = 1$ .

1	2	3	4
2) в начале трения развивается максимальная мощность трения, линейно уменьшающаяся к нулю при $t = t_T$ <sup>9*</sup>	$\tau_N(\tau) = 2(1 - \tau)$	$\tau_W(\tau) = \tau(2 - \tau)$	$\frac{2W_{\text{ТП}}}{t_T v_{\text{max}}}$
3) мощность трения увеличивается линейно во времени от нулевого значения при $t = 0$ до максимального в конце трения, при $\tau = 1$ <sup>10</sup>	$\tau_N(\tau) = 2\tau$	$\tau_W(\tau) = \tau^2$	$\frac{2W_{\text{ТП}}}{t_T v_{\text{max}}} \frac{t}{t_T - t}$
4) мощность трения изменяется по параболическому закону от максимальной в начале до нуля в конце трения <sup>11*</sup>	$\tau_N(\tau) = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \tau}$	$\tau_W(\tau) = 1 - \sqrt{(1 - \tau)^3}$	$\frac{3W_{\text{ТП}}}{2t_T v_{\text{max}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \tau}}$
5) мощность трения изменяется по параболическому закону от нуля в начале процесса трения до максимума в конце <sup>12</sup>	$\tau_N(\tau) = \frac{3}{2}\sqrt{\tau}$	$\tau_W(\tau) = \sqrt{\tau^3}$	$\frac{3W_{\text{ТП}}}{2t_T v_{\text{max}}} \frac{t_T \sqrt{\tau}}{t_T - t}$

<sup>9</sup> Фрикционная теплостойкость материалов трения соответствует кривой 1 на рис. 2.21, обеспечивающей постоянство силы трения, для характеристики 2 на рис. 2.21 требуется небольшая корректировка давления  $Q_a$  в конце трения.

<sup>10</sup> При максимальной скорости скольжения  $v_{c,\text{max}}$  сила трения отсутствует ( $F_T = 0$ ), при  $v_c \rightarrow 0$  неограниченно растёт и при  $v_c = 0$  имеет разрыв ( $F_T = \infty$ ); практически равна касательной силе, необходимой для разрыва элементов пары трения, когда имеет место явление схватывания поверхностей трения, нарушение нормальной работы пары трения.

<sup>11</sup> Для пар трения с фрикционной теплостойкостью 1 и 2 (рис. 2.21) необходимо регулировать давление  $Q_a$  на поверхности трения, повышая его к концу трения, чтобы при  $\tau = 1$  получить силу трения  $F_{T,\text{max}}$ . Пары трения с ярко выраженной падающей характеристикой 3 характеризуются силой трения, имеющей плавный рост в начале и середине процесса трения, и только перед остановкой намечается её пикообразность.

<sup>12</sup> Рост функции происходит с меньшей интенсивностью, чем в п. 3, но получение такой кривой силы (момента) трения до полной остановки затруднительно, так как необходимо осуществлять регулирование давления  $Q_a$  в процессе трения на поверхности трения по сложному закону. Целесообразно использовать материалы с резко выраженной падающей характеристикой фрикционной теплостойкости (кривая 3 на рис. 2.21).

1	2	3	4
6) мощность трения изменяется по параболическому закону от максимального значения в начале до нуля в конце трения <sup>13</sup>	$\tau_N(\tau) = 3(1 - \tau)^2$		$\frac{3W_{\text{тп}}}{t_T v_{\text{max}}}(1 - \tau)$
		$\tau_W(\tau) = 3\tau \left(1 - \tau + \frac{\tau^2}{3}\right)$	
7) мощность изменяется по параболическому закону от нуля в начале до максимума в конце трения <sup>14</sup>	$\tau_N(\tau) = 3\tau^2$	$\tau_W(\tau) = \tau^3$	$\frac{3W_{\text{тп}}}{t_T v_{\text{max}}} \frac{t_T}{t_T - t} \tau^2$
8) мощность изменяется по параболическому закону от нуля при $\tau = 0$ до нуля при $\tau = 1$ , имея максимум в середине процесса трения <sup>15*</sup>	$\tau_N(\tau) = 6\tau(1 - \tau)$		$\frac{6W_{\text{тп}}}{t_T v_{\text{max}}} \frac{t}{t_T}$
		$\tau_W(\tau) = \tau^2(3 - 2\tau)$	
9) мощность изменяется по параболическому закону, имея максимум при $\tau = 0,25$ и нулевое – при $\tau = 1$ <sup>16</sup>	$\tau_N(\tau) = \frac{6}{5}(1 - \tau) \times (1 + 2\tau)$		$\frac{6W_{\text{тп}}}{5t_T v_{\text{max}}}(1 + 2\tau)$
		$\tau_W(\tau) = \frac{5}{6}\tau \left(1 + \frac{\tau}{2} - \frac{2\tau^2}{3}\right)$	
10) мощность изменяется по параболическому закону, имея максимум при $\tau = 0,75$ и нулевое – при $\tau = 0$ <sup>17</sup>	$\tau_N(\tau) = \frac{18}{5}\tau \left(1 - \frac{2\tau}{3}\right)$		$\frac{6W_{\text{тп}}}{5t_T v_{\text{max}}}\tau \left(2 + \frac{t_T}{t_T - t}\right)$
		$\tau_W(\tau) = \frac{18}{5}\tau^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2\tau}{9}\right)$	

<sup>13</sup> Рекомендуется использовать пары трения с характеристиками фрикционной теплостойкости, аналогичные кривым 1 и 2 на рис. 2.21. Такая зависимость силы трения будет осуществляться с применением регулирования давления  $Q_a$  на поверхности трения и при его резкой подаче в начале трения.

<sup>14</sup> Осуществление силы трения весьма затруднительно, так как требует регулирования давления  $Q_a$  на поверхности трения по сложному закону, причём в конце трения давление неограниченно должно возрастать. Целесообразно использовать пары трения с резко выраженной падающей характеристикой фрикционной теплостойкости (кривая 3 на рис. 2.21), обеспечивающей при  $Q_a = \text{const}$  ярко выраженную пикообразность к концу процесса трения.

<sup>15</sup> Может быть получена для пар трения, кривые фрикционной теплостойкости которых показаны на рис. 2.21, однако предпочтение надо отдать имеющим вид кривых 1 и 2. Эти пары трения могут при постепенно повышающемся давлении  $Q_a$  на поверхности трения обеспечить линейную возрастающую характеристику силы (момента) трения без выраженного пикообразования в конце трения.

<sup>16</sup> Режим трения весьма рационален и легко может быть осуществлён при применении пар трения, имеющих характеристики фрикционной теплостойкости, аналогичные кривым 1 и 2 на рис. 2.21.

<sup>17</sup> Режим трения до полной остановки весьма трудно реализовать.

1	2	3	4
11) мощность реального процесса торможения при весьма быстро прикладываемой нагрузке и $\tau = 0,1-0,067$ <sup>18*</sup>	$\tau_N(\tau) = 6(\sqrt{\tau} - \tau)$		
		$\tau_W(\tau) = \sqrt{4\tau^3 - 3\tau^2}$	

\* – рациональные режимы трения (до полной остановки)

Для приближённой оценки характера деформаций используется оценочный критерий

$$K_p = \frac{E^*}{HB} \sqrt{\frac{R_p}{r}}, \quad (2.113)$$

где  $E^*$  – приведённый модуль упругости (2.78);

$HB$  – твёрдость материала, Па;

$R_p$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.65);

$r$  – средний радиус кривизны вершин выступов, мкм (2.67).

Если  $K_p < 3$ , то контакт будет упругим, иначе – пластичным.

Диаметр статического пятна фактического касания определяется – для упругого микроконтакта

$$d_{r1} = \frac{r_1}{\sqrt{\nu_1}} \left( 2^{2\nu_1+2} \sqrt{\pi} \left( \frac{R_{\max 1}}{r_1} \right)^{\nu_1} \frac{N}{A_c E^* b_{p1} K_v} \right)^{\frac{1}{2\nu_1+1}}, \quad (2.114)$$

где  $r_1$  – средний радиус кривизны вершин выступов образца, мкм (2.67);

$R_{\max 1}$  – максимальная высота микровыступа образца, мкм (2.64);

$\nu_1$  – параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки (2.73);

$N$  – нагрузка на номинальном контакте, Н;

$A_c$  – контурная площадь контакта, м<sup>2</sup> (2.81);

$K_v$  – коэффициент вида механической обработки

$$K_v = \frac{\Gamma(\nu_1 + 1)}{\Gamma(\nu_1 + 1,5)}$$

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.78);

$b_{p1}$  – параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (от вершины до средней линии) (2.71),

– для пластического микроконтакта

<sup>18</sup> Характеристика мощности может быть получена при применении любой из трёх пар трения, функции фрикционной теплостойкости которых показаны на рис. 2.21. Восходящая ветвь характеристики является следствием того, что даже при резкой подаче давления  $Q_a$  нагрузка и сила трения растут во времени. При этом рост силы трения опережает падение скорости и за период  $\tau = 0,1-0,067$  достигается максимальное значение мощности.

$$d_{r1} = \sqrt{\frac{8r_1 R_{\max 1}}{\nu_1} \cdot \left( \frac{N}{A_c \cdot b_{p1} \cdot c \sigma_T} \right)^{1/\nu_1}}, \quad (2.115)$$

где  $c$  – коэффициент, характеризующий влияние геометрии касания и наклёпа материалов на напряжённое состояние в контакте

$$c = 1 + \gamma + K; \quad (2.116)$$

$\gamma$  – угол между основанием конуса и образующей;

$K$  – коэффициент осесимметричности;

$\sigma_T$  – предел текучести материала с меньшей твёрдостью и шероховатостью (предельно наклёпанного материала), Па.

На рис. 2.22 показана зависимость коэффициента формы  $c$  от угла  $\gamma$  по вычислениям В.Н. Марочкина и соблюдении условий Хаара и Кармана (полной пластичности). Величина  $c$  для одного и того же материала в зависимости от величины угла  $\gamma$  и сплющивания или внедрения изменяется от 1 до 4,7. Подобный результат ранее экспериментально получил Д. Тейбор.

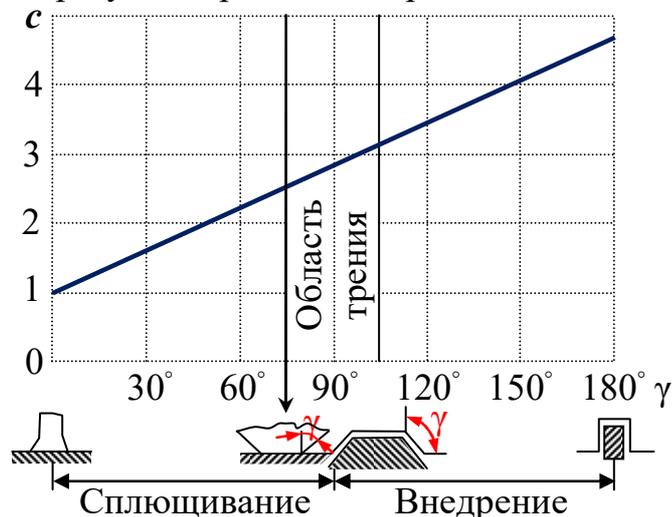


Рис. 2.22 – Зависимость коэффициента формы  $c$  от геометрического очертания выступа и краевых условий контактирования

Так, например, если для сферического выступа угол  $\gamma$  при сплющивании примерно изменяется от 80 до 90°, а при внедрении – от 90 до 100°, то коэффициент  $c$  может изменяться в пределах от 2,7 до 3,1. Вследствие трения в контактной области значение  $c$  несколько повышается. При расчёте площади касания можно с известным приближением принять коэффициент  $c = 3$ , что теоретически обосновывается исследованиями А.Ю. Ишлинского по шариковой пробе Бриннеля.

Как следует из приведенных данных, геометрическое очертание деформируемого тела значительно влияет на переход тела в пластическое состояние. При внедрении или расплющивании в зависимости от глубины внедрения коэффициент  $c$  может изменяться в значительных пределах. Так, например, при наклёпе –  $c = 10$ .

При практических расчётах среднее напряжение в контакте можно принять равным  $c\sigma_T = HB_2(\Theta_2^*)$ , то есть твёрдости более пластичного материала, как функции температуры поверхности трения.

Коэффициент  $\psi_{Vi}$ , учитывающий понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём, определяется по формуле

$$\psi_{Vi} = \frac{m_{эi}c_i}{m_{эi}c_i + 0,5\sum m_{ди}c_i}, \quad (2.117)$$

где  $m_{эi}$  – масса эффективного теплопоглощающего объёма, кг·с (2.93);

$m_{ди}$  – масса дополнительного эффективного объёма, кг·с;

$c$  – удельная теплоёмкость материала, Дж/кг·К.

**Пример 1.** Для схемы дисковых тормозов с малым коэффициентом взаимного перекрытия номинальная ширина дорожки трения меньше номинального размера диска  $l$  (рис. 2.23)  $l_2 < R_{1нар} - R_{1вн}$ . За период времени  $t_T$  эффективная глубина слоёв в первом и втором элементах будет определяться из выражения (2.89).

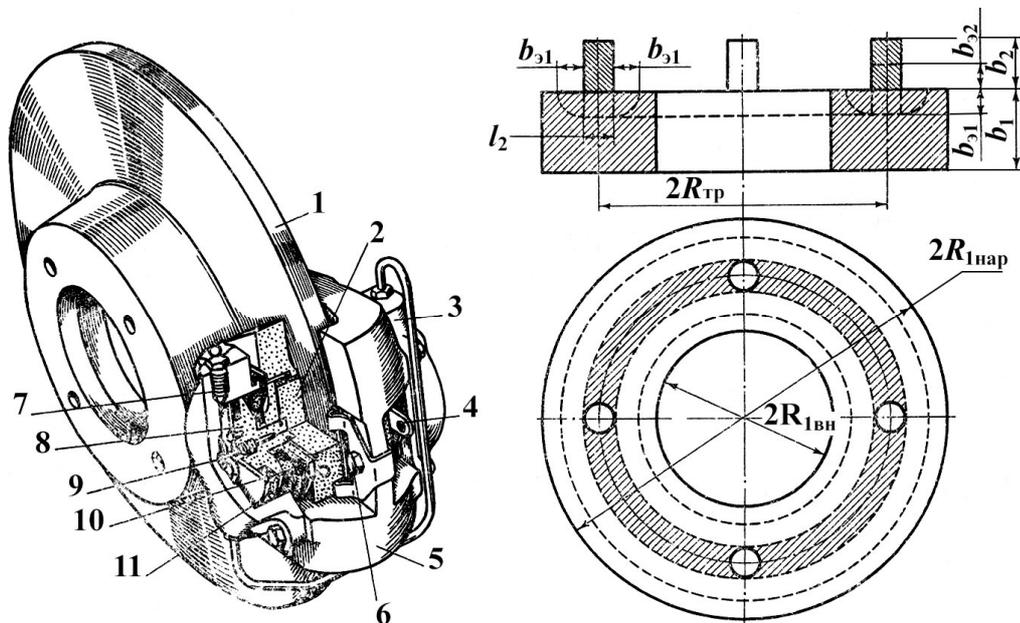


Рис. 2.23 – Схемы дисковых тормозов: *а* – схема конструкции; *б* – схема учёта эффективных теплопоглощающих объёмов; 1 – диск; 2 – фрикционная накладка; 3 – блок цилиндра; 4 – наконечник удаления; 5 – кронциркуль; 6 – отпусковой болт колодки; 7 – пускающий винт; 8 – поршень; 9 – штифт вытяжного механизма; 10 – уплотняющее кольцо; 11 – пылепредохранитель

В соответствии с (2.117) коэффициент объёма:

– для тормозного диска 1 и фрикционных накладок 2

$$\psi_{V1} = \frac{2\pi R_{тр} l_2 b_{э1} \rho_1 c_1}{2\pi R_{тр} l_2 b_{э1} \rho_1 c_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\pi b_{э1}^2}{4} \cdot 2\pi R_{тр} \rho_1 c_1} = \frac{2\pi R_{тр} l_2 b_{э1} \rho_1 c_1}{2\pi R_{тр} b_{э1} \rho_1 c_1 \left( l_2 + \frac{\pi b_{э1}}{4} \right)} = \frac{l_2}{l_2 + \frac{\pi}{4} b_{э1}},$$

$$\psi_{V_2} = \frac{n\pi l_2^2 b_{\text{э}2} \rho_2 c_2}{n\pi l_2^2 b_{\text{э}2} \rho_2 c_2} = 1,$$

где  $n$  – количество накладок.

**Пример 2.** Рассмотрим контакт тормозной колодки 2 с барабаном 1, расчётная схема которого представлена на рис. 2.24.

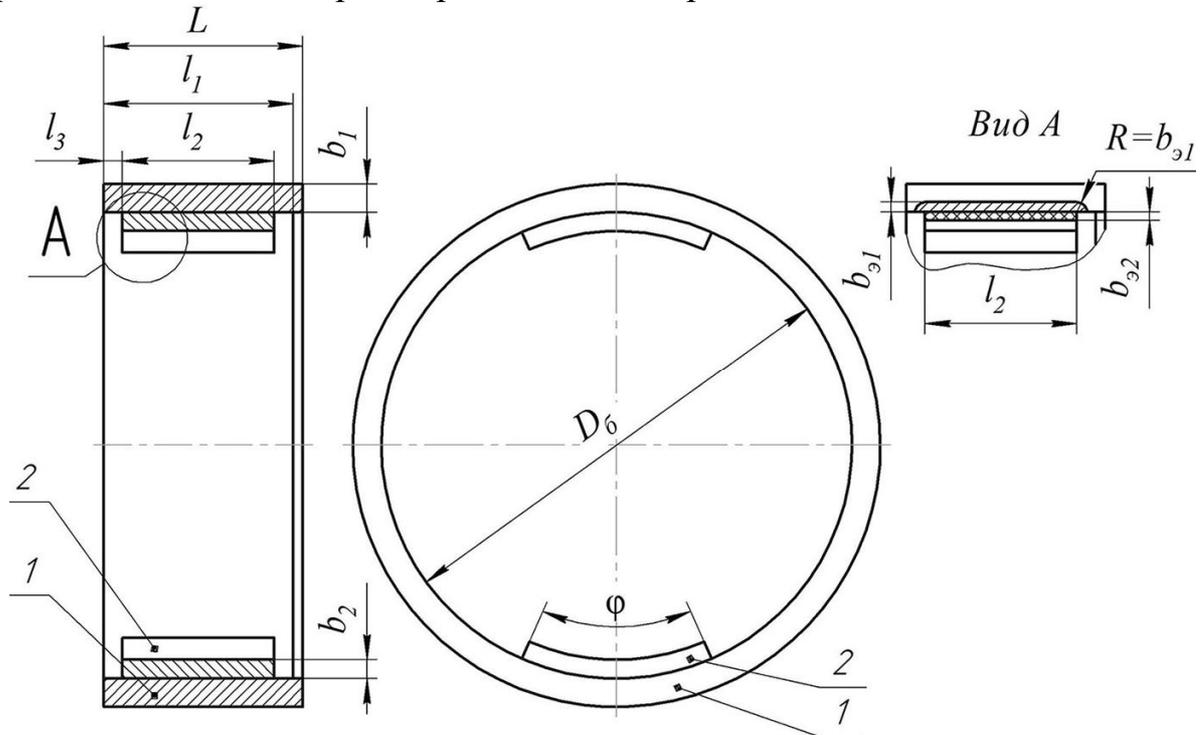


Рис. 2.24 – Схема для расчёта  $\psi_V$  при контакте колодки по барабану

Ширина  $l_2$  колодки 2 меньше ширины барабана  $l$ , и её номинальный контакт равномерен по всей поверхности колодки. Тогда коэффициент объёма (2.117) можно определить как

$$\psi_{V_1} = \frac{\pi D_0 \phi l_2 b_{\text{э}1} \rho_1 c_1}{\pi D_0 \phi l_2 b_{\text{э}1} \rho_1 c_1 + \frac{1}{2} \cdot \pi D_0 \phi \cdot 2 \frac{\pi b_{\text{э}1}^2}{4} \rho_1 c_1} = \frac{l_2}{l_2 + \frac{\pi}{4} b_{\text{э}1}};$$

$$\psi_{V_2} = 1.$$

**Пример 3.** Рассмотрим случай, когда на колодке стабильная контурная площадка контакта, например аппроксимированная с помощью круга (рис. 2.25) диаметром  $d_2$ .

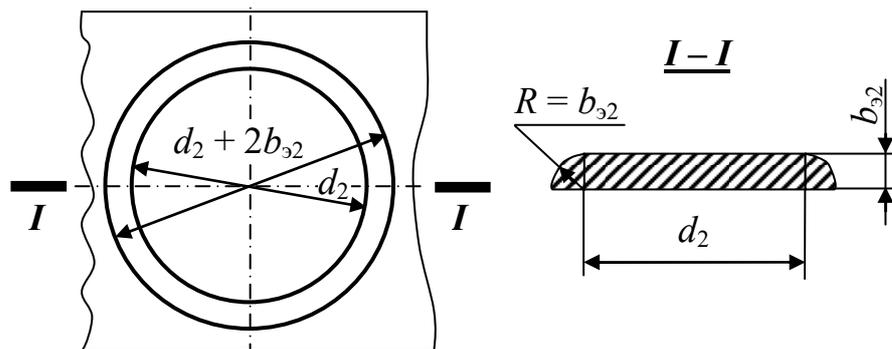


Рис. 2.25 – Схема для расчёта  $\psi_V$  при контакте шайбы по диску

Аналогично предыдущему, получим

$$\Psi_{V_1} = \frac{d_2}{d_2 + \frac{\pi}{4}b_{\text{э}1}}; \quad \Psi_{V_2} = \frac{d_2}{d_2 + \frac{\pi}{4}b_{\text{э}2}}.$$

Для схемы движения полупространства с выступом по гладкому полупространству значение максимальной температуры на фактическом пятне касания по методике А.В. Чичинадзе выражается зависимостью

$$\Theta_{\text{max}} = \Theta_0 + \Theta_V + \Theta^* + \Theta_{\text{всп}}, \quad (2.118)$$

где  $\Theta_0$  – исходная температура элемента пары трения, К;

$\Theta_V$  – объёмная температура элемента, К (2.119);

$\Theta^*$  – средняя температура номинальной (или контурной) поверхности трения, К (2.120);

$\Theta_{\text{всп}}$  – температурная вспышка (скачок температуры при трении) на фактическом пятне касания, К (2.122).

Известно, что физико-химические изменения в материалах при трении протекают либо с выделением, либо с поглощением теплоты: первые называются экзотермическими, вторые эндотермическими. Указанные процессы могут изменять объёмные  $\Theta_V$  и поверхностные  $\Theta^*$  температуры.

Предполагая, что температура любой точки на оси  $Oz$  пропорциональна продолжительности трения и прирост температуры в этой точке равен приросту *средней объёмной температуры*, в соответствии с поставленной задачей теплопроводности (2.83) имеем

$$\Theta_{V_1} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z_1^2} = \frac{(1 - \alpha_{\text{тп}})W_{\text{тп}}\Psi_{V_1}}{m_{\text{э}1}c_1t_{\text{T}}} \tau_N; \quad \Theta_{V_2} = \frac{\alpha_{\text{тп}}W_{\text{тп}}\Psi_{V_2}}{m_{\text{э}2}c_2t_{\text{T}}} \tau_N, \quad (2.119)$$

где  $\alpha_{\text{тп}}$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.98) – (2.102);

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_{\text{T}}$ , Дж (2.105);

$\Psi_V$  – коэффициент дополнительного теплопоглощающего объёма (2.117);

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения (2.111);

$m_{\text{э}}$  – масса эффективного теплопоглощающего объёма, кг (2.93);

$t_{\text{T}}$  – продолжительность трения, с;

$c$  – удельная теплоёмкость материала, Дж/кг·К.

Температура  $\Theta^*$  на поверхности трения распределена неравномерно, поэтому измеренные значения температуры в различных точках контактной поверхности тела  $A_{\text{к}}$  получаются разными. При заданных граничных условиях с использованием *теоремы Дюгамеля* получена формула для расчёта *средней температуры на номинальной поверхности трения*:

$$\Theta_1^* = \frac{(1 - \alpha_{\text{тп}})W_{\text{тп}}b_1\psi_{V_1}}{\lambda_1 A_{\text{к1}}t_{\text{т}}} \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{3} - \xi_1 \left( 1 - \frac{\xi_1}{2} \right) \right] \tau_N + Fo_1 \tau_W \dots \\ -\tau_N \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}}{n^2} \cos(n\pi \xi_1) \end{array} \right]; \quad (2.120)$$

$$\Theta_2^* = \frac{\Theta_1^*}{K_{\text{вз}}},$$

где  $\alpha_{\text{тп}}$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.98) – (2.103);

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_{\text{т}}$ , Дж (2.105);

$b_1$  – толщина элемента пары трения, м (2.88);

$\psi_V$  – коэффициент дополнительного теплопоглощающего объёма (2.117);

$\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности более нагретого тела, Вт/м·К;

$A_{\text{к1}}$  – контактная площадь более нагретого тела, м<sup>2</sup> (2.79);

$t_{\text{т}}$  – продолжительность трения, с;

$\xi_1$  – величина сближения поверхности трения,  $\xi_1 = z_1 / b_1$ ;

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения (2.111);

$\tau_W$  – временной фактор работы трения (2.112);

$Fo_1$  – число Фурье (2.91);

$\tau$  – безразмерный коэффициент времени трения ( $\tau = t/t_{\text{т}}$ ).

Для определения *градиента температуры* по нормали к поверхности трения необходимо взять частную производную по координате  $\xi$  от выражения (2.120)

$$\Delta \Theta_1^* = \frac{(1 - \alpha_{\text{тп}})W_{\text{тп}}b_1\psi_{V_1}}{\lambda_1 A_{\text{к1}}t_{\text{т}}} \left[ -1 + \xi_1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}}{n} \sin(n\pi \xi_1) \right] \tau_N.$$

С ростом продолжительности трения, то есть с ростом  $\tau$ , член, представленный суммой ряда в (2.120), стремится к нулю. Тогда при  $\tau \geq \tau'$  формула для определения поверхностной температуры упрощается

$$\Theta_1^* \Big|_{\tau \geq \tau'} = \frac{(1 - \alpha_{\text{тп}})W_{\text{тп}}b_1\psi_{V_1}}{\lambda_1 A_{\text{к1}}t_{\text{т}}} \left[ \left[ \frac{1}{3} - \xi_1 \left( 1 - \frac{\xi_1}{2} \right) \right] \tau_N + Fo_1 \tau_W \right]. \quad (2.121)$$

Найдём величину  $\tau'$ , при которой можно пренебречь суммой ряда в уравнении (2.120). Для иллюстрации рассмотрим случай, когда число Фурье  $Fo_1 = 1/3$  и временные факторы мощности  $\tau_N = 2(1-\tau)$  и работы  $\tau_W = \tau(2-\tau)$  трения. Предполагаем, что величина  $\tau'$  должна быть такой, чтобы сумма ряда составляла бы менее 5 % от величины суммы членов в круглых скобках. Расчёты приведены в табл. 2.8.

Табл. 2.8 – Определение процента ошибки при вычислении  $\tau'$

$\tau'$	$\Delta' = \frac{\tau_N}{3} + Fo_1 \tau_W$	$\Delta = \frac{\tau_N}{3} + Fo_1 \tau_W - \tau_N \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^3 \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}}{n^2}$	$\frac{\Delta}{\Delta'} \cdot 100\%$
0	0,667	0,552	82,75
0,10	0,663	0,289	43,57
0,20	0,653	0,174	26,61
⋮	⋮	⋮	⋮
0,54	0,569	0,032	5,55
0,55	0,566	0,030	5,28
0,56	0,562	0,028	5,03
0,57	0,558	0,027	4,79

Таким образом, при  $Fo_1 = 1/3$  и указанных выше временных факторах мощности и работы трения можно пренебрегать суммой ряда в (2.120) и пользоваться упрощённой формулой (2.121) только тогда, когда  $\tau \geq \tau' \approx 0,565$ . Когда  $Fo_1 > 1/3$ , то соответственно уменьшается и допустимая величина  $\tau'$ . Следовательно, при кратковременных режимах трения, измеряемых долями секунды, и в первые мгновения процессов трения такое упрощение вычислений недопустимо. Этот факт также распространяется и для случая  $Fo_1 \leq 1/3$ , а при  $Fo_1 \approx 0$  момент времени  $\tau' \approx 1$ , то есть при вычислении значений поверхностных температур пренебрегать суммой ряда в (2.120) не допустимо.

Используя полученные выше выражения, найдём соотношение между средней температурой поверхности трения (2.120) и объёмной температурой (2.119) элемента пары трения при совершении полной работы трения и значении числа Фурье (2.91)

– для  $\tau < \tau'$

$$\theta_1^* = \frac{\Theta_1^*}{\Theta_{V_1}} = t_T \left[ \left[ \frac{1}{3} - \xi_1 \left( 1 - \frac{\xi_1}{2} \right) \right] \frac{1}{Fo_1} + \frac{\tau_W}{\tau_N} - \frac{2}{Fo_1 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}}{n^2} \cos(n\pi \xi_1) \right];$$

– для случая, когда  $\tau \geq \tau'$

$$\theta_1^* \Big|_{\tau \geq \tau'} = \frac{\Theta_1^*}{\Theta_{V_1}} = t_T \left[ \left[ \frac{1}{3} - \xi_1 \left( 1 - \frac{\xi_1}{2} \right) \right] \frac{1}{Fo_1} + \frac{\tau_W}{\tau_N} \right].$$

Для рационального конструирования тормозных и фрикционных устройств необходимо учитывать возможность *коробления* и *усадок* элементов пары трения, возникающих в результате воздействия высоких температурных напряжений, вызванных теплоударным трением. Это снижает прочность фрикционных подсистем. В тяжелонагруженных конструкциях учёт этих напряжений весьма целесообразен, так как перепады температур по толщине элементов пары трения достигают в них нескольких сотен градусов. Из указанных выше выражений получаем соотношение поверхностных температур при сближении  $\xi_1 = 0$  к сближению  $\xi_1 = 1$

– для  $\tau < \tau'$

$$\Delta\theta_1^* = \frac{\Theta_1^*|_{\xi_1=0}}{\Theta_1^*|_{\xi_1=1}} = \frac{\left[\frac{1}{3} - \xi_1 \left(1 - \frac{\xi_1}{2}\right)\right] \tau_N + Fo_1 \tau_W - \tau_N \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}}{n^2}}{-\frac{1}{6} \tau_N + Fo_1 \tau_W - \tau_N \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot \tau}};$$

– для случая, когда  $\tau \geq \tau'$

$$\Delta\theta_1^*|_{\tau \geq \tau'} = \frac{\Theta_1^*|_{\xi_1=0}}{\Theta_1^*|_{\xi_1=1}} = \frac{\left[\frac{1}{3} - \xi_1 \left(1 - \frac{\xi_1}{2}\right)\right] \tau_N + Fo_1 \tau_W}{-\frac{1}{6} \tau_N + Fo_1 \tau_W}.$$

Следовательно, для таких режимов трения, когда  $\tau_N$  повышается плавно, поверхностная температура в данном элементе пары трения может определяться из выражения (2.121), так как член с рядом в (2.120) не оказывает заметного влияния (см. табл. 2.8). Это решение тепловой задачи трения согласуется с графоаналитическим методом Шмидта для случая линейного теплового потока и изменением мощности трения по закону  $N_t = N_{t \max}(1-\tau)$ . Вышеназванные исследования были развиты в работах Г. А. Г. Фазекаса, результатом которых были эмпирические формулы при числах Фурье  $Fo_1 = 0 \dots 0,25$  для максимальных значений средней температуры поверхности трения и перепада температур по толщине фрикционного элемента

$$\Theta_1^* = \left(0,855 + \frac{0,353}{Fo_1^{0,75}}\right) \cdot \Theta_{V_0}; \quad \Delta\Theta_1^* = \frac{0,8}{Fo_1} \cdot \Theta_{V_0},$$

где  $\Theta_{V_0}$  – средняя установившаяся объёмная температура, вычисленная по Г.А. Г. Фазекасу без учёта коэффициента распределения тепловых потоков, как результат поглощения всем объёмом данного фрикционного элемента полного тепла трения

$$\Theta_{V_0} = \frac{W_{\text{тр}}}{m_{\text{эл}} c_1}.$$

Предположение, что на поверхности фактического контакта отсутствует скачок температуры между точками контакта неподвижной и движущейся поверхностей трения, приводит к выводу, что теплопередача происходит на поверхности контакта неравномерно.

Это доказывается отдельным рассмотрением температурных полей в телах 1 и 2. Сначала допускается, что тепловые потоки

$$Q_1 = \frac{(1 - \alpha'_{\text{тр}}) W_{\text{тр}}}{A_r t_T} \tau_N \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{\alpha'_{\text{тр}} W_{\text{тр}}}{A_r t_T} \tau_N$$

распределены по поверхности фактического контакта равномерно. В этом случае, как показано Н. Блоком и Д.К. Иегером, температурные поля в телах 1 и 2 при высокой скорости (числе Пекле  $Pe_1 \geq 20$ ) имеют вид, показанный на рис. 2.26.

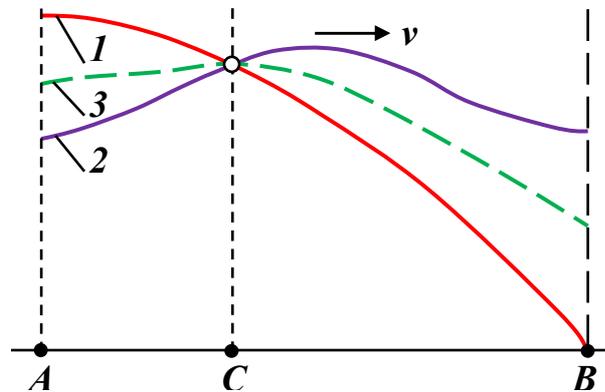


Рис. 2.26 – Температурные поля на микроконтактах шероховатых поверхностей трения

Действительная температура поверхности фактического контакта в предположении отсутствия скачка температуры может быть получена как средняя двух кривых. Для получения поля этой температуры необходимо, чтобы от точки  $A$  до точки  $C$  большая часть тепла отдавалась телу 2, а от точки  $C$  до точки  $B$ , наоборот, телу 1. В этом случае для движущегося пятна контакта максимальная температура в зоне контакта

$$\Theta_{\max} \approx \frac{1}{2} \left( \Theta_{\max 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Theta_{\max 2} \right) \approx \Theta_{\max 2} \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}},$$

где  $\Theta_{\max 1}$  – максимальная температура поверхности движущегося тела

$$\Theta_{\max 1} \approx \frac{4}{\sqrt{2}v_c} \sqrt{\frac{Pe_1}{\pi}} \frac{(1 - \alpha'_{\text{тп}}) W_{\text{тп}}}{A_r \rho_1 c_1 t_{\text{T}}} \tau_N;$$

$\Theta_{\max 2}$  – максимальная температура поверхности неподвижного тела

$$\Theta_{\max 2} \approx \frac{\alpha'_{\text{тп}} d_{r2} W_{\text{тп}}}{2A_r \lambda_2 t_{\text{T}}} \tau_N.$$

Так как принято граничное условие равенства температур (2.94), то

$$\Theta_{\max} \approx \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d_{r2}}{\lambda_2} \cdot \frac{\alpha'_{\text{тп}} W_{\text{тп}}}{2A_r t_{\text{T}}} \tau_N,$$

где  $\alpha'_{\text{тп}}$  – коэффициент распределения тепловых потоков, определяемый по формуле Ф. Шаррона (2.98), когда число Пекле (2.96)  $Pe < 0,4$ ; по формуле Д.К. Иегера и Н. Блока (2.104), когда  $Pe \geq 20$ , иначе – по формулам А.В. Чичинадзе и А.Г. Гинзбурга (2.102).

$W_{\text{тп}}$  – полная работа сил трения за время трения  $t_{\text{T}}$ , Дж (2.105);

$A_r$  – суммарная площадь фактического контакта,  $\text{м}^2$  (2.125);

$t_{\text{T}}$  – продолжительность трения, с;

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения (2.111);

Основываясь на базе указанных выше теоретических положений, а также зависимостей И.В. Крагельского и Н.Б. Дёмкина, в работах А.В. Чичинадзе на базе известных теорий движущихся источников теплоты при трении были получены расчётные формулы для температуры вспышки (скачка температуры при трении) на фактическом пятне касания, как избыточные над средней поверхностной температурой  $\Theta^*$ :

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{всп1}} &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \theta \cdot \frac{(1 - \alpha'_{\text{ТП}}) W_{\text{ТП}}}{A_r t_T} \tau_N; \\ \Theta_{\text{всп2}} &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \theta \cdot \frac{\alpha'_{\text{ТП}} W_{\text{ТП}}}{K_{\text{вз}} A_r t_T} \tau_N,\end{aligned}\quad (2.122)$$

где  $\theta$  – коэффициент, учитывающий размер пятна фактического контакта образца  $d_{r1}$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda_2$  контробразца при изменении скорости относительного скольжения  $v_c$

$$\theta = \frac{d_{r1}}{4\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{\pi \cdot Pe_1}} = \frac{d_{r1} \sqrt{a_1}}{4\lambda_2 \sqrt{a_1} + \lambda_1 \sqrt{\pi \cdot d_{r2} \cdot v_c}};$$

$d_{r1}, d_{r2}$  – средний статический размер пятна касания, м (2.115);

$K_{\text{вз}}$  – коэффициент взаимного перекрытия,  $K_{\text{вз}} = A_{\text{к2}}/A_{\text{к1}} < 1$ ;

$a_1$  – коэффициент температуропроводности образца, м<sup>2</sup>/с (2.84);

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности материалов, Вт/м·К;

$v_c$  – изменяемая скорость скольжения, м/с (2.97);

$Pe_1$  – число Пекле (2.96).

Предположим, что вся работа трения генерируется в тепло на  $m$  фактических пятнах касания со средним диаметром пятна  $d_r$  (2.114) для упругого микроконтакта или (2.115) – для пластичного. Преобразуем формулу (2.122) для случая пластичного микроконтакта поверхностей трения образца 1 и контробразца 2, считая среднее напряжение в контакте  $\sigma_T$  равным твёрдости более пластичного материала  $HB_2$ :

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{всп1}} &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi v_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_1 R_{\text{max1}}}{v_1 (b_{p1} A_c)^{1/v_1}}} \left( \frac{HB_2}{N} \right)^{\frac{4v_1 - 1}{4v_1}} \frac{\sqrt{a_1} (1 - \alpha'_{\text{ТП}}) W_{\text{ТП}}}{\lambda_1 t_T} \tau_N; \\ \Theta_{\text{всп2}} &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi v_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_2 R_{\text{max2}}}{v_2 (b_{p2} A_c)^{1/v_2}}} \left( \frac{HB_2}{N} \right)^{\frac{4v_2 - 1}{4v_2}} \frac{\sqrt{a_2} (1 - \alpha'_{\text{ТП}}) W_{\text{ТП}}}{\lambda_2 t_T} \tau_N,\end{aligned}\quad (2.123)$$

где  $a_1, a_2$  – коэффициенты температуропроводности материалов, м<sup>2</sup>/с;

$A_c$  – контурная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.81);

$r_1, r_2$  – средний радиус кривизны вершин выступов, м (2.67);

$R_{1\text{max}}, R_{2\text{max}}$  – наибольшая высота неровностей профиля, м (2.64);

$\nu_1, \nu_2$  – параметры опорной кривой поверхности трения (2.73);  
 $b_{p1}, b_{p2}$  – параметры степенной аппроксимации опорной кривой (2.71);  
 $HB_2$  – твёрдость более пластичного материала, Па;  
 $N$  – нагрузка, Н.

В формулу (2.123) целесообразно подставлять значения твёрдости  $HB_2$  в функции температуры поверхности трения.

Используя выражения для температуры вспышки (2.123) и коэффициента температуропроводности (2.84), а также учитывая, что объёмная температура элемента пары трения равна (2.119), получим соотношение между температурой вспышки  $\Theta_{всп}$  и объёмной температурой  $\Theta_V$  элемента пары трения при совершении полной работы трения  $W_{тп}$

$$\theta_{всп1} = \frac{\Theta_{всп1}}{\Theta_{V_1}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi\nu_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_1 R_{max1}}{\nu_1 (b_{p1} A_c)^{1/\nu_1}}} \left(\frac{HB_2}{N}\right)^{\frac{4\nu_1-1}{4\nu_1}} \frac{(1 - \alpha'_{тп}) b_1 A_{к1}}{(1 - \alpha_{тп}) \sqrt{a_1} \Psi_{V_1}};$$

$$\theta_{всп2} = \frac{\Theta_{всп2}}{\Theta_{V_2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi\nu_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_2 R_{max2}}{\nu_2 (b_{p2} A_c)^{1/\nu_2}}} \left(\frac{HB_2}{N}\right)^{\frac{4\nu_2-1}{4\nu_2}} \frac{\alpha'_{тп} b_2 A_{к2}}{\alpha_{тп} \sqrt{a_2} \Psi_{V_2}},$$

где  $b_1, b_2$  – теплопоглощающая толщина пары трения, м (2.88);

$\alpha_{тп}$  – коэффициент распределения тепловых потоков, определённый при вычислении объёмных и поверхностных температур.

С учётом значений чисел Фурье (2.91), получим

$$\theta_{всп1} = \frac{\Theta_{всп1}}{\Theta_{V_1}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi\nu_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_1 R_{max1}}{\nu_1 (b_{p1} A_c)^{1/\nu_1}}} \left(\frac{HB_2}{N}\right)^{\frac{4\nu_1-1}{4\nu_1}} \frac{(1 - \alpha'_{тп}) \sqrt{a_1} A_{к1} t_T}{(1 - \alpha_{тп}) Fo_1 b_1 \Psi_{V_1}};$$

$$\theta_{всп2} = \frac{\Theta_{всп2}}{\Theta_{V_2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\pi\nu_c}} \sqrt[4]{\frac{8r_2 R_{max2}}{\nu_2 (b_{p2} A_c)^{1/\nu_2}}} \left(\frac{HB_2}{N}\right)^{\frac{4\nu_2-1}{4\nu_2}} \frac{\alpha'_{тп} \sqrt{a_2} A_{к2} t_T}{\alpha_{тп} Fo_2 b_2 \Psi_{V_2}},$$
(2.124)

Для расчёта фактической площади касания  $A_r$  используем зависимости, полученные на основе модели шероховатой поверхности в виде набора сферических сегментов радиуса  $r$ . Поскольку  $r$  определяется как среднее геометрическое из поперечного и продольного радиусов (2.67), то такая модель пригодна и для выступов, имеющих вытянутую эллипсоидальную форму. Принимая, что материал в шероховатом слое распределён в соответствии с формулой (2.70), при указанных выше допущениях воспользуемся формулой профессора Н.Б. Дёмкина для средней фактической площади касания (рис. 2.27,в), м<sup>2</sup>

$$A_r = \frac{N}{(K_3 B)^{\frac{\nu}{\nu+\sigma}} \cdot \left(\frac{R_p}{r}\right)^{\frac{\nu\sigma}{\nu+\sigma}} \cdot \left(\frac{N}{\alpha t_m A_c}\right)^{\frac{\sigma}{\nu+\sigma}}},$$
(2.125)

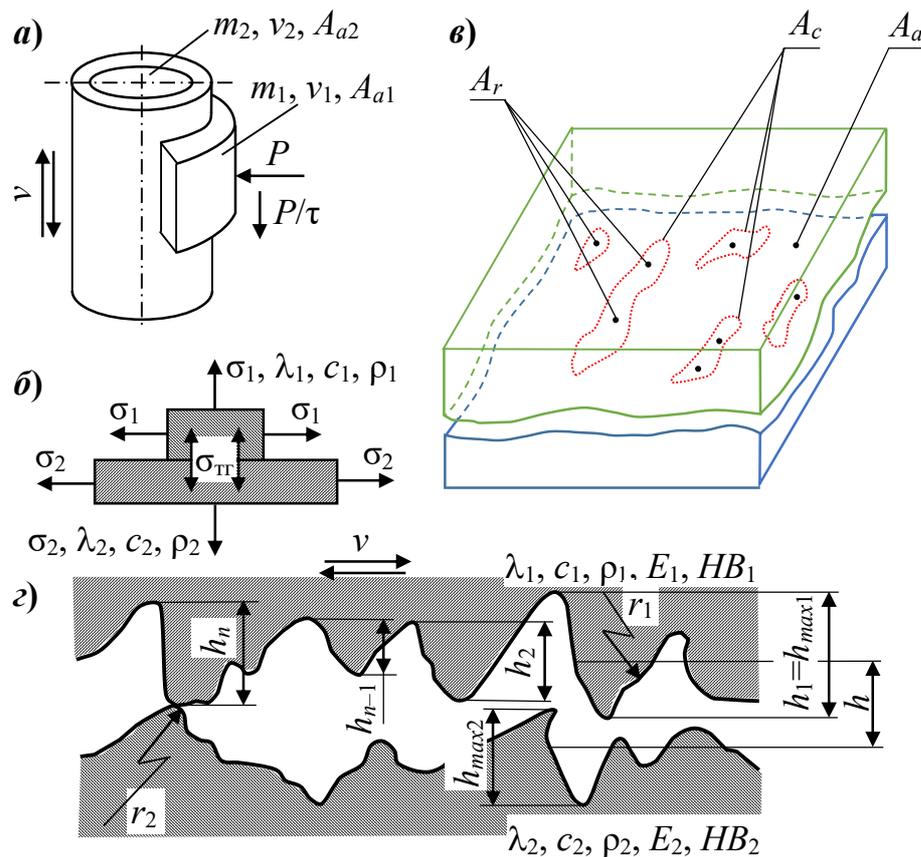


Рис. 2.27 – Подмодели трения: *a* – кинематическая (макроконтактирования), *б* – тепловая; *в* – микроконтактирования; *г* – единичного контакта;  $P$  – нагрузка;  $v$  – скорость скольжения;  $t$  – время;  $m$  – масса;  $\lambda$  – теплопроводность;  $c$  – теплоёмкость;  $\rho$  – плотность;  $E$  – модуль упругости;  $HB$  – твёрдость;  $\sigma$  – коэффициент теплоотдачи; площади:  $A_a$  – номинальная,  $A_c$  – контурная;  $A_r$  – фактическая;  $r$  – радиус шероховатости поверхности;  $h$  – высота шероховатости поверхности  $R_z$

где  $N$  – нагрузка на номинальном контакте, Н;

$K_3$ ,  $B$ ,  $\varpi$  – коэффициенты, характеризующие шероховатость и деформационные свойства материала (табл. 2.9),  $0 \leq \varpi \leq 0,5$

$$K_3 = \frac{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\varpi + 2)}{\Gamma(\nu + \varpi + 1)};$$

$\nu$  – параметр опорной кривой поверхности трения (2.73), зависящий от вида механической обработки;

$R_p$  – наибольшая высота выступа (2.65), мкм;

$r$  – средний радиус кривизны вершин выступов (2.67), мкм;

$\alpha$  – коэффициент упругой осадки;

$t_m$  – относительная опорная длина по средней линии (2.72);

$A_c$  – контурная площадь контакта, например (2.81), м<sup>2</sup>.

В табл. 2.9 и 2.10 приведены значения коэффициента упругой осадки  $\alpha$  не только для упругого и пластического контакта, но и для упруго-пластического контакта, что позволяет оценить упругую осадку выступов при пластическом контакте различных поверхностей.

Табл. 2.9 – Коэффициент  $\alpha$  при упругопластическом контакте

$HB$	$S_m / R_z$					
	1	10	20	30	40	50
50	1,0	0,85	0,75	0,65	0,55	0,5
100	0,9	0,75	0,56	0,50		
200	0,8	0,56	0,50			
400	0,7	0,50				

где  $HB$  – твёрдость по Бринеллю, МПа;

$S_m$  – средний шаг неровностей (2.66), мкм;

$R_z$  – высота неровностей профиля по десяти точкам (2.63).

Табл. 2.10 – Значения  $B$ ,  $\varpi$ ,  $\alpha$  для разных случаев контакта

Деформация	Поверхности	$B$	$\varpi$	$\alpha$
Упругая	Полимеры и металлические поверхности с $R_a \leq 0,16$ мкм	$0,43E^*$	0,5	0,5
Пластическая	Металлические поверхности с $R_a > 0,16$ мкм	$H$	0	1
Пластическая с упрочнением		$2^\varpi H_{MT}$	0–0,5	0,5–1
Упругопластическая		$c\sigma_T \approx H$		

где  $E^*$  – приведённый модуль упругости (2.78);

$H$  – микротвёрдость (2.80);

$H_{MT}$  – максимальная твёрдость по Майеру

$$H_{MT} = \frac{2HB}{\vartheta^{0,5\vartheta} (\vartheta - 2)^{0,5(\vartheta-2)} (\vartheta - 1)^{1-\vartheta}}; \quad (2.126)$$

$c$  – коэффициент, зависящий от формы поверхности (2.116).

$\sigma_T$  – предел текучести;

$\vartheta$  – коэффициент, характеризующий упрочнение материала

$\vartheta = 2$  – неупрочнённый материал;

$\vartheta = 2,5$  – предельно упрочнённый материал;

$\vartheta = 2,22$  – мягкая сталь;  $\vartheta = 2,21$  – серый чугун;

$\vartheta = 2,13$  – латунь;  $\vartheta = 2,07$  – алюминий.

Выражение (2.126) для определения предельной твёрдости по Майеру удобно тем, что в его основе лежит твёрдость по Бринеллю  $HB$ , определение которой не представляет трудности, а значение параметра упрочнения  $\vartheta$  для большинства металлов известно. Подставляя типичные значения параметров в формулу (2.125), получим приближённые формулы для вычисления фактической площади касания, приведённые в табл. 2.11.

Фактической площади касания (2.125) соответствуют следующие основные характеристики:

– сближения поверхностей  $h$ , мкм;

– количества пятен фактического контакта  $n_r$ ;

– средняя площадь пятен контакта  $\Delta A_r$ ;

– среднее расстояние между пятнами контакта  $\bar{S}$

Табл. 2.11 – Формулы для расчёта фактической площади касания

Контакт	Поверхности и давление	Расчётная формула	Примечания
Упругий	Шероховатая с гладкой	$A_r = \frac{N}{0,86 \left( \frac{R_a E^{*2}}{r} \right)^{0,4} \left( \frac{N}{A_c} \right)^{0,2}}$	—
	Две шероховатые поверхности	$A_r = \frac{N}{0,61 \left( \frac{R_a E^{*2}}{r} \right)^{0,43} \left( \frac{N}{A_c} \right)^{0,14}}$	—
Пластиче-ский контакт на микровы-ступах	$\frac{N}{A_r} \cong \text{const}$	$A_r \approx \frac{N}{H_{\text{MT}}}$	при интенсив-ных режимах трения, когда объёмные $\Theta_V$ и поверхно-стные $\Theta^*$ темпе-ратуры доста-точно велики
Пластиче-ский	$\frac{3N}{A_c HB} \leq 1$	$A_r \approx \frac{N}{H}$	При контакте поверхностей из разных ма-териалов для расчёта при-нимается меньшее зна-чение микро-твёрдости
	$\frac{3N}{A_c HB} > 1$	$A_r \approx \frac{N}{\frac{N}{A_c} - 0,4 \sqrt{\frac{A_c H^3}{N}}}$	
Повторное нагружение пластически деформиро-ванных по-верхностей	Шероховатая с гладкой	$A_r \approx \frac{N}{H \sqrt{\frac{N}{N_0}}}$	Формулы справедливы, если после первого нагружения поверхности не смещались
	Две шерохо-ватые поверх-ности	$A_r \approx \frac{N}{H_3 \sqrt{\frac{N}{N_0}}}$	

где  $H$  – микротвёрдость (2.80), Па;

$N_0$  – нормальная нагрузка при первом нагружении, Н;

$HB$  – твёрдость более мягкого элемента пары трения, Па;

$H_{\text{MT}}$  – максимальная твёрдость по Майеру (2.126), Па.

$$h = R_p \left( \frac{A_r}{A_c t_m} \right)^{\frac{1}{\nu}}; \quad n_r = n_a \left( \frac{A_r}{A_c t_m} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}; \quad \Delta A_r = \frac{A_r}{n_r}; \quad \bar{S} = \sqrt{\frac{A_c}{n_r}}, \quad (2.127)$$

где  $n_a$  – число вершин на номинальной площади поверхности  $A_a$ .

**Пример.** Решим задачу торможения вагона метрополитена 81-740 до остановки, когда начальная скорость торможения  $v_{нач} = 53$  км/ч, а продолжительность торможения  $t_T = 20$  с. Тара моторного вагона  $m_{мв} = 47$  т, а нагрузка пассажиров  $m_{п} = 15$  т. Торможение осуществляется колодочным тормозом. Диаметр стального колеса  $D_k = 0,78$  м, ширина  $\delta_k = 0,13$  м, толщина диска в направлении теплового потока  $b_k = 0,019$  м. Длина тормозных колодок 25610-Н ГОСТ Р 50507-93 на основе полимеров  $l_{тк} = 0,33$  м, ширина  $\delta_{тк} = 0,08$  м и толщина  $b_{тк} = 0,065$  м. Нормальная нагрузка тормозного механизма на тормозную колодку  $N_T = 12,2$  кН. Теплофизические и топографические характеристики материалов колеса и колодки приведены в табл. 2.12.

Табл. 2.12 – Теплофизические свойства материалов и параметры шероховатости поверхностей пары трения

Параметр	Материал	Сталь	ГИИР-300
Теплопроводность, Вт/м·°С		$\lambda_1 = 43$	$\lambda_2 = 0,651$
Удельная теплоёмкость, Дж/кг·°С		$c_1 = 460$	$c_2 = 836$
Плотность, кг/м <sup>3</sup>		$\rho_1 = 7850$	$\rho_2 = 2100$
Твёрдость, МПа			$HB_2 = 230$
Средний радиус кривизны вершин выступов, мкм		$r_1 = 82,3$	$r_2 = 30$
Наибольшая высота неровностей профиля, мкм		$R_{max1} = 4,5$	$R_{max2} = 4,0$
Параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки		$v_1 = 2,2$	$v_2 = 2,4$
Параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения		$b_{p1} = 1,0$	$b_{p2} = 4,0$
Контурная площадь касания, м <sup>2</sup>		$A_c = 0,023$	

1) Определим контактную площадь колеса, м<sup>2</sup>

$$A_{к1} = \pi D_k \delta_k,$$

где  $D_k$  – диаметр стального колеса, м;

$\delta_k$  – ширина колеса, м

$$A_{к1} = \pi D_k \delta_k = 3,14 \cdot 0,78 \cdot 0,13 = 0,319 \text{ м}^2.$$

2) Определим контактную площадь тормозной колодки, м<sup>2</sup>

$$A_{к2} = 2 D_k \cdot \arcsin(l_{тк} / D_k) \cdot \delta_{тк},$$

где 2 – количество тормозных колодок;

$D_k$  – диаметр стального колеса, м;

$l_{тк}$  – длина тормозной колодки, м;

$\delta_{тк}$  – ширина тормозной колодки, м

$$A_{к2} = 2 \cdot 0,78 \cdot \arcsin(0,33/0,78) \cdot 0,08 = 0,055 \text{ м}^2.$$

3) Определим коэффициент взаимного перекрытия

$$K_{\text{вз}} = \frac{A_{\text{к2}}}{A_{\text{к1}}},$$

где  $A_{\text{к1}}, A_{\text{к2}}$  – контактные площади колеса и тормозной колодки,  $\text{м}^2$

$$K_{\text{вз}} = \frac{A_{\text{к2}}}{A_{\text{к1}}} = \frac{0,055}{0,319} = 0,171.$$

4) Определим начальную скорость скольжения тормозной колодки относительно колеса,  $\text{м/с}$

$$v_{c \text{ max}} = \frac{v_{\text{нач}}}{3,6},$$

где  $v_{\text{нач}}$  – начальная скорость вагона,  $\text{км/ч}$

$$v_{c \text{ max}} = \frac{v_{\text{нач}}}{3,6} = \frac{53}{3,6} = 14,72 \text{ м/с}.$$

5) Определим полную работу торможения, которая должна быть выполнена двумя колодочными тормозами одного колеса четырёхосного моторного вагона, Дж

$$W_{\text{тп}} = \frac{m_{\text{мв}} + m_{\text{п}}}{16} \cdot v_{c \text{ max}}^2,$$

где  $m_{\text{мв}}, m_{\text{п}}$  – тара вагона и масса пассажиров, кг;

16 – количество колёс вагона;

$v_{c \text{ max}}$  – начальная скорость скольжения тормозной колодки относительно колеса

$$W_{\text{тп}} = \frac{m_{\text{мв}} + m_{\text{п}}}{16} \cdot v_{c \text{ max}}^2 = \frac{47000 + 15000}{16} \cdot 14,72^2 = 839882 \text{ Дж}.$$

6) Определим коэффициенты теплопроводности (2.84) материалов пары трения,  $\text{м}^2/\text{с}$

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} = \frac{43}{460 \cdot 7850} = 1,2 \cdot 10^{-5}; \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} = \frac{0,651}{836 \cdot 2100} = 3,7 \cdot 10^{-7},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности стали и ТИИР-300,  $\text{Вт/м} \cdot \text{°C}$ ;

$c_1, c_2$  – коэффициенты удельной теплоёмкости,  $\text{Дж/кг} \cdot \text{°C}$ ;

$\rho_1, \rho_2$  – плотность материалов,  $\text{кг/м}^3$ .

7) Зная, что продолжительность торможения  $t_{\text{т}} = 20 \text{ с}$ , находим по формуле (2.89) для каждого из элементов пары трения эффективную толщину колеса и колодки, м

$$b_{31} = \sqrt{3a_1 t_{\text{т}}} = \sqrt{3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 0,0267;$$

$$b_{32} = \sqrt{3a_2 t_{\text{т}}} = \sqrt{3 \cdot 3,7 \cdot 10^{-7} \cdot 20} = 0,0047,$$

где  $t_{\text{т}}$  – продолжительность трения, с.

8) Определяем теплопоглощающую толщину слоя по (2.88), м

$$b_1 = \text{if}(b_{\text{э}1} \leq b_{\text{к}}, b_{\text{э}1}, b_{\text{к}}) = 0,019;$$

$$b_2 = \text{if}(b_{\text{э}2} \leq b_{\text{тк}}, b_{\text{э}2}, b_{\text{тк}}) = 0,0047.$$

Здесь за период торможения  $t_{\text{T}}$  вся толщина бандажа колеса будет оказывать влияние на формирование объёмных, поверхностных температур и температуры вспышки, в то время как в тормозной колодке будет эффективно действовать только тонкий поверхностный слой.

9) Находим соотношение (2.91) между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемого тела

$$Fo_1 = \text{if}\left(b_{\text{э}1} \leq b_{\text{к}}, \frac{1}{3}, \frac{a_1 t_{\text{T}}}{b_1^2}\right) = \text{if}\left(b_{\text{э}1} \leq b_{\text{к}}, \frac{1}{3}, \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{0,019^2}\right) = 0,66;$$

$$Fo_2 = \text{if}\left(b_{\text{э}2} \leq b_{\text{тк}}, \frac{1}{3}, \frac{a_2 t_{\text{T}}}{b_2^2}\right) = \text{if}\left(b_{\text{э}2} \leq b_{\text{тк}}, \frac{1}{3}, \frac{3,7 \cdot 10^{-7} \cdot 20}{0,0047^2}\right) = 0,333.$$

10) Определим массу эффективного теплопоглощающего объёма (2.93) колеса и тормозной колодки, кг

$$m_{\text{э}1} = A_{\text{к}1} \cdot b_1 \cdot \rho_1 = 0,319 \cdot 0,019 \cdot 7850 = 47,5;$$

$$m_{\text{э}2} = A_{\text{к}2} \cdot b_2 \cdot \rho_2 = 0,055 \cdot 0,0047 \cdot 2100 = 0,5.$$

11) Определим коэффициент (2.117), учитывающий понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём колеса и тормозной колодки

$$\psi_{V_1} = \frac{\delta_{\text{тк}}}{\delta_{\text{тк}} + \pi b_1 / 4} = \frac{0,038}{0,038 + 3,14 \cdot 0,0047 / 4} = 0,843; \quad \psi_{V_2} = 1.$$

12) Приведём фрагмент программы, написанной в программе MathCAD, реализующей вычисление объёмных температур. Из табл. 2.7 выбираем временные факторы мощности (2.111) и работы (2.112) трения для процесса торможения при весьма быстро прилагаемой нагрузке

$$\tau_{\text{N}}(t) := 6 \cdot (\sqrt{t} - t) \quad \tau_{\text{W}}(t) := 4 \cdot \sqrt{t^3} - 3 \cdot t^2$$

Для последующего вычисления коэффициента распределения тепловых потоков (2.103) вычислим коэффициенты связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами колеса и колодки

$$\theta_1(t) := \frac{\tau_{\text{N}}(t)}{3} + Fo_1 \cdot \tau_{\text{W}}(t) - \tau_{\text{N}}(t) \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^3 \frac{e^{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo_1 \cdot t}}{n^2}$$

$$\theta_2(t) := \frac{\tau_{\text{N}}(t)}{3} + Fo_2 \cdot \tau_{\text{W}}(t) - \tau_{\text{N}}(t) \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^3 \frac{e^{-n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo_2 \cdot t}}{n^2}$$
(2.128)

Коэффициент распределения тепловых потоков (2.103)

$$\alpha_{\text{тп}}(t) := \frac{1}{1 + \frac{\psi_{V_2} \cdot b_2 \cdot \lambda_1 \cdot \theta_2(t)}{\psi_{V_1} \cdot b_1 \cdot \lambda_2 \cdot \theta_1(t)}} \quad (2.129)$$

Определим среднюю установившуюся объёмную температуру по Г. А. Г. Фазекасу, как результат поглощения всем объёмом колеса и тормозной колодки полного тепла трения, °С

$$\Theta_{V_1} := \frac{W_{\text{тп}}}{m_{\text{э1}} \cdot c_1} = 38.4 \quad \Theta_{V_2} := \frac{W_{\text{тп}}}{m_{\text{э2}} \cdot c_2} = 1860.4$$

Объёмная температура, вычисленная с учётом коэффициента распределения тепловых потоков, °С

$$\Theta_{V_1}(t) := \Theta_{V_1} \cdot \frac{(1 - \alpha_{\text{тп}}(t)) \cdot \psi_{V_1}}{t_T} \quad \Theta_{V_2}(t) := \Theta_{V_2} \cdot \frac{\alpha_{\text{тп}}(t) \cdot \psi_{V_2}}{t_T} \quad (2.130)$$

Результаты вычислений объёмных температур колеса и тормозной колодки приведены в табл. 2.13 и представлены графически на рис. 2.28.

Табл. 2.13 – Результаты вычислений объёмных и поверхностных температур

$\tau$	$\tau_N(\tau)$	$\tau_W(\tau)$	$\theta_1(\tau)$	$\Theta_{V_1}(\tau)$	$\Theta_1^*(\tau)$	$\theta_2(\tau)$	$\Theta_{V_2}(\tau)$	$\Theta_2^*(\tau)$
0	0	0	-1,47	1,54	0	-2,95	4,55	0
0,025	0,799	0,014	-1,2	1,52	5,17	-2,68	5,99	30,23
0,05	1,042	0,037	-1,1	1,51	9,34	-2,59	6,15	54,58
0,1	1,297	0,096	-0,98	1,51	16,23	-2,49	6,17	94,83
0,2	1,483	0,238	-0,82	1,51	26,09	-2,38	6,16	152,45
0,3	1,486	0,387	-0,72	1,51	32,45	-2,33	6,19	189,64
0,4	1,395	0,532	-0,66	1,51	36,4	-2,31	6,26	212,68
0,5	1,243	0,664	-0,62	1,51	38,53	-2,32	6,39	225,12
0,6	1,048	0,779	-0,61	1,51	39,18	-2,34	6,59	228,93
0,7	0,82	0,873	-0,62	1,5	38,53	-2,39	6,85	225,14
0,8	0,567	0,942	-0,66	1,49	36,67	-2,45	7,22	214,26
0,9	0,292	0,985	-0,72	1,48	33,63	-2,53	7,75	196,49
0,95	0,148	0,996	-0,77	1,48	31,66	-2,57	8,11	185,01
0,975	0,075	0,999	-0,79	1,47	30,57	-2,59	8,33	178,61
1	0	1	-0,81	1,47	29,4	-2,62	8,59	171,77

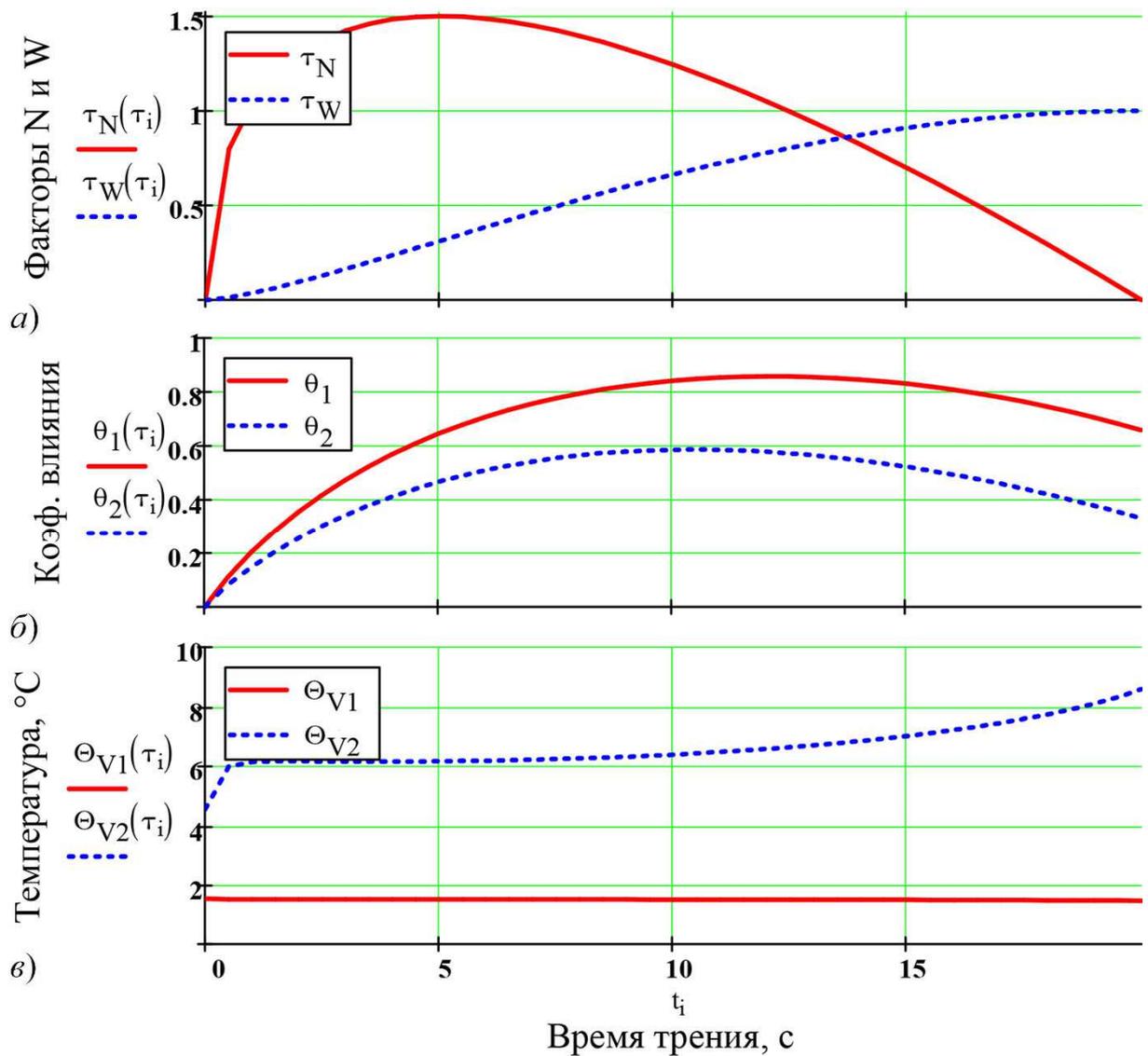


Рис. 2.28 – Результаты вычислений: *а* – временные факторы мощности и работы трения; *б* – коэффициенты связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами тел; *в* – объёмные температуры

**13)** Для нахождения поверхностных температур колеса и рельса преобразуем выражение (2.120), введя в него коэффициент распределения тепловых потоков (2.103). Получим

$$\Theta_1^* = \frac{W_{\text{тп}}}{A_{\text{к1}} t_{\text{т}} \left( \frac{\lambda_1}{b_1 \psi_{V_1} \theta_1} + \frac{\lambda_2}{b_2 \psi_{V_2} \theta_2} \right)} = \frac{839882}{0,319 \cdot 20 \cdot \left( \frac{43}{0,019 \cdot 0,843 \cdot \theta_1} + \frac{0,651}{0,0047 \cdot 1 \cdot \theta_2} \right)} =$$

$$= \frac{131825,9}{\frac{2685,3}{\theta_1} + \frac{138}{\theta_2}} = \frac{4,39 \cdot 10^6 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2}{460 \cdot \theta_1 + 8951 \cdot \theta_2};$$

$$\Theta_2^* = \frac{\Theta_1^*}{K_{\text{в3}}},$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – временные функции распределения тепловых потоков (2.128).

Фрагмент программы, написанной в программе MathCAD, имеет следующий вид

$$\Theta_{\text{п1}}(t) := \frac{W_{\text{тп}}}{A_{\text{к1}} \cdot t_{\text{т}} \cdot \left( \frac{\lambda_1}{b_1 \cdot \psi_{\text{v1}} \cdot \theta_1(t)} + \frac{\lambda_2}{b_2 \cdot \psi_{\text{v2}} \cdot \theta_2(t)} \right)} \quad \Theta_{\text{п2}}(t) := \frac{\Theta_{\text{п1}}(t)}{K_{\text{вз}}}$$

Расчётные величины показаны на рис. 2.29 и сведены в табл. 2.13.

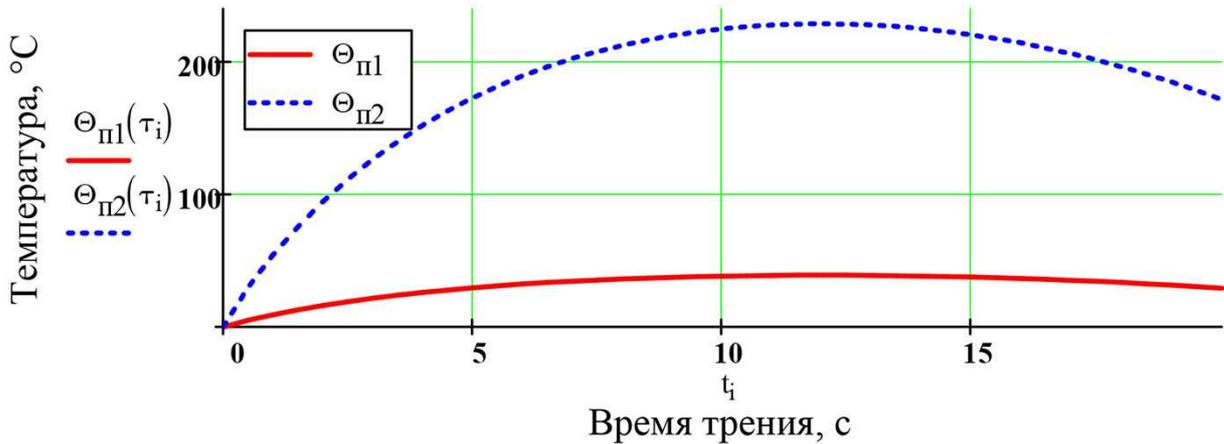


Рис. 2.29 – Результаты вычислений поверхностных температур колеса и тормозной колодки

Как видно из таблицы, средняя температура поверхности трения колодок на основе полимеров ТИИР-300 значительно превышает среднюю температуру поверхности трения бандажа, что является следствием влияния коэффициента взаимного перекрытия, а также наличия конвективного охлаждения поверхности колеса. Это полностью согласуется с экспериментальными данными.

**14)** Предположим, что известно значение контурной площади касания  $A_c$  (2.81). Расчёт температуры вспышки на микронеровности стального колеса и полимерной колодки реализуем в программе MathCAD, вычислив соотношение между температурой вспышки и объёмной температурой для максимальной скорости относительного скольжения (2.124).

$$\theta_{\text{всп1}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v_{\text{сmax}}}} \sqrt[4]{\frac{8 \cdot r_1 \cdot R_{\text{max1}}}{v_1 \cdot (b_{\text{p1}} \cdot A_c)^{v_1}} \left( \frac{\text{HB}_2}{N} \right)^{\frac{4v_1-1}{4v_1}} \frac{\sqrt{a_1} \cdot A_{\text{к1}} \cdot t_{\text{т}}}{F_{\text{o1}} \cdot b_1 \cdot \psi_{\text{v1}}} = 29.92$$

$$\theta_{\text{всп2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot v_{\text{сmax}}}} \sqrt[4]{\frac{8 \cdot r_2 \cdot R_{\text{max2}}}{v_2 \cdot (b_{\text{p2}} \cdot A_c)^{v_2}} \left( \frac{\text{HB}_2}{N} \right)^{\frac{4v_2-1}{4v_2}} \frac{\sqrt{a_2} \cdot A_{\text{к2}} \cdot t_{\text{т}}}{F_{\text{o2}} \cdot b_2 \cdot \psi_{\text{v2}}} = 4.11$$

Температура вспышки (2.123), выраженная через объёмную температуру

$$\Theta_{\text{всп1}}(t) := 0 \quad \text{on error} \frac{\theta_{\text{всп1}}}{\sqrt{1-t}} \cdot \Theta_{V1}(t) \cdot \tau_N(t)$$

$$\Theta_{\text{всп2}}(t) := 0 \quad \text{on error} \frac{\theta_{\text{всп2}}}{\sqrt{1-t}} \cdot \Theta_{V2}(t) \cdot \tau_N(t)$$
(2.131)

где  $\Theta_{V1}, \Theta_{V2}$  – значения объёмных температур (2.130);

$\sqrt{1-\tau}$  – множитель, учитывающий снижение скорости скольжения;

$\tau_N$  – временной фактор мощности трения.

Примем, что давление тормозных колодок на колёса и коэффициент трения постоянны. В этом случае изменяемую в процессе трения скорость скольжения (2.97) можно определить как

$$v_c(t) := v_{c \max} \cdot (1-t)$$

В соответствии с этой формулой расчёты в MathCAD сведены в табл. 2.14, в которой соотношение между температурой вспышки и объёмной температурой  $\theta_{\text{всп}}$  и температуры вспышки даются в функции текущего времени процесса торможения.

Табл. 2.14 – Результаты вычислений соотношения (2.124) и температур вспышки (2.123)

$\tau$	$v_{c \max} (1-\tau)$	$\frac{\theta_{\text{всп1}}}{\sqrt{1-\tau}} \tau_N(\tau)$	$\Theta_{\text{всп1}}(\tau)$	$\frac{\theta_{\text{всп2}}}{\sqrt{1-\tau}} \tau_N(\tau)$	$\Theta_{\text{всп2}}(\tau)$
0	14,72	0	0	0	0
0,025	14,35	24,204	36,67	3,324	19,91
0,05	13,99	31,98	48,36	4,392	27,01
0,1	13,25	40,92	61,87	5,62	34,66
0,2	11,78	49,62	75,04	6,815	41,98
0,3	10,3	53,16	80,36	7,3	45,17
0,4	8,83	53,881	81,38	7,399	46,34
0,5	7,36	52,587	79,3	7,222	46,17
0,6	5,89	49,565	74,58	6,807	44,83
0,7	4,42	44,797	67,2	6,152	42,16
0,8	2,94	37,91	56,63	5,206	37,59
0,9	1,47	27,641	41,03	3,796	29,41
0,95	0,74	19,816	29,29	2,721	22,07
0,975	0,37	14,104	20,79	1,937	16,14
1	0	0	0	0	0

Для оценки погрешности в расчёте теплофизического множителя  $\alpha_{\text{тп}}$  произведём его подсчёт не по формуле (2.103), а по формулам (2.98) для числа  $Pe < 0,4$ ; (2.102) –  $Pe < 20$  и (2.104), выражение (б) – в остальных случаях. Чтобы определить числа Пекле, нам сперва необходимо определить значения статического пятна фактического касания для пластического контакта (2.115), м

$$d_{r1} := \sqrt{\frac{8 \cdot r_1 \cdot R_{\max 1}}{v_1} \cdot \left( \frac{N}{A_{k1} \cdot b_{p1} \cdot HB_2} \right)^{\frac{1}{v_1}}} = 5.08 \times 10^{-6}$$

$$d_{r2} := \sqrt{\frac{8 \cdot r_2 \cdot R_{\max 2}}{v_2} \cdot \left( \frac{N}{A_{k2} \cdot b_{p2} \cdot HB_2} \right)^{\frac{1}{v_2}}} = 3.53 \times 10^{-6}$$

Числа Пекле (2.96), как функции времени трения и скорости:

$$Pe_1(t) := \frac{v_c(t) \cdot d_{r2}}{a_1} \qquad Pe_2(t) := \frac{v_c(t) \cdot d_{r1}}{a_2}$$

Принимаем поверхность колеса жёсткой и шероховатой, а тормозной колодки – гладкой и деформируемой, а движущейся неровностью считаем неровность поверхности трения колодки. В этом случае коэффициент распределения тепловых потоков для колеса вычислим – при числах Пекле  $Pe < 0,4$  по формуле (2.98) Ф. Шаррона

$$\alpha_1 := \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot c_1 \cdot \lambda_1}{\rho_2 \cdot c_2 \cdot \lambda_2}}} = 0.079$$

– при числах Пекле  $Pe < 20$  по формуле (2.102) А.В. Чичинадзе и А.Г. Гинзбурга

$$A := \sqrt{\frac{1}{9} + Fo_1^2} = 0.739$$

$$\alpha_2 := \frac{1}{1 + \frac{\psi_{v2} \cdot b_2 \cdot \lambda_1}{\psi_{v1} \cdot b_1 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{Fo_2}{Fo_1} - \frac{Fo_1 - Fo_2}{3 \cdot Fo_1^2 \cdot A} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \ln \left[ \frac{\left( \frac{1}{3} - A \right) \cdot \left( \frac{1}{3} - Fo_1 + A \right)}{\left( \frac{1}{3} + A \right) \cdot \left( \frac{1}{3} - Fo_1 - A \right)} \right] \dots \right] + - A \cdot \ln \left( \frac{3}{2} \cdot Fo_1 \right)} = 0.067$$

– при числах Пекле  $Pe \geq 20$  по формуле (2.104) Д.К. Иегера и Н. Блока, в которой считаем первым элементом тормозную колодку, а вторым – колёсную сталь

$$\alpha_3(t) := \frac{4\lambda_1}{4\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{\pi \cdot Pe_2(t)}}$$

В результате получим расчётные выражения для определения коэффициентов распределения тепловых потоков для колеса (табл. 2.15)

$$\alpha'_{\text{тп1}}(t) := \text{if} \left( Pe_2(t) < 0.4, 1 - \alpha_1, \text{if} \left( Pe_2(t) < 20, 1 - \alpha_2, \alpha_3(t) \right) \right)$$

$$\alpha'_{\text{тп2}}(t) := \frac{4\lambda_2}{4\lambda_2 + \lambda_1\sqrt{\pi \cdot Pe_1(t)}}$$

Табл. 2.15 – Результаты вычислений числа Пекле  $Pe_2$ , коэффициентов теплопроводности  $\lambda_1$  и распределения тепловых потоков  $\alpha'_{\text{тп1}}$ , скорректированной  $\Theta'_{\text{всп1}}$  и ранее определённой  $\Theta_{\text{всп1}}$  температуры вспышки колеса

$\tau$	$v_{c \max}(1 - \tau)$	$Pe_2$	$\lambda_1 = \frac{4\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{\pi \cdot Pe_2}}{4}$	$\alpha'_{\text{тп1}}$	$\Theta'_{\text{всп1}}$	$\Theta_{\text{всп1}}$
0	14,72	201,7	47,1	0,913	0	0
0,025	14,35	196,65	47,04	0,914	35,83	36,67
0,05	13,99	191,61	46,99	0,915	47,39	48,36
0,1	13,25	181,53	46,89	0,917	60,77	61,87
0,2	11,78	161,36	46,66	0,921	74,05	75,04
0,3	10,3	141,19	46,43	0,926	79,73	80,36
0,4	8,83	121,02	46,17	0,931	81,26	81,38
0,5	7,36	100,85	45,9	0,937	79,78	79,3
0,6	5,89	80,68	45,59	0,943	75,7	74,58
0,7	4,42	60,51	45,24	0,95	68,94	67,2
0,8	2,94	40,34	44,83	0,959	58,88	56,63
0,9	1,47	20,17	44,3	0,971	43,45	41,03
0,95	0,74	10,09	43,92	0,933	29,95	29,29
0,975	0,37	5,04	43,65	0,933	21,32	20,79
1	0	0	43	0,921	0	0

Для тормозной колодки считаем, что контакт образуется не за счёт внедрения неровности стальной поверхности, а за счёт расплющивания неровностей полимера ТИИР-300 о стальную поверхность. При этом длительность трения единичного контакта  $t_{\text{всп}}$  определяется в соответствии с геометрией неровности стального колеса и полимерной колодки (табл. 2.16).

Табл. 2.16 – Результаты вычислений числа Пекле  $Pe_1$ , коэффициентов теплопроводности  $\lambda_2$  и распределения тепловых потоков  $\alpha'_{\text{тп2}}$ , скорректированной  $\Theta'_{\text{всп2}}$  и ранее определённой  $\Theta_{\text{всп2}}$  температуры вспышки тормозной колодки

$\tau$	$v_{c \max}(1 - \tau)$	$Pe_1$	$\lambda_2 = \frac{4\lambda_2 + \lambda_1\sqrt{\pi \cdot Pe_1}}{4}$	$\alpha'_{\text{тп2}}$	$\Theta'_{\text{всп2}}$	$\Theta_{\text{всп2}}$
1	2	3	4	5	6	7
0	14,72	4,37	40,47	0,0161	0	0
0,025	14,35	4,26	39,97	0,0163	5,04	19,91
0,05	13,99	4,15	39,46	0,0165	6,74	27,01
0,1	13,25	3,93	38,42	0,0169	8,86	34,66

1	2	3	4	5	6	7
0,2	11,78	3,49	36,27	0,0179	11,38	41,98
0,3	10,3	3,06	33,97	0,0192	13,01	45,17
0,4	8,83	2,62	31,5	0,0207	14,23	46,34
0,5	7,36	2,18	28,81	0,0226	15,18	46,17
0,6	5,89	1,75	25,84	0,0252	15,95	44,83
0,7	4,42	1,31	22,46	0,029	16,58	42,16
0,8	2,94	0,87	18,46	0,0353	17,08	37,59
0,9	1,47	0,44	13,24	0,0492	17,36	29,41
0,95	0,74	0,22	9,56	0,0681	17,25	22,07
0,975	0,37	0,11	6,95	0,0937	16,88	16,14
1	0	0	0,651	1	0	0

Скорректированные значения температуры вспышки (2.131):

$$\Theta'_{\text{всп1}}(t) := 0 \quad \text{on error} \quad \frac{\theta_{\text{всп1}}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{\alpha'_{\text{тп1}}(t)}{1-\alpha_{\text{тп}}(t)} \cdot \Theta_{\text{в1}}(t) \cdot \tau_{\text{N}}(t)$$

$$\Theta'_{\text{всп2}}(t) := 0 \quad \text{on error} \quad \frac{\theta_{\text{всп2}}}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{\alpha'_{\text{тп2}}(t)}{\alpha_{\text{тп}}(t)} \cdot \Theta_{\text{в2}}(t) \cdot \tau_{\text{N}}(t)$$

На рис. 2.30 приведены результаты вычислений температур вспышки  $\Theta_{\text{всп}}$  и максимальных температур  $\Theta_{\text{max}}$  (2.118).

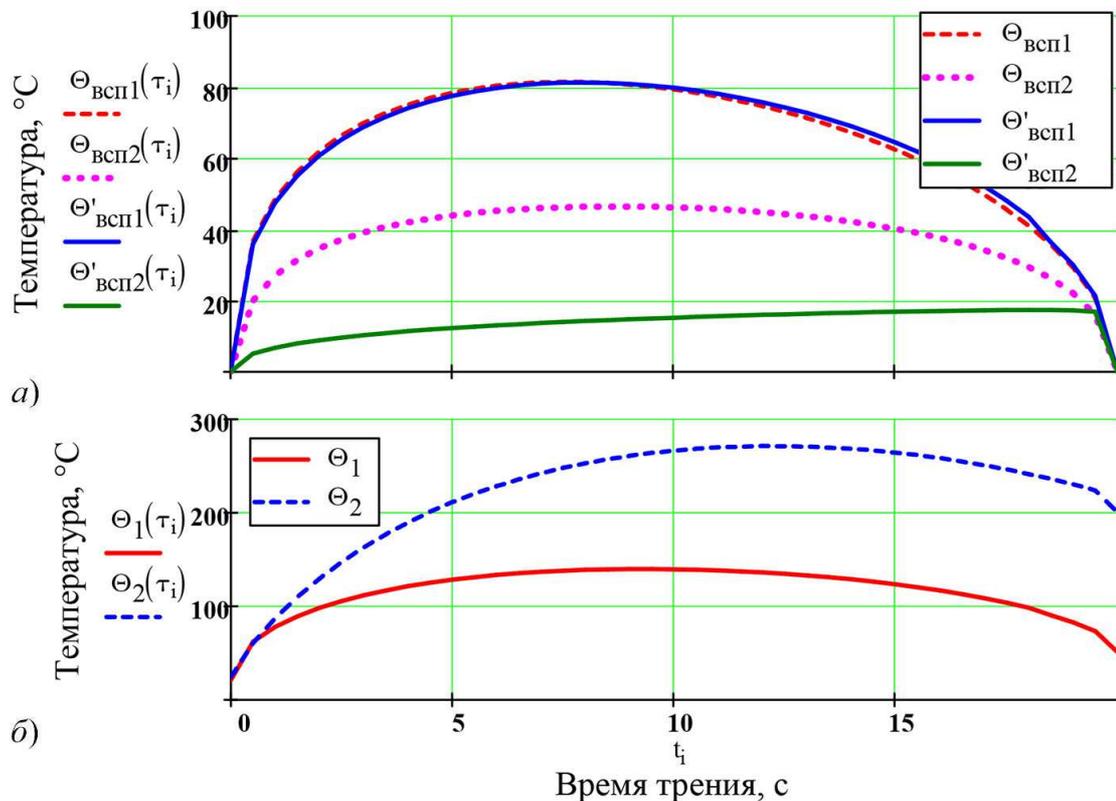


Рис. 2.30 – Температуры вспышки (а) и максимальные температуры (б) колеса 1 и тормозной колодки 2 при торможении тягового вагона метрополитена до полной остановки

Как видно из рис. 2.30,*a*, температуры вспышки, подсчитанные при условиях, что движущейся неровностью является или стальное колесо, или выступ полимерной колодки, являются достаточно близкими. Кроме того, даже при весьма больших значениях чисел Пекле  $Pe_{1,2}$  эти температуры являются ограниченными (того же порядка, что и средняя температура поверхности трения колеса).

Из табл. 2.15 и 2.16 видно, что число Пекле определяет роль конвективного переноса в уравнении теплопроводности: если  $Pe_i \ll 1$ , то конвективный перенос пренебрежимо мал; если, наоборот,  $Pe_i \gg 1$ , то конвективный перенос является определяющим и можно пренебречь обычной теплопроводностью, а если  $Pe_i \approx 1$ , то оба фактора (и конвективный перенос, и обычная теплопроводность) играют примерно одинаковую роль.

Следует указать, что в первом случае, когда движется неровность стального колеса, достигается установившаяся температура вспышки, так как параметр  $n$ , показывающий, сколько диаметров составляет путь трения единичного пятна контакта, удовлетворяет неравенству

$$n_{1\text{ст}} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{25}{2} \cdot \frac{3,7 \cdot 10^{-7}}{1,2 \cdot 10^{-5}} = 0,39,$$

то есть установившийся режим достигается на пути трения пятна контакта, меньше радиуса пятна ( $l_{\text{тр}1} = 0,39 \cdot d_{r1}$ ).

Когда рассматривается движение неровности полимерной колодки, то в этом случае

$$n_{1\text{кол}} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{3,7 \cdot 10^{-7}} = 401,42.$$

По мнению А.В. Чичинадзе, такой путь трения ( $l_{\text{тр}2} = 401,42 \cdot d_{r2}$ ), равный 1,42 мм, едва ли может быть достигнут как из-за дискретности контактирования и достаточной близости параметров шероховатости поверхности  $r_{1,2}$  и  $R_{\text{max}1,2}$  для стали и ТИИР-300, так и из-за усталостного разрушения выступа поверхности трения полимерной колодки.

Таким образом, было показано, что термодинамика фрикционного взаимодействия в основном определяется положительным температурным градиентом по нормали к поверхности трения  $\partial\Theta / \partial z$ , то есть отношением разности температур  $\Theta^*$  и  $\Theta_V$  к координате по нормали  $z$ . При температуре 100–200 °С вследствие дискретного характера фрикционного контакта доля пластичного контакта в общем напряжённо-деформационном состоянии поверхности возрастает и вследствие возрастания фактической площади касания  $A_r$  контактное давление  $Q_r$  уменьшается. Это позволяет говорить о весьма интенсивном температурном градиенте активного микрообъёма. Продолжительность температурного пика и периода перехода от нагревания к охлаждению и наоборот составляет 0,1...1,0 мс. Это позволяет температурные пики характеризовать как параметры, имеющие частоту и амплитуду.

Также следует отметить, что эмпирические формулы, приведённые ранее, определены экспериментально и на основе статистических исследований характеризуют усреднённые величины значений контурной  $A_c$  и фактической  $A_r$  площади касания, контурного  $Q_c = N / A_c$  и фактического  $Q_r = N / A_r$  давления. В связи с этим далее будет предложена методика термодинамики фрикционного взаимодействия (2.135), позволяющая оценивать максимально возможные величины температур  $\Theta_{\max}$  (2.118) в реальном времени при выполнении трибосистемой своих функциональных задач.

#### ***2.4 Разрешение противоречий, возникающих при составлении физической модели фрикционного контакта***

В основе адекватности разрабатываемой модели фрикционного контакта лежат принципы решения контактных задач поверхностей сцепления, рассмотрение вопросов разрыва фрикционных связей, влияния краевых эффектов на процессы сцепления и так далее. В этом случае имеет значение не только величина фактической площади контакта, но и точная модель пятна контакта. Для этого требуется решение ряда противоречий.

Во-первых, идентичность модуля упругости  $E$  и физико-механических характеристик материалов фрикционных систем модели и объекта исследования рассмотрим на примере схемы нагружения указанного ранее активного микрообъёма материала поверхности трения. Если активный микрообъём (рис. 2.12,б) представить в виде жёстко закреплённой консоли, то согласно критерию подобия упругих сил (2.50) под действием внешней силы  $P$  консоль длиной  $l$  деформируется на величину, равную

$$A = \frac{P}{C} = \frac{3EI_x}{Cl^3}, \quad (2.132)$$

где  $A$  – значение наибольшего прогиба, м;  $P$  – сосредоточенная сила, Н;  $C$  – жёсткость, Н/м;  $E$  – модуль упругости, Па;  $I_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x$ , м<sup>4</sup>.

Условием обеспечения характерного вида и интенсивности изнашивания контактирующих тел, модуля упругости  $E$  и физико-механических характеристик материалов фрикционных систем модели и объекта исследования примем идентичность амплитуд деформации фрикционных связей, т.е.  $C_A = A_o / A_m = 1$ . В данном случае выражение (2.132) представим как индикатор подобия модели и объекта  $EI_x / Cl^3$ , или в масштабах подобия

$$\frac{C_E C_I}{C_C C_l^3} = 1. \quad (2.133)$$

Так как константы подобия модуля упругости  $C_E = 1$  и осевого момента инерции поперечного сечения  $C_I = C_l^4$ , то из (2.133) следует

$$\frac{1 \cdot C_l^4}{C_C C_l^3} = \frac{C_l}{C_C} = 1,$$

откуда масштаб подобия жёсткости активного микрообъёма  $C_C = C_l$ . Необходимо отметить, что данное условие является безусловным, так как жёсткость зависит только от линейной деформации связи натурны и модели.

Из ранее принятых ранее условий динамического подобия  $C_F = C_m$  (2.58) и  $C_C = C_m$  (2.47) следует, что  $C_F = C_C = C_l$ .

Во-вторых, микрогеометрия контактирующих тел в зоне их фактической площади касания определяется контактным давлением  $Q$ , следовательно, обязательным условием обеспечения характерного вида и интенсивности изнашивания контактирующих тел, реализации равных сил сцепления в контакте «колесо – рельс» натурного образца и его модели является равенство масштаба подобия контактного давления  $C_Q = C_N/C_{Aa} = 1$ . Для этого необходимо обеспечить равенство масштабов подобия нагрузки и площади фактического касания  $C_N = C_{Aa}$ . С учётом того, что  $C_{Aa} = C_l^2$ , имеем следующее соотношение масштабов подобия  $C_N = C_F = C_{Aa} = C_l^2$ . При изготовлении модельной фрикционной системы из тех же материалов, что и натурный объект, данное условие обеспечивает также подобие нормальных ( $C_\sigma = 1$ ) и тангенциальных ( $C_\tau = 1$ ) напряжений материала поверхности трения, а также модуля упругости ( $C_E = 1$ ).

В-третьих, особенностью работы системы «подвижной состав – путь» является то, что она относится к системам, совершающих колебания в поле сил тяготения и, соответственно, возникают противоречия, связанные с моделированием сил тяжести  $F = mg$ , так как в реальных условиях масштаб подобия ускорения свободного падения  $C_g = 1$ . В этом случае масштабы подобия силы и массы равны, т.е.  $C_F = C_m$  (2.58). Масса является функцией плотности материала  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] и объёма  $V$  [м<sup>3</sup>] (табл. 1.3), или в константах подобия  $C_m = C_\rho \cdot C_l^3$ . Использование в модельных экспериментах того же материала, что и в натуральных условиях, определяет константу подобия плотности материала  $C_\rho = 1$ . В данном случае  $C_m = C_l^3$  и, следовательно, константа подобия силы  $C_F = C_m = C_l^3$ .

Таким образом, принимая масштаб моделирования геометрических размеров  $C_b$ , тем самым определяем масштабы подобия силы и массы  $C_F = C_m = C_l^3$ , нагрузки и площади касания  $C_F = C_{Aa} = C_l^2$ , а также силы и жёсткости связей  $C_F = C_C = C_l$ . Анализируя каждое из возможных значений  $C_F$ , можно констатировать, что выбор масштаба силы является следствием *выдвигаемых исследователем условий*, а именно:

– условием динамического подобия механической системы подвижного состава, когда требуется обеспечить динамическую совместимость процессов, протекающих в механической системе;

– условий, когда, кроме динамического подобия механической подсистемы, необходима модель контакта колеса с рельсом с упором на решение контактных задач, рассмотрения вопросов разрыва фрикционных связей, моделирования процессов вертикального и бокового износа.

Разрешение этих противоречий состоит в реализации на поверхностях натуральных колёс и рельсов, и их модели адекватных условий сцепления, то есть пункта 2 – равенства масштабов подобия нагрузки, силы и площади фактического касания поверхностей трения в контактной области

$$\begin{aligned}
 C_{\omega} &= C_n = C_t = C_T = C_h = C_r = C_{Ra} = C_A = C_{Vc} = C_Q = C_f = C_{Lmp} = 1; \\
 C_v &= C_l; \\
 C_{Aa} &= C_F = C_N = C_m = C_C = C_{\beta} = C_l^2; \\
 C_M &= C_F C_l = C_l^3; \\
 C_J &= C_F C_l^2 = C_l^4,
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

где *масштабы подобия*:  $C_{\omega}$  – частот собственных колебаний;  $C_n$  – коэффициента затухания;  $C_t$  – времени испытаний;  $C_T$  – периода колебаний, периода релаксации (восстановления) фрикционных связей;  $C_h$  – высоты шероховатости поверхности;  $C_r$  – радиусов закругления шероховатости поверхности;  $C_{Ra}$  – шероховатости поверхности по Роквеллу;  $C_A$  – амплитуды деформации фрикционных связей;  $C_{Vc}$  – скорости относительного скольжения поверхностей трения;  $C_Q$  – контактного давления;  $C_f$  – коэффициента трения;  $C_{Lmp}$  – пути трения;  $C_V$  – скорости качения;  $C_l$  – геометрического масштаба;  $C_S$  – фактической площади касания;  $C_F$  – силы трения;  $C_N$  – нормальной нагрузки;  $C_m$  – массы;  $C_C$  – коэффициентов упругости связей;  $C_{\beta}$  – коэффициентов демпфирования, сопротивления движению;  $C_M$  – моментов силы трения;  $C_J$  – моментов инерции.

В этом случае критерии подобия

$$\text{– контактного давления, } C_Q = \frac{C_F}{C_S} = \frac{C_m C_g}{C_S} = \frac{C_l^2 \cdot 1}{C_l^2} = 1$$

$$C_Q = \frac{C_F}{C_S} = \frac{C_m C_a}{C_S} = \frac{C_m \frac{C_A}{C_t^2}}{C_S} = \frac{C_l^2 \frac{1}{1^2}}{C_l^2} = 1,$$

$$\text{– скорости относительного скольжения (2.57), } C_{Vc} = \frac{C_A}{C_T} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{– сил упругости, закона Гука (2.50), } \frac{C_C C_A}{C_F} = \frac{C_l^2 \cdot 1}{C_l^2} = 1,$$

$$\text{– сил сопротивления (2.49), } \frac{C_{\beta} C_A}{C_F C_t} = \frac{C_l^2 \cdot 1}{C_l^2 \cdot 1} = 1,$$

$$\text{– сил инерции (2.48), } \frac{C_m C_A}{C_t^2 C_F} = \frac{C_l^2 \cdot 1}{1^2 \cdot C_l^2} = 1,$$

или (2.58)

$$\frac{C_F C_t}{C_m C_{Vc}} = \frac{C_l^2 \cdot 1}{C_l^2 \cdot 1} = 1$$

не противоречат критериям подобия, выведенным при динамическом подобии механической системы, а также не нарушают условий моделирования модели и её натурального образца.

Основное противоречие моделирования фрикционного контакта разрешено *равенством константы подобия нагрузки квадрату геометрических характеристик при всех условиях определения произведений: жёсткости фрикционной связи на деформацию, давления на площадь фактической площади касания и массы на ускорение свободного падения.*

*Моделирование фрикционного контакта на уровне взаимодействия активных микрообъёмов поверхностей трения не выполняется*, так как необходимые условия реализации процессов трения в модели определяются идентичностью с натурными используемых материалов, шероховатостью, скоростей скольжения, контактного давления, условиями модифицирования поверхностей трения и динамических характеристик фрикционных и механических подсистем. Указанные условия обеспечивают идентичность триботехнических характеристик фрикционного взаимодействия (интенсивности изнашивания, коэффициента трения и т.п.), их амплитудно-фазочастотных и термодинамических («температуры вспышки» и градиента температуры) характеристик.

### ***2.5 Физическое подобие модели фрикционного контакта (на примере подсистемы «колесо – рельс»)***

С целью улучшения динамических характеристик системы «подвижной состав – путь» в криволинейных участках пути малого радиуса рассмотрим физическое подобие фрикционных подсистем для решения *задачи оптимизации ширины рельсовой колеи при минимизации потерь тяговой мощности локомотива.*

При движении по прямой подвижного состава на величины сил тяги и сил сопротивления наибольшее влияние оказывает вертикальная и продольная динамика, тогда как при движении в кривом участке пути – горизонтальная, поперечная и в меньшей степени вертикальная.

Для исследования *влияния общей динамики подвижного состава* (колебаний подпрыгивания, галопирования, виляния, боковой качки) на работоспособность фрикционных систем «колесо – рельс» и оптимизации ширины рельсовой колеи разработаем физическую модель подсистемы «колесо – рельс», определим основные факторы, влияющие на её работоспособность, и создадим критерий физического подобия подсистемы с минимальным количеством факторов. Данный критерий позволит в последующем нам с применением математического планирования эксперимента получить математическую модель подсистемы «колесо – рельс» и устано-

вить рациональные соотношения физических параметров для решения поставленных перед нами задач.

Рассмотрим модель фрикционного контакта «колесо – рельс». Фрикционный контакт «колесо – рельс» является составной частью системы «подвижной состав – тяговый привод – путь». Масса колеса  $m_1$  и приведённая к точке контакта масса рельса  $m_2$  являются составными частями механической системы (рис. 2.31,а). Компонентами поверхностей контакта (рис. 2.31,б) являются микронеровности, характеризуемые массами активного микрообъёма  $m_i$  и жёсткостью их заделки  $C_i$ .

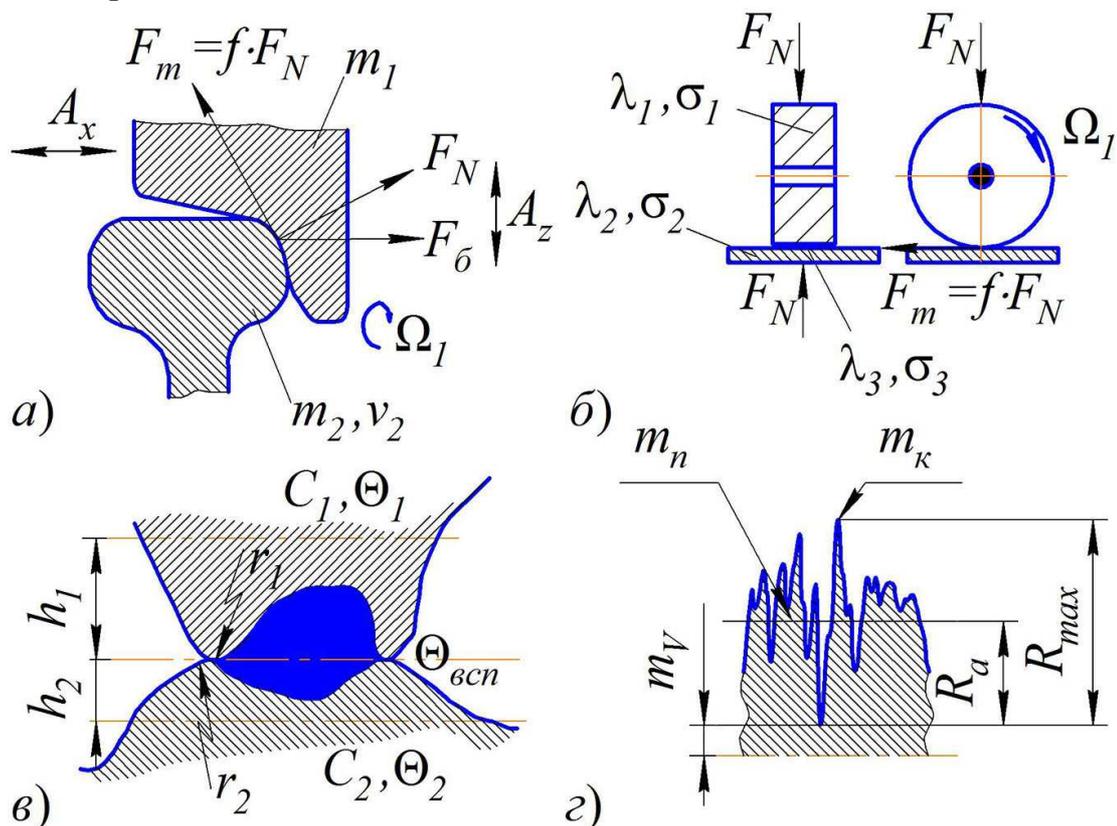


Рис. 2.31 – Модельное представление мобильной фрикционной системы «колесо – рельс»: а – модель натурального объекта; б – его физическая модель в геометрическом масштабе  $C_i$ ; в – модель контактного взаимодействия поверхностей; г – модель микрогеометрии;  $F_N$  – нагрузка, Н;  $F_m$  – сила трения, Н;  $f$  – коэффициент трения;  $m_1$  – масса колеса, кг;  $m_2$  – приведённая масса рельса, кг;  $v_2$  – поступательная скорость движения, м/с;  $\Omega_1$  – угловая скорость вращения колеса, мин<sup>-1</sup>;  $\sigma$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/м<sup>2</sup>К;  $\lambda$  – теплопроводность, Вт/мК;  $h$  – высота микронеровности, мкм;  $r$  – радиус микронеровности, мкм;  $\Theta$  – температура (2.120), К;  $\Theta_{всп}$  – максимальная температура (2.122), реализуемая на наибольшей высоте профиля  $R_{max}$ , К;  $m_v$  – объёмная масса, кг;  $m_n$  – поверхностная масса, кг;  $m_k$  – масса контактирующих микронеровностей поверхности, кг;  $R_a$  – среднее арифметическое отклонение профиля (2.62), мкм;  $R_{max}$  – наибольшая высота профиля (2.64), мкм;  $A_x$  и  $A_z$  – макро- и микроперемещения колеса относительно рельса, мкм

В результате фрикционного взаимодействия двух поверхностей трения изменяются величины амплитуд сближения в нормальном  $A_z$  и тангенциальном  $A_x$  направлениях, что вызывает в точках соприкосновения активных микрообъёмов двух поверхностей силы трения  $F_m$ . Кинетическая энергия системы, расходуемая на преодоление сил трения, преобразуется в тепловую. В точках фактической площади касания реализуется максимальная температура «вспышки»  $\Theta_{всп}$  (2.122), пропорциональная величинам как фактической площади касания  $A_f$  (2.125), так и скорости скольжения  $v_c$  (2.97).

В настоящее время для повышения надёжности механических и фрикционных подсистем, а также безопасности эксплуатации транспортных систем внедряются системы активной безопасности. Их принцип действия основан на реализации задач мониторинга, то есть непрерывном наблюдении за состоянием объекта. В рамках триботехники под мониторингом будем понимать диагностику трибоконтакта путём оценки его состояния за счёт обработки информации от наблюдаемых значений температуры, амплитуд виброперемещений, виброускорений и так далее.

С целью возможности реализации задач мониторинга термодинамики фрикционного взаимодействия в отличие от тепловой модели А.В. Чичинадзе (2.118) используем гипотезу, что *максимальная объёмная температура  $\Theta_{max}$  контактирующих поверхностей определяется при стремлении к нулю градиентов линейных размеров контактирующих к нормали поверхностей трения – z.*

В соответствии с выдвинутой гипотезой объёмная температура изменяется от  $\Theta_{max}$  (при сближении контактирующих поверхностей  $z \rightarrow 0$ ) до  $\Theta_{окр}$  (температуры окружающей среды) по закону *логарифмического декремента затухания*. Количество асимптот зависит от геометрических, теплофизических и других характеристик контактирующих тел. В первом приближении их может быть три (рис. 2.32). Должны выполняться условия равенства произведений масс эффективных микрообъёмов  $m$  (2.93), участвующих в теплопередаче, на показатель асимптоты  $\alpha$  зависимости объёмной температуры  $\Theta_i$  от  $z$

$$m_k \alpha_1 = m_n \alpha_2 = m_V \alpha_3 \quad \text{при} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Theta = \Theta_{max}, \quad (2.135)$$

а так называемая «температура вспышки»  $\Theta_{всп}$  является максимальным значением объёмной температуры  $\Theta_{max}$  при фрикционном взаимодействии твёрдых тел. Максимальное значение объёмной температуры пропорциональна массе активных микрообъёмов  $m_k$ , либо поверхностной массе материала  $m_n$ , заключённого между выступами и впадинами активных микрообъёмов, либо массе основного материала  $m_V$ , участвующего в теплопередаче соприкасающихся поверхностей (рис. 2.32). Максимальную контактную температуру  $\Theta_{всп}$  определим тремя областями состояния:

- **I (А – Б)** асимптотического снижения объёмных температур от максимальных значений на вершинах активных микрообъёмов («температуры

- вспышки») до максимальных значений температуры на поверхности трения;
- **II (Б - В)** асимптотического снижения объёмных температур от максимальных значений на поверхности контакта до максимальных температур в сплошном объёме материала;
  - **III (В - Г)** асимптотического снижения объёмных температур от максимальных температур в сплошном объёме материала до значений температуры окружающей среды.

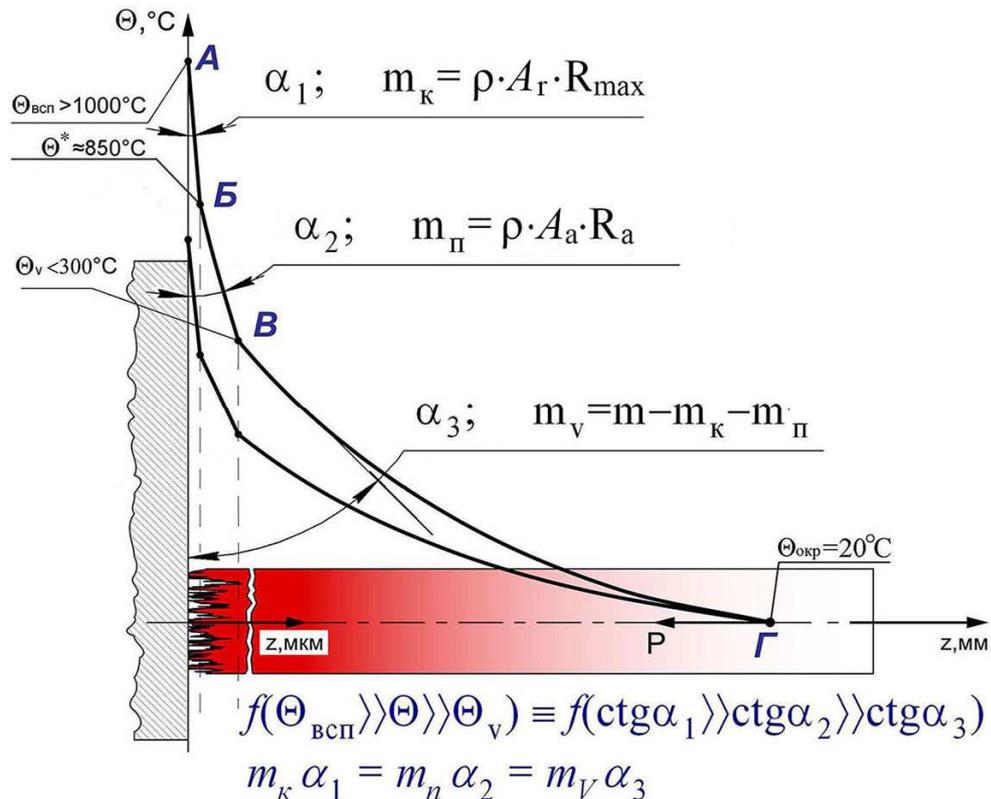


Рис. 2.32 – Экспоненциальная зависимость температур  $\Theta$  во фрикционном контакте от сближения поверхностей трения  $z$ :  $\Theta_v$  – объёмная температура (2.119);  $\Theta^*$  – средняя температура номинальной (или контурной) поверхности трения (2.120);  $\Theta_{всп}$  – температура вспышки (скачка температуры при трении) на фактическом пятне касания (2.122);  $m_v$  – объёмная масса, кг;  $m_n$  – поверхностная масса, кг;  $m_k$  – масса контактирующих микронеровностей поверхности, кг;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $A_a$  – номинальная площадь поверхности, м<sup>2</sup> (2.79);  $A_r$  – фактическая площадь касания поверхностей трения, м<sup>2</sup> (2.125);  $R_a$  – среднее арифметическое отклонение профиля, м (2.62);  $R_{max}$  – наибольшая высота неровностей профиля, м (2.64)

Шероховатость контактирующих тел при взаимном их перемещении определяет триботехнические характеристики фрикционной системы и зоны **I** и **II** теплового состояния трущихся тел. Градиентное изменение объёмных температур в **III** зоне можно определить на базе существующих математических моделей, представленных ранее. Далее будет предложен алгоритм экспериментального определения и мониторинга в реальном времени  $t$  максимальных контактных температур по измеренным значениям

температуры  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$  с применением термопар, установленных в двух различных точках объёма одной из контактирующих поверхностей трения на различном удалении от непосредственной фактической площади касания на величины  $z_1$  и  $z_2$ .

Выяснив соотношения между масштабами подобия натурального узла трения и его модели, применим рассмотренный ранее *метод анализа размерностей физических величин* для решения конкретной научно-технической задачи исследования. Для тождественности реализации аналогичных физических процессов механического, теплового и динамического характера во фрикционном контакте подсистемы «колесо – рельс» тепловоза 2ТЭ116 и его модели выделим управляемые (базисные), граничные и побочные факторы.

К *базисным факторам* отнесём управляемые нагрузочно-скоростные и термодинамические условия эксплуатации. В системе основных единиц MLT $\Theta$  (массы, длины, времени и температуры) выбираем базисные факторы, которые могут быть измерены в лабораторных условиях испытаний:

- |                                   |                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) температура, $\Theta$          | $[\Theta] = [M^0 L^0 T^0 \Theta^1];$ |
| 2) нагрузка, $N$                  | $[N] = [M^1 L^1 T^{-2} \Theta^0].$   |
| 3) скорость качения, $v$          | $[v] = [M^0 L^1 T^{-1} \Theta^0];$   |
| 4) геометрический масштаб $l$ , м | $[l] = [M^0 L^1 T^0 \Theta^0].$      |

Система уравнений из базисных факторов имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \Theta &= 0 \cdot \ln M + 0 \cdot \ln L + 0 \cdot \ln T + 1 \cdot \ln \Theta; \\ \ln N &= 1 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L - 2 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta; \\ \ln v &= 0 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L - 1 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta; \\ \ln l &= 0 \cdot \ln M + 1 \cdot \ln L + 0 \cdot \ln T + 0 \cdot \ln \Theta. \end{aligned}$$

Найдём значение определителя  $D_0$  системы уравнений, образованного параметрами MLT $\Theta$

$$D_0 = \begin{vmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & 1 \\ N & 1 & 1 & -2 & 0 \\ v & 0 & 1 & -1 & 0 \\ l & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1. \quad (2.136)$$

Независимость выбранных базисных факторов  $\Theta$ ,  $N$ ,  $V$  и  $l$  подтверждается неравенством  $D_0 \neq 0$ . Следовательно, выбранные нами базисные факторы выбраны верно.

В соответствии с третьей теоремой подобия введём *граничные требования*:

1) с целью обеспечения подобных условий динамики во фрикционном контакте выберем подобие частот собственных колебаний  $\omega_0$  контактирующих поверхностей трения, то есть масштаба подобия  $C_{\omega_0} = 1$ ;

2) с целью обеспечения подобных триботехнических параметров во фрикционном контакте (характерного износа и вида изнашивания поверхностей трения), а также условий сцепления колёсных пар с рельсами (про-

дольного и поперечного крива, нагрузочно-скоростных условий взаимодействия) выберем подобие давления  $Q$  в контакте модельного и натурального объектов, то есть масштаба подобия  $C_Q = 1$ ;

3) с целью обеспечения одинаковых физико-механических характеристик контактирующих поверхностей трения модельного и натурального объектов (модуля упругости Юнга, твёрдости, градиента температуры, нормальных и тангенциальных напряжений и др.) выберем подобие градиента температуры  $\Delta\Theta$ , то есть константы подобия  $C_{\Delta\Theta} = 1$ .

*Выбор побочных факторов обусловлен типом решаемой задачи.* В данном случае в соответствии с поставленными задачами исследований выходным параметром оптимизации является тяговое усилие  $F_m$  тепловоза. Указанный параметр определяется влиянием множества побочных факторов, число которых может достигать до 40 – 50 величин. Однако с использованием ранжирования факторов (методика ранжирования будет приведена в следующей главе) можно выделить среди них преобладающие физические величины. Это: ширина рельсовой колеи  $S_k$ , скорость движения подвижного состава  $V_p$ , нормальное давление  $Q$ , частота колебаний подсистемы «подвижной состав – путь»  $\omega_0$ .

Известно, что сила тяги создаётся тяговым двигателем локомотива, который в свою очередь создаёт вращающий момент  $M$  (рис. 2.33). Точка  $A$  является опорой колеса на рельс. Если к колесу приложен момент  $M$ , направленный по часовой стрелке, то его можно заменить парой сил  $F$  и  $F_1$ . Сила  $F$  приложена в точке  $O$  через буксы к раме тележки и направлена по движению. Сила  $F_1$  приложена в точке  $A$  к рельсу, направлена против движения и стремится создать проскальзывание опорной точки колеса в сторону, противоположную движению.

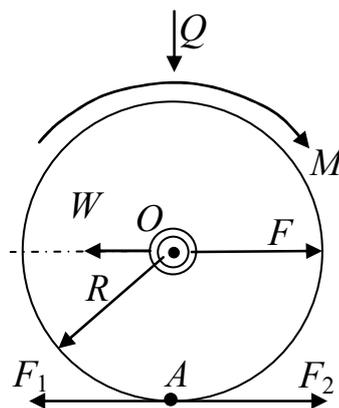


Рис. 2.33 – Схема образования силы тяги

Под действием давления колеса в опорной точке возникает реакция на силу  $F_1$ . Эта реакция  $F_2$  равна по величине  $F_1$  и направлена в противоположную сторону, но по той же линии действия. Сила  $F_2$  является внешней по отношению к колесу. Она как бы непрерывно отталкивает колесо от рельса, то есть, создаёт упор колеса о рельс, без которого невозможно поступательное движение локомотива. В результате равенства сил  $F_1$  и  $F_2$  освобождается сила  $F$  для осуществления движения локомотива. В тяго-

вых расчётах силой тяги локомотива считают горизонтальную реакцию  $F_2$ . Так как сила  $F_2$  направлена по касательной к ободу колеса, её называют *касательной силой тяги*. Для локомотива в целом касательная сила тяги  $F_K$  определяется как сумма касательных сил каждого колеса.

Так как сила  $F_2$  является как бы упором, препятствующим силе  $F_1$  сдвинуть колесо по рельсу, то её можно назвать *силой сцепления между колесом и рельсом*. Если вращающий момент тягового двигателя будет продолжать увеличиваться, то сцепление между колёсами и рельсом нарушается, и колеса начинают проскальзывать (боксовать). Причинами боксования колёсных пар являются:

- 1) наличие на бандажах и рельсах изморози, влаги и различных загрязнений, играющих роль смазочного материала;
- 2) проскальзывание колёсных пар в кривой;
- 3) недопустимая величина проката бандажей колёсных пар;
- 4) недопустимое различие характеристик пар тягового двигателя;
- 5) разгрузка отдельных осей колёсных пар под действием сил в тяговой передаче;
- 6) неисправности схемы ослабления возбуждения тягового двигателя, вызывающие его перегрузку или недогрузку;
- 7) резкое увеличение вращающего момента тяговых электродвигателей при неправильном управлении тепловозом.

При эксплуатации магистрального тепловоза 2ТЭ116 желательно реализовать как можно большие значения силы тяги, но это возможно только до определённой её величины.

Сила сцепления имеет природу сил трения и в первом приближении она равна произведению силы нормального давления колёс  $N_Q$  на коэффициент сцепления  $\Psi_\kappa$  колёс с рельсами:

$$F_m \leq N_Q \cdot \Psi_\kappa,$$

где  $F_m$  – ограничение силы тяги по сцеплению (рис. 2.34);

$N_Q$  – сцепной вес локомотива с учётом числа секций, кН;

$\Psi_\kappa$  – расчётный коэффициент сцепления согласно правил тяговых расчётов; для тепловоза 2ТЭ116 экспериментальный коэффициент сцепления

$$\Psi_\kappa = 0,118 + \frac{5}{27,5 + V_p},$$

где  $V_p$  – скорость движения, км/ч.

Второе ограничение силы тяги – по мощности силовой установки

$$F_m = \frac{3600P\varphi}{V_p},$$

где  $P$  – эффективная мощность дизеля, кВт,  $P = 2200$  кВт;

$\varphi$  – коэффициент использования мощности дизеля,  $\varphi = 0,72$ .

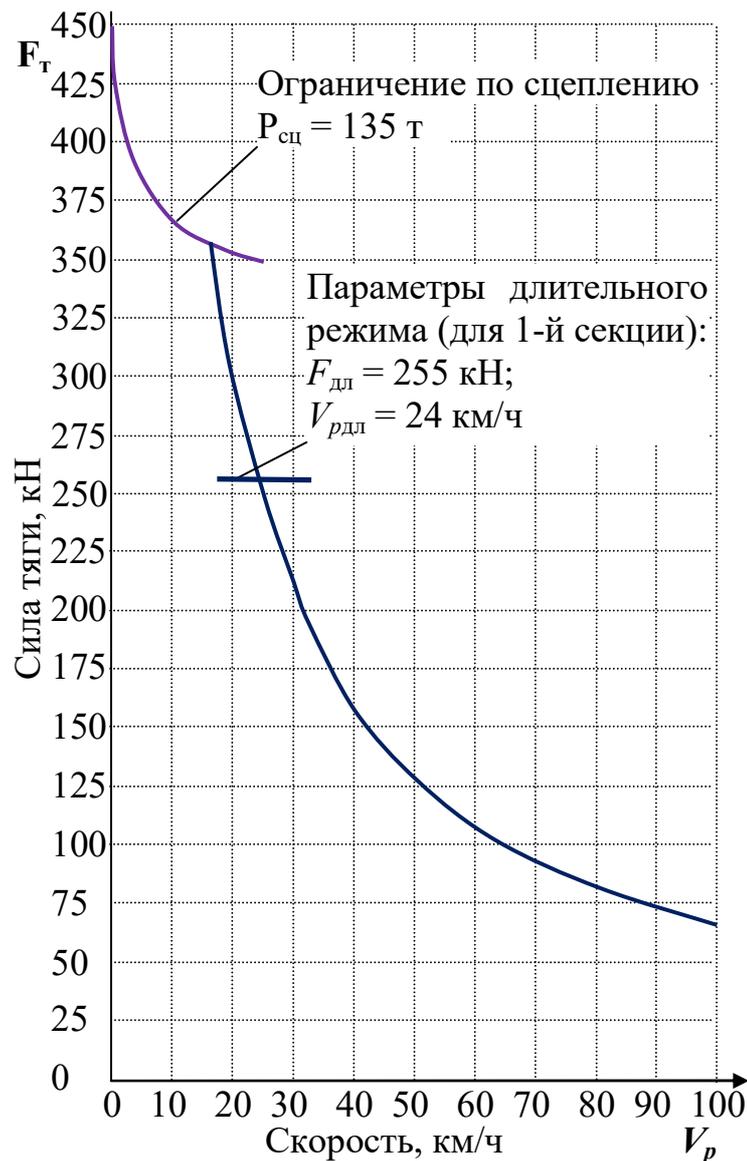


Рис. 2.34 – Ограничение тяговой характеристики локомотива ТЭ116 по сцеплению и мощности силовой установки

Величина коэффициента сцепления зависит от множества факторов, из которых основными являются: наличие на рельсах загрязнений и влаги, род двигателя локомотива, температура колёс и рельсов, нагрузка от колеса на рельс (чем больше нагрузка, тем выше коэффициент сцепления), скорость движения, тип тормоза (колодочный или дисковый). Определить величину коэффициента сцепления расчётным путём невозможно, поэтому применяются экспериментальные методы.

В соответствии с данными структурной схемы исследований (рис. 2.35) процессов трения и изнашивания узла трения «колесо – рельс» для определения оптимальной ширины рельсовой колеи в кривых малого радиуса были выбраны побочные факторы. В соответствии со второй теоремой подобия нами была получена функциональная зависимость тягового усилия  $F_m$  колеса с рельсом от варьируемых величин

$$F_T = \Phi(\Theta, N, v, l, \omega_0, Q, \Delta\Theta, v_c, Y_R, S_K), \quad (2.137)$$

где  $\Theta$  – температура, °С;  $N$  – нормальная нагрузка колеса на рельс, Н;  $v$  – скорость качения колёс по рельсам, м/с;  $l$  – геометрический масштаб, м;  $\omega_0$  – частота собственных колебаний, с<sup>-1</sup>;  $Q$  – контактное давление, Па;  $\Delta\Theta$  – градиент температуры, °С/м;  $v_c$  – скорость скольжения, м/с;  $Y_R$  – боковое усилие колёс на рельсы, Н;  $S_k$  – ширина рельсовой колеи.

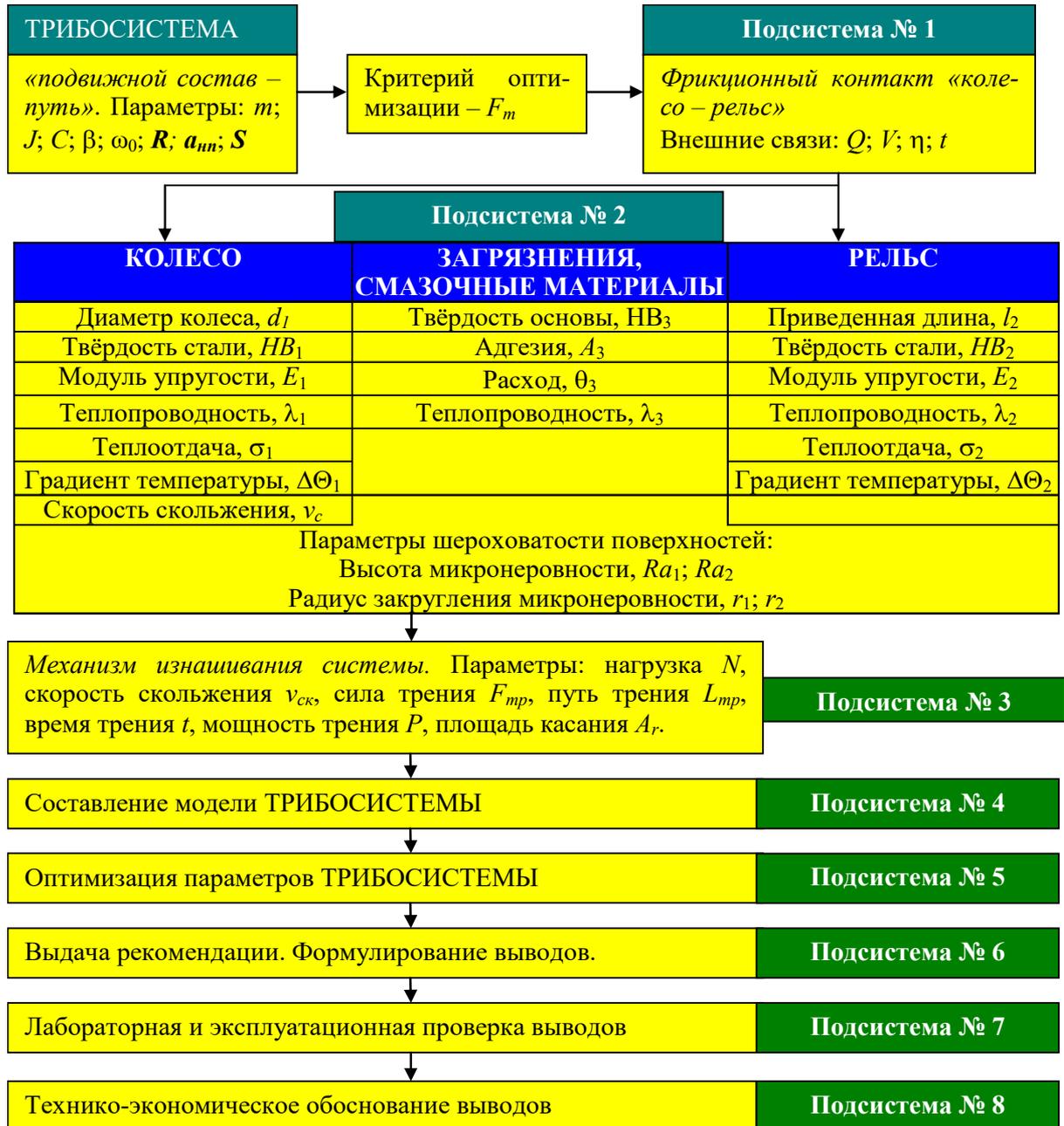


Рис. 2.35 – Структура модельных исследований процессов трения фрикционного контакта «колесо – рельс» в кривых малого радиуса

С использованием главного определителя системы  $D_0$  (2.136) для каждого из факторов, входящих в уравнение (2.137), за вычетом количества базисных получим четыре определителя и их критерии подобия.

Например, критерий градиента температуры  $[\Delta\Theta] = [M^0 L^{-1} T^0 \Theta^1]$ .

$$D_1 = \begin{array}{c} \Delta\Theta \\ N \\ v \\ l \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = -1; \quad \alpha_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$D_2 = \begin{array}{c} \Theta \\ \Delta\Theta \\ v \\ l \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0; \quad \alpha_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$D_3 = \begin{array}{c} \Theta \\ N \\ \Delta\Theta \\ l \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0; \quad \alpha_3 = \frac{D_3}{D_0} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$D_4 = \begin{array}{c} \Theta \\ N \\ v \\ \Delta\Theta \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1; \quad \alpha_4 = \frac{D_4}{D_0} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Критерий подобия градиента температуры  $\Delta\Theta$  имеет вид

$$\pi_{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta^{\alpha_1} \cdot N^{\alpha_2} \cdot v^{\alpha_3} \cdot l^{\alpha_4}} = idem \text{ или } \pi_{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta^1 \cdot N^0 \cdot v^0 \cdot l^{-1}} = 1,$$

тогда  $\pi_{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\Theta \cdot l}{\Theta} = idem.$

$$\text{Проверка: } \pi_{\Delta\Theta} = \frac{M^0 L^{-1} T^0 \Theta^1 \cdot M^0 L^1 T^0 \Theta^0}{M^0 L^0 T^0 \Theta^1} = \frac{L^{-1+1} \Theta}{\Theta} = 1.$$

Например, критерий амплитуды деформации связей  $[A]=[M^0 L^1 T^0 \Theta^0]$ .

$$D_1 = \begin{array}{c} A \\ N \\ v \\ l \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0; \quad \alpha_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$D_2 = \begin{array}{c} \Theta \\ A \\ v \\ l \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0; \quad \alpha_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$D_3 = \begin{matrix} \Theta \\ N \\ A \\ l \end{matrix} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0; \quad \alpha_3 = \frac{D_3}{D_0} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$D_4 = \begin{matrix} \Theta \\ N \\ v \\ A \end{matrix} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = -1; \quad \alpha_4 = \frac{D_4}{D_0} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Критерий подобия амплитуды деформации связей  $A$ :

$$\pi_A = \frac{A}{\Theta^{\alpha_1} \cdot N^{\alpha_2} \cdot V^{\alpha_3} \cdot l^{\alpha_4}} = idem \text{ или } \pi_A = \frac{A}{\Theta^0 \cdot N^0 \cdot V^0 \cdot l^1} = 1,$$

тогда  $\pi_A = \frac{A}{l} = idem$ . Проверка:  $\pi_A = \frac{M^0 L^1 T^0 \Theta^0}{M^0 L^1 T^0 \Theta^0} = 1$ , что подтверждает

сделанные ранее предположения о неизменности микрогеометрии поверхностей трения при модельных и натуральных исследованиях.

Аналогично были получены остальные критерии подобия, входящие в уравнение (2.137). Результаты расчёта критериев и масштабов подобия физических параметров для принятой модели и натурального образца относительно масштаба подобия геометрических размеров  $C_l$ , сведены в табл. 2.17.

Табл. 2.17 – Основные параметры модели узла трения «колесо – рельс»

Параметр	Размерность, СИ	Критерий подобия, = idem	Масштаб подобия	Формула пересчёта с оригинала на модель
1	2	3	4	5
<b>Базисные факторы</b>				
Температура, $\Theta$	°С	—	$C_\Theta = C_l^{-1}$	$(\Theta)_M = \frac{(\Theta)_H}{C_l^{-1}}$
Нагрузка, $N$	Н	—	$C_N = C_l^2$	$(N)_M = \frac{(N)_H}{C_l^2}$
Скорость качения, $v$	м/с	—	$C_v = C_l$	$(v)_M = \frac{(v)_H}{C_l}$
Геометрические размеры, $l$	м	—	$C_l = 5$ или $C_l = 21$ – задаётся в зависимости от используемого стенда или установки трения	
<b>Граничные условия</b>				
Частота собственных колебаний, $\omega_0$	Гц	$\pi_{\omega_0} = \frac{\omega_0 l}{v}$	$C_{\omega_0} = C_l^0 = 1$	$(\omega_0)_M = (\omega_0)_H$

1	2	3	4	5
Контактное давление, $Q$	Па	$\pi_Q = \frac{Ql^2}{N}$	$C_Q = C_l^0 = 1$	$(Q)_M = (Q)_H$
Градиент температуры, $\Delta\Theta$	°C/м	$\pi_{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\Theta l}{\Theta}$	$C_{\Delta\Theta} = C_l^0 = 1$	$(\Delta\Theta)_M = (\Delta\Theta)_H$
<b>Факторы, необходимые для решения задачи исследований</b>				
Частота внешних воздействий, $\omega$	Гц	$\pi_\omega = \frac{\omega l}{v}$	$C_\omega = C_l^0 = 1$	$(\omega)_M = (\omega)_H$
Боковое усилие колеса на рельс, $Y_R$	Н	$\pi_{Y_R} = \frac{Y_R}{N}$	$C_{Y_R} = C_l^2$	$(Y_R)_M = \frac{(Y_R)_H}{C_l^2}$
Ширина колеи, $S_\kappa$	м	$\pi_{S_\kappa} = \frac{S_\kappa}{l}$	$C_{S_\kappa} = C_l$	$(S_\kappa)_M = \frac{(S_\kappa)_H}{C_l}$
<b>Дополнительные критерии для проверки адекватности модели</b>				
Скорость скольжения, $v_c$	м/с	$\pi_{v_c} = \frac{v_c}{v}$	$C_{v_c} = C_l^0 = 1$	$(v_c)_M = (v_c)_H$
Время трения, $t$	с	$\pi_t = \frac{tv}{l}$	$C_t = C_l^0 = 1$	$(t)_M = (t)_H$
Путь трения, $L_{mp}$	м	$\pi_{L_{mp}} = \frac{L_{mp}}{l}$	$C_{L_{mp}} = C_l^0 = 1$	$(L_{mp})_M = (L_{mp})_H$
Сила трения, $F$ Сила тяги, $F_T$	Н	$\pi_F = \frac{F}{N}$	$C_F = C_l^2$	$(F)_M = \frac{(F)_H}{C_l^2}$
Масса, $m$	кг	$\pi_m = \frac{mv^2}{Nl}$	$C_m = C_l^2$	$(m)_M = \frac{(m)_H}{C_l^2}$
Жёсткость привода, $C$	Н/м	$\pi_C = \frac{Cl}{N}$	$C_C = C_l^2$	$(C)_M = \frac{(C)_H}{C_l^2}$
Коэффициент сопротивления амортизаторов, $\beta$	Н·с/м	$\pi_\beta = \frac{\beta v}{N}$	$C_\beta = C_l^2$	$(\beta)_M = \frac{(\beta)_H}{C_l^2}$
Контактная площадь поверхности, $A_\kappa$	м <sup>2</sup>	$\pi_{A_\kappa} = \frac{A_\kappa}{l^2}$	$C_{A_\kappa} = C_l^2$	$(A_\kappa)_M = \frac{(A_\kappa)_H}{C_l^2}$
Разность объёмных температур, $\delta\Theta$	К	$\pi_{\delta\Theta} = \frac{\delta\Theta}{\Theta}$	$C_{\delta\Theta} = C_l^{-1}$	$(\delta\Theta)_M = \frac{(\delta\Theta)_H}{C_l^{-1}}$

1	2	3	4	5
Теплопроводность, $\lambda$	$\frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$	$\pi_\lambda = \frac{\lambda \Theta l}{NV}$	$C_\lambda = 1$	$(\lambda)_M = (\lambda)_H$
Удельная теплоёмкость, $c$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$	$\pi_c = \frac{c \Theta}{v^2}$	$C_c = C_l$	$(c)_M = \frac{(c)_H}{C_l}$
Теплоотдача, $\sigma$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$	$\pi_\sigma = \frac{\sigma \Theta l^2}{NV}$	$C_\sigma = C_l^0 = 1$	$(\sigma)_M = (\sigma)_H$
Плотность материалов, $\rho$	$\text{кг/м}^3$	$\pi_\rho = \frac{\rho v^2 l^2}{N}$	$C_\rho = C_l^0 = 1$	$(\rho)_M = (\rho)_H$
Модуль упругости, $E$	Па	$\pi_E = \frac{E l^2}{N}$	$C_E = C_l^0 = 1$	$(E)_M = (E)_H$
Сопротивление сдвигу (срезу) окисных плёнок на поверхности трения, $\tau_{\text{пл}}$	Па	$\pi_{\tau_{\text{пл}}} = \frac{\tau_{\text{пл}} l^2}{N}$	$C_{\tau_{\text{пл}}} = C_l^0 = 1$	$(\tau_{\text{пл}})_M = (\tau_{\text{пл}})_H$
Предел текучести, $\sigma_T$	Па	$\pi_{\sigma_T} = \frac{\sigma_T l^2}{N}$	$C_{\sigma_T} = C_l^0 = 1$	$(\sigma_T)_M = (\sigma_T)_H$
Динамическая вязкость, $\eta$	Па·с	$\pi_\eta = \frac{\eta v l}{N}$	$C_\eta = C_l^0 = 1$	$(\eta)_M = (\eta)_H$
Работа сил трения, $W$	Дж	$\pi_W = \frac{W}{Nl}$	$C_W = C_l^3$	$(W)_M = \frac{(W)_H}{C_l^3}$
Отношение $S$ теплоотдающей поверхности $A_\sigma$ к поглощающему объёму $V$ пары трения	$\text{м}^{-1}$	$\pi_S = Sl$	$C_S = C_l^{-1}$	$(S)_M = \frac{(S)_H}{C_l^{-1}}$
Температурный коэффициент линейного расширения, $\alpha$	$\text{К}^{-1}$	$\pi_\alpha = \frac{\alpha l \Theta}{\Delta L_{mp}}$	$C_\alpha = C_l$	$(\alpha)_M = \frac{(\alpha)_H}{C_l}$
Радиус единичной неровности поверхности, $r$	мкм	$\pi_r = \frac{r}{l}$	$C_r = C_l^0 = 1$	$(r)_M = (r)_H$
Высота неровности поверхности, $h$	мкм	$\pi_h = \frac{h}{l}$	$C_h = C_l^0 = 1$	$(h)_M = (h)_H$

Согласно теореме Э. Букингема уравнение подобия подсистемы «колесо – рельс» состоит из 27 критериев за вычетом четырёх базисных:

$$\Phi \left( \frac{\omega_0 l}{v}; \frac{Ql^2}{N}; \frac{\Delta\Theta l}{\Theta}; \frac{\omega l}{v}; \frac{Y_R}{N}; \frac{S_K}{l}; \frac{v_c}{v}; \frac{tv}{l}; \frac{L_{тр}}{l}; \frac{F}{N}; \frac{mv^2}{Nl}; \frac{Cl}{N}; \frac{\beta v}{N}; \frac{A_K}{l^2}; \right. \\ \left. \frac{\delta\Theta}{\Theta}; \frac{\lambda\Theta l}{NV}; \frac{c\Theta}{v^2}; \frac{\sigma\Theta l^2}{NV}; \frac{\rho v^2 l^2}{N}; \frac{El^2}{N}; \frac{\tau_{III} l^2}{N}; \frac{\sigma_T l^2}{N}; \frac{\eta vl}{N}; \frac{W}{Nl}; Sl; \frac{r}{l}; \frac{h}{l} \right). \quad (2.138)$$

Критериальное уравнение (2.138) и критерии подобия (табл. 2.17) зависят от параметров, принятых за базисные, поэтому требуют экспериментальной проверки и сопоставления со «стандартными», многократно апробированными при исследовании процессов в других областях техники.

1) *Критерий гомохронности*, или однородности процессов во времени, получим делением критерия времени  $\pi_t$  на критерий пути трения  $\pi_L$

$$\pi_t = \left( \frac{tv}{l} \right) : \left( \frac{L_{mp}}{l} \right) = \frac{vt}{L_{mp}} = idem, \text{ а с учётом (2.134) } \pi_t = \frac{C_t C_{vc}}{C_{Lmp}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) *Критерий И. Ньютона* выражает его второй закон и получается, если критерий силы трения  $\pi_F$  умножить на критерий времени испытаний  $\pi_t$ , разделить на критерий массы  $\pi_m$  с последующей подстановкой выражения  $v = L_{mp} / t$

$$\pi_{Ne} = \left( \frac{F_{mp}}{N} \right) \times \left( \frac{tv}{l} \right) : \left( \frac{mv^2}{Nl} \right) = \frac{F_{mp} t}{mv} = \frac{F_{mp} t^2}{m L_{mp}} = idem, \\ \text{а с учётом (2.134) } \pi_{Ne} = \frac{C_F C_t^2}{C_m C_{Lmp}} = \frac{C_l^2 \cdot 1^2}{C_l^2 \cdot 1} = 1.$$

3) *Критерий У. Фруда* (1870 г.), соотношения силы инерции и силы тяжести, в поле которой происходит движение, получается делением критерия массы  $\pi_m$  на критерий времени  $\pi_t$  с последующей подстановкой выражений  $N = mg$  и  $v = L_{mp} / t$

$$\left( \frac{mv^2}{Nl} \right) : \left( \frac{tv}{l} \right) = \frac{mv}{Nt} = \frac{L_{mp}}{gt^2}.$$

Умножив на квадрат критерия гомохронности, получаем критерий подобия У. Фруда

$$\pi_{Fr} = \left( \frac{L_{mp}}{gt^2} \right) \cdot \left( \frac{tv}{L_{mp}} \right)^2 = \frac{v^2}{gL_{mp}} = idem, \\ \text{а с учётом (2.134) } \pi_{Fr} = \frac{C_{vc}^2}{C_{Lmp} C_g} = \frac{1^2}{1 \cdot 1} = 1.$$

4) *Критерий Ж.-Б. Био*, стационарного теплообмена между нагретой поверхностью и окружающей средой, получим путём деления критерия подобия теплоотдачи  $\pi_\sigma$  на критерий теплопроводности  $\pi_\lambda$ :

$$\pi_{Bio} = \left( \frac{\sigma \Theta l^2}{NV} \right) : \left( \frac{\lambda \Theta l}{NV} \right) = \frac{\sigma l}{\lambda} = idem,$$

$$\text{а с учётом (2.134) } \pi_{Bio} = \frac{C_\sigma \cdot C_{Lmp}}{C_\lambda} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

5) *Критерий подобия режимов нагружения Б.Г. Лурье* получим путём деления критерия подобия бокового усилия колеса на рельс  $\pi_Y$  на критерии скорости скольжения  $\pi_v$ , жёсткости  $\pi_C$  и массы  $\pi_m$  привода:

$$\pi_Y = \frac{\left( \frac{Y_R}{N} \right)}{\left( \frac{v_c}{v} \right) \cdot \sqrt{\left( \frac{Cl}{N} \right) \cdot \left( \frac{mv^2}{Nl} \right)}} = \frac{Y_R}{v_c \sqrt{Cm}} = idem,$$

$$\text{а с учётом (2.134) } \pi_Y = \frac{C_{Yr}}{C_{vc} \sqrt{C_C C_m}} = \frac{C_l^2}{1 \cdot \sqrt{C_l^2 \cdot C_l^2}} = 1.$$

6) *Критерий подобия условий демпфирования Б.Г. Лурье* получим путём деления критерия подобия коэффициента сопротивления амортизаторов  $\pi_\beta$  на критерии жёсткости  $\pi_C$  и массы  $\pi_m$  привода:

$$\pi_\beta = \frac{\left( \frac{\beta v}{N} \right)}{\sqrt{\left( \frac{Cl}{N} \right) \cdot \left( \frac{mv^2}{Nl} \right)}} = \frac{\beta}{\sqrt{Cm}} = idem \equiv \pi_\beta = \frac{\beta}{\beta_{кр}} = idem,$$

$$\text{а с учётом (2.134) } \pi_\beta = \frac{C_\beta}{\sqrt{C_C C_m}} = \frac{C_l^2}{\sqrt{C_l^2 \cdot C_l^2}} = 1,$$

где  $\beta_{кр}$  – критический коэффициент сопротивления.

7) *Теплофизический критерий А.В. Чичинадзе*:

$$\pi_a = \frac{\left( \frac{\lambda_1 \Theta l}{Nv} \right) \left( \frac{\lambda_2 \Theta l}{Nv} \right) \left( \frac{\lambda_3 \Theta l}{Nv} \right)}{\left( \frac{c_1 \Theta}{v^2} \right) \left( \frac{c_2 \Theta}{v^2} \right) \left( \frac{c_3 \Theta}{v^2} \right) \left( \frac{\rho_1 v^2 l^2}{N} \right) \left( \frac{\rho_2 v^2 l^2}{N} \right) \left( \frac{\rho_3 v^2 l^2}{N} \right)} \cdot \frac{\left( \frac{\Delta \Theta_1 l}{\Theta} \right) \left( \frac{\Delta \Theta_2 l}{\Theta} \right)}{\left( \frac{\delta \Theta_1}{\Theta} \right) \left( \frac{\delta \Theta_2}{\Theta} \right) \left( \frac{A_{\kappa 1}}{l^2} \right) \left( \frac{A_{\kappa 2}}{l^2} \right)} \left( \frac{t_T v}{l} \right)^3 =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{c_1 c_2 c_3 \rho_1 \rho_2 \rho_3} \cdot \frac{\Delta \Theta_1 \Delta \Theta_2}{\delta \Theta_1 \delta \Theta_2 A_{\kappa 1} A_{\kappa 2}} t_T^3$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – коэффициенты теплопроводности образца, контробразца и окружающей среды (третьего тела), Вт/м·°С (табл. 2.17);

$c_1, c_2, c_3$  – удельная теплоёмкость образца, контробразца и теплопроводности образца, контробразца и окружающей среды, Дж/кг·°С (табл. 2.17);

$\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – плотность материалов теплопроводности образца, контробразца и окружающей среды, кг/м<sup>3</sup> (табл. 2.17);

$\Delta\Theta_1, \Delta\Theta_2$  – градиент температуры образца и контробразца, °С/м (табл. 2.17);

$\delta\Theta_1, \delta\Theta_2$  – разность температур образца (контробразца) и окружающей среды, °С

$$\delta\Theta_{1,2} = \Theta_{1,2} - \Theta_3. \quad (2.139)$$

$A_{к1}, A_{к2}$  – контактные площади поверхностей трения (2.92) образца и контробразца, м<sup>2</sup> (табл. 2.17);

$t_T$  – продолжительность трения, с.

С учётом масштабов подобия (2.134), получим

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{C_\lambda^3}{C_c^3 C_\rho^3} \cdot \frac{C_{\Delta\Theta}^2}{C_{\delta\Theta}^2 C_{Ak}^2} C_i^3 = \frac{\left(\frac{C_F}{C_l C_\Theta}\right)^3 \cdot \left(\frac{C_\Theta}{C_l}\right)^2}{\left(\frac{C_F C_l}{C_m C_\Theta}\right)^3 \cdot \left(\frac{C_m}{C_l^3}\right)^3 \cdot C_\Theta^2 \cdot C_l^4} C_i^3 = \\ &= \frac{\left(\frac{C_l^2}{1 \cdot C_l^{-1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{C_l^{-1}}{C_l}\right)^2}{\left(\frac{C_l^2 C_l}{C_l^2 C_l^{-1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{C_l^2}{C_l^3}\right)^3 \cdot C_l^{-2} \cdot C_l^4} \cdot 1^3 = \frac{C_l^9}{C_l^6 \cdot C_l^{-3}} \cdot \frac{C_l^{-4}}{C_l^{-2} \cdot C_l^4} \cdot 1^3 = 1. \end{aligned}$$

8) Физико-механический критерий А.В. Чичинадзе:

$$\pi_E = \frac{\left(\frac{E_1 l^2}{N}\right) \left(\frac{E_2 l^2}{N}\right) \left(\frac{\tau_{нл1} l^2}{N}\right) \left(\frac{\tau_{нл2} l^2}{N}\right) \left(\frac{F}{N}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_T v}{l}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{т1} l^2}{N}\right) \left(\frac{\sigma_{т2} l^2}{N}\right) \left(\frac{\eta_1 v l}{N}\right) \left(\frac{\eta_2 v l}{N}\right) \left(\frac{\eta_3 v l}{N}\right) \left(\frac{W}{Nl}\right)} = \frac{E_1 E_2 \tau_{нл1} \tau_{нл2}}{\sigma_{т1} \sigma_{т2} \eta_1 \eta_2 \eta_3} \frac{F^2 \cdot t_T^2}{W \cdot v},$$

где  $E_1, E_2$  – модуль упругости образца и контробразца, Па;

$\tau_{нл1}, \tau_{нл2}$  – сопротивление сдвигу (срезу) окисных плёнок на поверхности трения, Па;

$\sigma_{т1}, \sigma_{т2}$  – предел текучести, Па;

$\eta_1, \eta_2, \eta_3$  – динамическая вязкость образца, контробразца и окружающей среды, Па·с;

$F$  – сила трения, Н

$W$  – работа сил трения, Дж;

$v$  – скорость скольжения, м/с.

С учётом масштабов подобия (2.134), получим

$$\pi_E = \frac{C_E^2 C_{\tau_{\text{нн}}}^2}{C_{\sigma_{\tau}}^2 C_{\eta}^3} \frac{C_F^2 \cdot C_t^2}{C_W \cdot C_v} = \frac{C_E^2 C_{\tau_{\text{нн}}}^2}{C_{\sigma_{\tau}}^2 C_{\eta}^3} \frac{C_F^2 \cdot C_t^2}{C_W \cdot \frac{C_l}{C_t}} = \frac{1^2 \cdot 1^2}{1^2 \cdot 1^3} \frac{C_l^4 \cdot 1^3}{C_l^3 \cdot C_l} = 1,$$

9) Критерий макро- и микрогеометрии контактирования А.В. Чичинадзе

$$\pi_h = \frac{(S_1 l)(S_2 l)}{\left(\frac{A_{\kappa 1}}{l^2}\right)\left(\frac{A_{\kappa 2}}{l^2}\right)} \frac{\left(\frac{r_1}{l}\right)\left(\frac{r_2}{l}\right)}{\left(\frac{h_1}{l}\right)\left(\frac{h_2}{l}\right)} \left(\frac{t_{\tau} v}{l}\right)^6 = \frac{S_1 S_2}{A_{\kappa 1} A_{\kappa 2}} \frac{r_1 r_2}{h_1 h_2} t_{\tau}^6 v^6,$$

где  $S_1, S_2$  – отношение теплоотдающей поверхности  $A_{\sigma}$  к поглощающему объёму  $V$  элемента пары трения,  $\text{м}^2/\text{м}^3$

$$S = A_{\sigma}/V;$$

$r_1, r_2$  – радиус единичной неровности образца и контрообразца, мкм;

$h_1, h_2$  – высота неровности, мкм;

$v$  – скорость скольжения, м/с;

$t_{\tau}$  – продолжительность трения, с.

С учётом масштабов подобия (2.134), получим

$$\pi_h = \frac{C_S^2}{C_{A_{\kappa}}^2} \frac{C_r^2}{C_h^2} C_t^6 \left(\frac{C_l}{C_t}\right)^6 = \frac{C_S^2}{C_{A_{\kappa}}^2} \frac{C_r^2}{C_h^2} C_l^6 = \frac{C_l^{-2}}{C_l^4} \frac{1^2}{1^2} C_l^6 = 1.$$

10) Динамический критерий А.В. Чичинадзе получим, выполнив подстановку для ускорения массы  $a = v/t$

$$\pi_m = \frac{\left(\frac{m_1 v^2}{Nl}\right)\left(\frac{m_2 v^2}{Nl}\right)\left(\frac{\Delta L_{mp}}{l}\right)^2 \left(\frac{\alpha_1 l \Theta}{\Delta L_{mp}}\right)\left(\frac{\alpha_2 l \Theta}{\Delta L_{mp}}\right)\left(\frac{\delta \Theta_1}{\Theta}\right)\left(\frac{\delta \Theta_2}{\Theta}\right)}{\left(\frac{F}{N}\right)^2 \left(\frac{tv}{l}\right)^2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 v^2 \alpha_1 \alpha_2 \delta \Theta_1 \delta \Theta_2}{F^2 t_{\tau}^2} = m_1 m_2 a v \frac{\alpha_1 \alpha_2 \delta \Theta_1 \delta \Theta_2}{F^2 t_{\tau}},$$

где  $m_1, m_2$  – массы тел образца и контрообразца поверхностей трения, кг;

$a$  – ускорение,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;

$v$  – скорость скольжения, м/с;

$\alpha_1, \alpha_2$  – температурный коэффициент линейного расширения,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ;

$\delta \Theta_1, \delta \Theta_2$  – изменение температур,  $^{\circ}\text{C}$  (2.139);

$F$  – сила трения, Н;

$t_{\tau}$  – продолжительность трения, с.

С учётом масштабов подобия (2.134), получим

$$\pi_m = C_m^2 C_a C_v \frac{C_{\alpha}^2 C_{\delta \Theta}^2}{C_F^2 C_t} = C_l^4 \frac{C_l}{C_t^2} \frac{C_l}{C_t} \frac{C_l^2 C_l^{-2}}{C_l^4 C_t} = C_l^4 \frac{C_a}{1^2} \frac{C_v}{1} \frac{1}{C_l^4 \cdot 1} = C_a C_v = 1,$$

где  $C_v$  – масштаб подобия скорости скольжения,  $C_v = C_{vc} = 1$ ;

$C_a$  – масштаб подобия ускорения.

Так как скорость скольжения фрикционной подсистемы «колесо – рельс» в модели и натуре равны  $(v_c)_M = (v_c)_H$ , то ускорение в зоне контакта равно нулю как в модельной, так и натурной трибосистемах. Тогда масштаб подобия ускорения  $C_a = 1$ .

Видим, что в соответствие с третьей теоремой подобия принятые нами масштабы подобия верны, так как апробированные на практике критерии подобия гомохронности, И. Ньютона, У. Фруда, Ж.-Б. Био, Б.Г. Лурье, А.В. Чичинадзе выполняются.

При решении поставленной задачи по оптимизации ширины рельсовой колеи  $S_k$  и определении экспериментальной зависимости силы тяги  $F_m$  как функций бокового усилия  $Y_R$ , ширины колеи  $S_k$  и частоты внешних воздействий  $\omega$  на фрикционную систему «колесо набегающей на рельс колёсной пары – рельс» определён критерий подобия тяговой мощности  $F_m$

$$\pi_{F_T} = \frac{\left(\frac{F_T}{N}\right)\left(\frac{S_k}{l}\right)\left(\frac{\omega l}{v}\right)}{\left(\frac{Y_R}{N}\right)} = \frac{F_T S_k \omega}{v Y_R} = idem, \quad (2.140)$$

$$\text{а с учётом (2.134)} \quad \pi_{F_T} = \frac{C_{F_T} C_{S_k} C_\omega}{C_v C_{Y_R}} = \frac{C_l^2 \cdot C_l \cdot 1}{C_l \cdot C_l^2} = 1.$$

Зная полученные нами критерий подобия (2.140), с помощью методов математического планирования физического эксперимента были получены уравнения регрессии

– в кодовых значениях факторов (для модели)

$$\hat{y} = 4,725 + 0,409x_1 - 1,111x_2 - 0,501x_3 + 0,221x_1^2 + 0,983x_2^2 - 0,252x_3^2,$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – кодовое представление факторов бокового усилия  $Y_R$ , скорости качения колёсных пар  $v_k$  и ширины колеи  $S_k$ ;

– в натуральных значениях факторов (для модели)

$$\hat{F}_m = -10346 - 0,00247Y_R - 3,38v_k + 68,2S_k + 4,5 \cdot 10^{-7} Y_R^2 + 0,409v_k^2 - 0,112S_k^2;$$

– в натуральных значениях факторов (для натурального подвижного состава)

$$\begin{aligned} \hat{F}_m = & -10346 - \frac{0,00247}{C_l^2} Y_R - \frac{3,38}{C_l} v_k + \frac{68,2}{C_l} S_k + \frac{4,5 \cdot 10^{-7}}{C_l^4} Y_R^2 + \\ & + \frac{0,409}{C_l^2} v_k^2 - \frac{0,112}{C_l^2} S_k^2, \end{aligned}$$

где  $C_l$  – принятый нами геометрический масштаб моделирования;

$C_l^2$  – геометрический масштаб сил (табл. 2.2);

$C_l$  – геометрический масштаб скорости качения колёсных пар и ширины колеи (табл. 2.2).

В нашем случае геометрический масштаб подобия  $C_l = 5$ . Подставив в вышеприведённое уравнение значения боковой силы  $Y_R$  [Н], скорости качения колёсных пар  $v_k$  [м/с] и ширины колеи  $S_k$  [мм] для натурной системы «подвижной состав – путь», получим экспериментальные значения силы тяги  $F_T$  для натурального локомотива:

$$\hat{F}_m = -10346 - 9,88 \cdot 10^{-5} Y_R - 0,676 v_k + 13,64 S_k + 7,2 \cdot 10^{-10} Y_R^2 + 0,016 v_k^2 - 0,00448 S_k^2,$$

а оптимальные значения варьируемых величин для натурального подвижного состава имеют значения:

- боковых усилий на рельсы  $Y_R^{(опт)} = 68,7$  кН;
- скорости движения локомотива  $v_k^{(опт)} = 19,4$  м/с (70 км/ч);
- ширины рельсовой колеи  $S_k^{(опт)} = 1520,05$  мм.

Поставленная перед нами научно-исследовательская задача оптимизации ширины рельсовой колеи решена не в эксплуатационных условиях, а на модели, что позволяет экономить материально-технические средства. С методикой математического планирования эксперимента, применённой для поиска оптимальных значений факторов, можно ознакомиться в [2].

## *2.6 Пересчётные масштабы подобия с натуры на модель и обратно*

Для реализации лабораторных и стендовых испытаний необходимо установить масштабы подобия основных характеристик процесса трения и нагрузочно-скоростных режимов, чтобы обеспечить как динамическое подобие трибосистемы, так и подобие физико-механических характеристик контактирующих тел, реализации процессов изнашивания.

Приведём пример для решения научно-исследовательских задач на машине трения типа Amsler, иллюстрирующий применение методики физического моделирования при модернизации и оптимизации существующего подвижного состава, создании стендов для вновь проектируемых подсистем. В качестве объекта исследования выберем фрикционную подсистему «колесо – рельс» магистрального тепловоза 2ТЭ116, преодолевающего круговую кривую на угол  $\pi/2$  радиан.

Табл. 2.18 – Исходные данные, необходимые для расчёта масштабов подобия магистрального тепловоза 2ТЭ116 и его модели

Параметр, размерность	Значение	
<i>Параметры натурального тепловоза 2ТЭ116 и пути (табл. 2.1)</i>		
	объект	модель
Скорость движения, км/ч	$V_p = 70$	
Погонная длина рельса, м	$L_p = 1$	—

Продолжение табл. 2.18

1	2	3
Радиус тягового колеса (ролика), м	$R_1 = 0,525$	$r_1 = 0,025$
Радиус кривизны рельса, м	$R_2 = \infty$	$r_2 = \infty$
Длина колодки, м	—	$l_k = 0,015$
Номинальная ширина участка поверхности трения, м	$L_T = 0,042$	$l = 0,002$ (2.165)
Толщина бандажа, м	$B_1 = 0,075$	$b_1 = 0,00357$ (2.191)
Высота головки рельса Р65, м	$B_2 = 0,035$	$b_2 = 0,00167$ (2.191)
Радиус криволинейного участка пути, м	$R = 250$	—
Ширина колеи в кривой пути, м	$B = 1,53$	—
Статическая нагрузка колеса на рельс, Н	$P_H = 112700$ (2.8)	$P_M = 256$ (2.147)
<i>Параметры материалов образца и контрообразца как натурального объекта, так и его модели</i>		
	<b>образец</b>	<b>контрообразец</b>
1	2	3
Модуль Юнга, Па	$E_1 = 2,15 \cdot 10^{11}$	$E_2 = 2,15 \cdot 10^{11}$
Твёрдость материалов, МПа	$HB_1 = 2410$	$HB_2 = 2410$
Предел текучести, МПа	$\sigma_T = 785$	$\sigma_T = 785$
Коэффициент Пуассона	$\mu_1 = 0,3$	$\mu_2 = 0,3$
Удельная теплоёмкость, Дж/кг·°С	$c_1 = 490$	$c_2 = 490$
Коэффициент теплопроводности, Вт/м·°С	$\lambda_1 = 37$	$\lambda_2 = 37$
Плотность материалов, кг/м <sup>3</sup>	$\rho_1 = 7850$	$\rho_2 = 7850$
Исходная температура элемента пары трения, °С	$\Theta_{01} = 20$	$\Theta_{02} = 20$
<i>Параметры пяти профилограмм, снятых с различных участков исследуемой поверхности образца и контрообразца</i>		
Базовая длина $l$ , мм	0,8	0,8
Увеличение профилограммы в поперечном направлении: – горизонтальное $\gamma_H$ – вертикальное $\gamma_B$	400 1000	400 1000
Увеличение профилограммы в продольном направлении: – горизонтальное $\gamma_{гпр}$ – вертикальное $\gamma_{впр}$	1000 4000	1000 4000
Среднее арифметическое отклонение профиля $R_a$ , мкм	1,4; 1,39; 1,39; 1,36; 1,37	2,12; 2,25; 2,01; 2,17; 2,15
Наибольшая высота неровностей профиля $R_{max}$ , мкм	7,24; 7,43; 7,14; 7,15; 6,96	8,82; 8,32; 8,63; 8,46; 8,35

1	2	3
Наибольшая высота выступа $R_p$ , мкм	3,64; 3,88; 3,41; 3,96; 3,34	5,3; 5,41; 5,44; 5,45; 5,24
Относительная опорная длина по средней линии $t_m$	0,53; 0,55; 0,54; 0,51; 0,52	0,58; 0,6; 0,56; 0,57; 0,59
Ширина сечений наиболее высоких выступов $d_n$ (2.68) на расстоянии $h = 0,06R_{\max}$ от вершины $h$ (рис. 2.13) в поперечном направлении, мкм	125; 119; 137; 148; 162	136; 125; 84; 88; 134
Ширина сечений наиболее высоких выступов $d_{np}$ на расстоянии $h = 0,06R_{\max}$ от вершины $h$ в продольном направлении, мкм	638; 623; 648; 652; 671	678; 646; 625; 663; 692
Наибольшая высота волн $H_e$ , мкм	5; 6,1; 4,8; 4,6; 5,2	2,9; 2,1; 3,4; 3,2; 3,5
Ширина сечений наиболее высоких волн $d_{en}$ на расстоянии $0,06H_e$ от вершины волны в поперечном направлении, мкм	691; 559; 790; 650; 576	304; 130; 406; 392; 443
Ширина сечений наиболее высоких волн $d_{enp}$ на расстоянии $0,06H_e$ от вершины волны в продольном направлении, мкм	1160; 510; 1140 1270; 840	708; 167; 560; 382; 470

1) Исходя из соотношений радиусов колеса натурального локомотива  $R_1$  и модельного ролика  $r_1$  находим симплекс геометрического масштаба

$$C_l = \frac{R_1}{r_1} = \frac{0,525}{0,025} = 21, \quad (2.141)$$

где  $R_1$  – радиус колеса натурального тепловоза 2ТЭ116, м (табл. 2.18);  
 $r_1$  – радиус ролика, м (табл. 2.18).

2) Определим путь трения качения, пройденный колесом натурального локомотива при преодолении круговой кривой на угол  $\pi/2$  радиан

$$L = \frac{\pi}{2} R = \frac{\pi}{2} \cdot 250 = 392,7 \text{ м}, \quad (2.142)$$

где  $R$  – радиус преодолеваемой кривой, м (табл. 2.18).

3) Определим продолжительность трения

$$t_T = \frac{L}{V_p} = \frac{392,7 \cdot 3,6}{70} = 20,2 \text{ с}, \quad (2.143)$$

где  $L$  – путь трения качения, м (2.142);

$V_p$  – заданная скорость движения локомотива, км/ч (табл. 2.18).

4) Определим путь трения скольжения натурального внешнего колеса локомотива относительно внутреннего

$$\begin{aligned} [L_c]_M = [L_c]_H = L_2 - L_1 &= \pi \left( R + \frac{B}{2} \right) \alpha - \pi \left( R - \frac{B}{2} \right) \alpha = \pi B \cdot \alpha = \\ &= \pi B \cdot \frac{L}{\pi R} = \frac{B}{R} L = \frac{1,53}{250} \cdot 392,7 = 2,403 \text{ м}, \end{aligned} \quad (2.144)$$

где  $R$  – радиус криволинейного участка пути, м (табл. 2.18);

$B$  – ширина колеи, м (табл. 2.18);

$\alpha$  – величина дуги окружности, проходимой локомотивом за время трения  $t_T$ ;

$L$  – путь трения качения колёс натурального локомотива, м (2.142).

5) Скорости скольжения как внешнего колеса локомотива относительно внутреннего, так и ролика относительно неподвижной колодки при испытаниях на машине трения типа Amsler (ИИ-5018, СМТ-1, СМЦ-2) по схеме «ролик-колодка» должны быть равны, так как в соответствии с третьей теоремой подобия масштаб скорости скольжения  $C_{vc} = 1$  (2.57)

$$[v_c]_M = [v_c]_H = \left[ \frac{L_c}{t_T} \right]_H = \frac{2,403}{20,2} = 0,119 \text{ м/с}, \quad (2.145)$$

где  $L_c$  – путь трения скольжения натурального внешнего колеса локомотива относительно внутреннего, м (2.144);

$t_T$  – продолжительность трения, с (2.143).

6) Угловую скорость вращения испытываемого модельного ролика определим через известную скорость скольжения  $v_c$

$$[\Omega]_M = \frac{60[v_c]_M}{2\pi[r_1]_M} = \frac{60 \cdot 0,119}{6,28 \cdot 0,025} = 45,4 \text{ об/мин}, \quad (2.146)$$

где  $v_c$  – скорость скольжения, м/с (2.145);

$r_1$  – радиус ролика, м (табл. 2.18).

7) Нормальную нагрузку ролики на колодку (модельного фрикционного контакта «рельс – колесо») определим как

$$[P]_M = \frac{[P]_H}{C_{Aa}} = \frac{[P]_H}{C_l^2} = \frac{112700}{21^2} \approx 256 \text{ Н}, \quad (2.147)$$

где  $P_H$  – статическая нагрузка колеса на рельс натурального подвижного состава (2.8), Н (табл. 2.18);

$C_{Aa}$  – масштаб подобия номинальной площади касания  $A_a$ .

Для последующего нахождения контурной  $A_c$  (2.169) и фактической  $A_r$  (2.174) площади касания необходимо оценить параметры микро- и макрогеометрии поверхностей трения. Как было сказано ранее, указанные па-

раметры должны быть одинаковы как для модельной, так и натурной фрикционной подсистемы. Поэтому в п. 8 – 11 измерения и вычисления будем осуществлять только на основе модельного эксперимента.

8) Определяем эквивалентные параметры микрогеометрии поверхности трения (2.75), снятых с различных участков поверхности образца 1 в форме ролика радиусом  $r_1 = 0,025$  м и контробразца 2 в форме тормозной колодки радиусом кривизны  $r_2 = \infty$  (табл. 2.18):

– среднего арифметического отклонения профиля

$$R_{a1} = \frac{1}{5}(1,4 + 1,39 + 1,39 + 1,36 + 1,37) = 1,382 \text{ мкм}; \quad (2.148)$$

$$R_{a2} = \frac{1}{5}(2,12 + 2,25 + 2,01 + 2,17 + 2,15) = 2,14 \text{ мкм};$$

– наибольшей высоты неровностей профиля

$$R_{\max 1} = \frac{1}{5}(7,24 + 7,43 + 7,14 + 7,15 + 6,96) = 7,184 \text{ мкм}; \quad (2.149)$$

$$R_{\max 2} = \frac{1}{5}(8,82 + 8,32 + 8,63 + 8,46 + 8,35) = 8,516 \text{ мкм};$$

– наибольшей высоты выступа

$$R_{p1} = \frac{1}{5}(3,64 + 3,88 + 3,41 + 3,96 + 3,34) = 3,646 \text{ мкм}; \quad (2.150)$$

$$R_{p2} = \frac{1}{5}(5,3 + 5,41 + 5,44 + 5,45 + 5,24) = 5,368 \text{ мкм};$$

– относительной опорной длины по средней линии (2.72)

$$t_{m1} = \frac{1}{5}(0,53 + 0,55 + 0,54 + 0,51 + 0,52) = 0,53; \quad (2.151)$$

$$t_{m2} = \frac{1}{5}(0,58 + 0,6 + 0,56 + 0,57 + 0,59) = 0,58;$$

– параметра опорной кривой поверхности трения (2.73), зависящего от вида механической обработки

$$v_1 = 2t_{m1} \frac{R_{p1}}{R_{a1}} - 1 = 2 \cdot 0,53 \cdot \frac{3,646}{1,382} - 1 \approx 1,8; \quad (2.152)$$

$$v_2 = 2t_{m2} \frac{R_{p2}}{R_{a2}} - 1 = 2 \cdot 0,58 \cdot \frac{5,368}{2,14} - 1 \approx 1,9,$$

где  $t_{m1}, t_{m2}$  – относительная опорная длина по средней линии (2.151);

$R_{p1}, R_{p2}$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.150);

$R_{a1}, R_{a2}$  – среднее арифметическое отклонение профиля, мкм (2.148);

– параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (от вершины до средней линии) (2.71)

$$b_{p1} = t_{m1} \left( \frac{R_{\max 1}}{R_{p1}} \right)^{v_1} = 0,53 \cdot \left( \frac{7,184}{3,646} \right)^{1,8} \approx 1,8; \quad (2.153)$$

$$b_{p2} = t_{m2} \left( \frac{R_{\max 2}}{R_{p2}} \right)^{v_2} = 0,58 \cdot \left( \frac{8,516}{5,368} \right)^{1,9} \approx 1,4,$$

где  $t_{m1}, t_{m2}$  – относительная опорная длина по средней линии (2.151);

$R_{\max 1}, R_{\max 2}$  – наибольшая высота неровностей профиля, мкм (2.149);

$R_{p1}, R_{p2}$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.150);

$v_1, v_2$  – параметр опорной кривой поверхности трения (2.152).

– средний радиус кривизны вершин выступов (2.67)

$$r_1 = \sqrt{r_{n1} r_{np1}} = \sqrt{35,2 \cdot 485,7} = 130,8 \text{ мкм}; \quad (2.154)$$

$$r_2 = \sqrt{r_{n2} r_{np2}} = \sqrt{20,5 \cdot 428,1} = 93,7 \text{ мкм},$$

где  $r_{n1}, r_{n2}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин выступов для поперечных профилограмм (2.68)

$$\begin{aligned} r_{n1} &= \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{d_{ni}^2}{h_{ni}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{d_{n1i}^2}{R_{\max 1i}} = \\ &= \frac{1000}{0,48 \cdot 400^2} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{125^2}{7,24} + \frac{119^2}{7,43} + \frac{137^2}{7,14} + \frac{148^2}{7,15} + \frac{162^2}{6,96} \right) = 35,2 \text{ мкм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{n2} &= \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{d_{ni}^2}{h_{ni}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{d_{n2i}^2}{R_{\max 2i}} = \\ &= \frac{1000}{0,48 \cdot 400^2} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{136^2}{8,82} + \frac{125^2}{8,32} + \frac{84^2}{8,63} + \frac{88^2}{8,46} + \frac{134^2}{8,35} \right) = 20,5 \text{ мкм}, \end{aligned}$$

$\gamma_B$  и  $\gamma_\Gamma$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для поперечной профилограммы (табл. 2.18);

$s$  – число наиболее высоких выступов;

$d_{ni}$  – ширина сечений на расстоянии  $0,06R_{\max}$  от вершин  $h_n$  (табл. 2.18).

$r_{np}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин выступов для продольной профилограммы (2.68)

$$\begin{aligned} r_{np1} &= \frac{\gamma_{вnp}}{8\gamma_{\Gamma np}^2} \cdot \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{d_{npi}^2}{h_{npi}} = \frac{\gamma_{вnp}}{0,48\gamma_{\Gamma np}^2} \cdot \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{d_{np1i}^2}{R_{\max 1i}} = \\ &= \frac{4000}{0,48 \cdot 1000^2} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{638^2}{7,24} + \frac{623^2}{7,43} + \frac{648^2}{7,14} + \frac{652^2}{7,15} + \frac{671^2}{6,96} \right) = 485,7 \text{ мкм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{np2} &= \frac{\gamma_{вnp}}{8\gamma_{\Gamma np}^2} \cdot \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{d_{npi}^2}{h_{npi}} = \frac{\gamma_{вnp}}{0,48\gamma_{\Gamma np}^2} \cdot \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{d_{np2i}^2}{R_{\max 2i}} = \\ &= \frac{4000}{0,48 \cdot 1000^2} \cdot \frac{1}{5} \left( \frac{678^2}{8,82} + \frac{646^2}{8,32} + \frac{625^2}{8,63} + \frac{663^2}{8,46} + \frac{692^2}{8,35} \right) = 428,1 \text{ мкм}, \end{aligned}$$

$\gamma_{впр}$  и  $\gamma_{гпр}$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для продольной профилограммы (табл. 2.18);

$u$  – число наиболее высоких выступов;

$d_{прi}$  – ширина сечений на расстоянии  $0,06R_{max}$  от вершин  $h_{пр}$  (табл. 2.18).

– для контакта двух шероховатых поверхностей (2.75) получим эквивалентные параметры шероховатости для случая контакта шероховатой с гладкой поверхностью

$$R_{max} = (R_{max1} + R_{max2}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{v_1 + v_2}}\right) =$$

$$= (7,184 + 8,516) \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{1,8+1,9}}\right) = 12,84 \text{ мкм};$$
(2.155)

$$R_p = (R_{p1} + R_{p2}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{v_1 + v_2}}\right) =$$

$$= (3,646 + 5,368) \cdot \left(1 - e^{-\frac{10}{1,8+1,9}}\right) = 7,37 \text{ мкм};$$
(2.156)

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{130,8 \cdot 93,7}{130,8 + 93,7} = 54,6 \text{ мкм};$$
(2.157)

$$b_p = \frac{\Gamma(v_1 + 1)\Gamma(v_2 + 1)}{\Gamma(v_1 + v_2 + 1)} b_{p1} b_{p2} \frac{(R_{max1} + R_{max2})^{v_1 \cdot v_2}}{R_{max1}^{v_1} R_{max2}^{v_2}} =$$

$$= \frac{\Gamma(1,8 + 1)\Gamma(1,9 + 1)}{\Gamma(1,8 + 1,9 + 1)} \cdot 1,8 \cdot 1,4 \cdot \frac{(7,184 + 8,516)^{1,8 \cdot 1,9}}{7,184^{1,8} \cdot 8,516^{1,9}} = 3;$$
(2.158)

$$t_m = \frac{\Gamma(v_1 + 1)\Gamma(v_2 + 1)}{\Gamma(v_1 + v_2 + 1)} t_{m1} t_{m2} \frac{(R_{p1} + R_{p2})^{v_1 \cdot v_2}}{R_{p1}^{v_1} R_{p2}^{v_2}} =$$

$$= \frac{\Gamma(1,8 + 1)\Gamma(1,9 + 1)}{\Gamma(1,8 + 1,9 + 1)} \cdot 0,53 \cdot 0,58 \cdot \frac{(3,646 + 5,368)^{1,8 \cdot 1,9}}{3,646^{1,8} \cdot 5,368^{1,9}} = 0,45;$$
(2.159)

$$v = \sqrt[3]{(v_1 + v_2)^2} = \sqrt[3]{(1,8 + 1,9)^2} = 2,4,$$
(2.160)

где  $R_{max1}, R_{max2}$  – наибольшая высота неровностей профиля, мкм (2.149);

$R_{p1}, R_{p2}$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.150);

$r_1, r_2$  – средний радиус кривизны вершин выступов, мкм (2.154);

$b_{p1}, b_{p2}$  – параметры степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (2.153);

$t_{m1}, t_{m2}$  – относительная опорная длина по средней линии (2.151);

$v_1, v_2$  – параметр опорной кривой поверхности трения (2.152).

**9)** Выполним анализ шероховатости поверхности образца 1 (ролика), контрообразца 2 (колодки) комплексной характеристикой шероховатости поверхности (2.74)

$$\Delta_1 = \frac{R_{\max 1}}{r_1 \cdot (b_{p1})^{1/\nu_1}} = \frac{7,184}{130,8 \cdot 1,8^{1/1,8}} = 0,147;$$

$$\Delta_2 = \frac{R_{\max 2}}{r_2 \cdot (b_{p2})^{1/\nu_2}} = \frac{8,516}{93,7 \cdot 1,4^{1/1,9}} = 0,348$$

и сравнивая полученные результаты с эквивалентными параметрами для обеих шероховатых поверхностей

$$\Delta = \frac{R_{\max}}{r \cdot (b_p)^{1/\nu}} = \frac{12,84}{54,6 \cdot 3^{1/2,4}} = 0,149$$

приходим к выводу, что эквивалентные параметры контактирующих тел вычислены верно,

где  $R_{\max}$  – эквивалентная наибольшая высота неровностей профиля (2.155);  
 $r$  – эквивалентный средний радиус кривизны вершин выступов (2.157);  
 $b_p$  – эквивалентный параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (2.158);  
 $\nu$  – параметр опорной кривой поверхности трения (2.160).

**10)** Для последующего расчёта контурной площади касания  $A_c$  помимо параметров микрогеометрии необходимо нам дополнительно определить параметры макроотклонений типа волнистости для ролика и колодки и их средние значения:

– наибольшей высоты волны  $H_e$ , мкм

$$H_e = H_{e1} + H_{e2} = 5,1 + 3 = 8,1 \text{ мкм}, \quad (2.161)$$

где  $H_{e1} = \frac{1}{5}(5 + 6,1 + 4,8 + 4,6 + 5,2) = 5,1$  мкм – для ролика;

$$H_{e2} = \frac{1}{5}(2,9 + 2,1 + 3,4 + 3,2 + 3,5) = 3 \text{ мкм} – \text{ для колодки};$$

– радиуса кривизны выступов вершин волн  $R_e$ , мкм (2.77)

$$R_e = \frac{R_{e1}R_{e2}}{R_{e1} + R_{e2}} = \frac{1133,1 \cdot 454,9}{1133,1 + 454,9} = 325 \text{ мкм}, \quad (2.162)$$

где  $R_{e1}, R_{e2}$  – радиусы вершин волн образца и контробразца (2.76)

$$R_{e1} = \sqrt{R_{en1}R_{enp1}} = \sqrt{720,7 \cdot 1781,4} = 1133,1 \text{ мкм};$$

$$R_{e2} = \sqrt{R_{en2}R_{enp2}} = \sqrt{320,8 \cdot 645,1} = 454,9 \text{ мкм},$$

$R_{en1}$  и  $R_{en2}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин волн для поперечной профилограммы

$$\begin{aligned}
R_{en1} &= \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{eni}^2}{h_{ei}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{en1i}^2}{H_{e1i}} = \\
&= \frac{1000}{0,48 \cdot 400^2} \cdot \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left( \frac{691^2}{5} + \frac{559^2}{6,1} + \frac{790^2}{4,8} + \frac{650^2}{4,6} + \frac{576^2}{5,2} \right) = \\
&= 720,7 \text{ мкм};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{en2} &= \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{eni}^2}{h_{ei}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{en2i}^2}{H_{e2i}} = \\
&= \frac{1000}{0,48 \cdot 400^2} \cdot \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left( \frac{304^2}{2,9} + \frac{130^2}{2,1} + \frac{406^2}{3,4} + \frac{392^2}{3,2} + \frac{443^2}{3,5} \right) = \\
&= 320,8 \text{ мкм};
\end{aligned}$$

$\gamma_B$  и  $\gamma_\Gamma$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для поперечной профилограммы (табл. 2.18);

$k$  – число наиболее высоких волн;

$d_{eni}$  – ширина сечений наиболее высоких волн на расстоянии  $0,06H_e$  от вершины волны в поперечном направлении (табл. 2.18);

$R_{enp1}$  и  $R_{enp2}$  – среднее значение радиусов кривизны вершин волн для продольной профилограммы

$$\begin{aligned}
R_{enp1} &= \frac{\gamma_{enp}}{8\gamma_{\Gamma np}^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{enpi}^2}{h_{ei}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{enp1i}^2}{H_{e1i}} = \\
&= \frac{4000}{0,48 \cdot 1000^2} \cdot \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1160^2}{5} + \frac{510^2}{6,1} + \frac{1140^2}{4,8} + \frac{1270^2}{4,6} + \frac{840^2}{5,2} \right) = \\
&= 1781,4 \text{ мкм};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{enp2} &= \frac{\gamma_B}{8\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{enpi}^2}{h_{ei}} = \frac{\gamma_B}{0,48\gamma_\Gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{d_{enp2i}^2}{H_{e2i}} = \\
&= \frac{4000}{0,48 \cdot 1000^2} \cdot \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left( \frac{708^2}{2,9} + \frac{167^2}{2,1} + \frac{560^2}{3,4} + \frac{382^2}{3,2} + \frac{470^2}{3,5} \right) = \\
&= 645,1 \text{ мкм};
\end{aligned}$$

$\gamma_{впр}$  и  $\gamma_{гпр}$  – вертикальное и горизонтальное увеличение для продольной профилограммы (табл. 2.18);

$u$  – число наиболее высоких выступов;

$d_{npi}$  – ширина сечений наиболее высоких волн на расстоянии  $0,06H_e$  от вершины волны в продольном направлении (табл. 2.18).

**11)** С использованием оценочного критерия (2.113) определим характер деформаций в контактной зоне

$$K_p = \frac{E^*}{HB} \sqrt{\frac{R_p}{r}} = \frac{1,18 \cdot 10^{11}}{2410 \cdot 10^6} \sqrt{\frac{7,37}{54,6}} = 18,$$

где  $E^*$  – приведённый модуль упругости Юнга (2.78) для одинаковых материалов образца и контрообразца

$$E^* = \left( 2 \frac{1 - \mu^2}{E} \right)^{-1} = \left( 2 \frac{1 - 0,3^2}{2,15 \cdot 10^{11}} \right)^{-1} = 1,18 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad (2.163)$$

$\mu = \mu_1 = \mu_2$  – коэффициент Пуассона материалов тел (табл. 2.18);

$E = E_1 = E_2$  – модуль упругости материалов тел, Па (табл. 2.18);

$HB$  – твёрдость материала, Па (табл. 2.18);

$R_p$  – наибольшая высота эквивалентного выступа, мкм (2.156);

$r$  – средний радиус кривизны вершин эквивалентных выступов, мкм (2.157).

Так как  $K_p \geq 3$ , то фрикционному взаимодействию в контактной области характерна пластичные формы деформации. Последующие расчёты значений контурной  $A_c$  и фактической  $A_r$  площади касания, контактной температуры  $\Theta^*$  и температуры вспышки  $\Theta_{всп}$  будем выполнять для пластичного контакта.

**12)** Определим по формуле Герца номинальную площадь касания (2.79) для случая контакта двух цилиндров с параллельными осями – для модельного контакта, м<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} [A_a]_M &= l_1 \cdot 1,522 \sqrt{\frac{[P]_M}{l_1 E^*} \left/ \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right.} = \\ &= 0,002 \cdot 1,522 \sqrt{\frac{256}{0,002 \cdot 1,18 \cdot 10^{11}} \left/ \left( \frac{1}{0,025} + \frac{1}{\infty} \right) \right.} = 5 \cdot 10^{-7}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

где  $l_1$  – ширина участка поверхности трения

$$l_1 = \frac{L_T}{C_l} = \frac{0,042}{21} = 0,002 \text{ м}; \quad (2.165)$$

$L_T$  – ширина рабочей поверхности катания колёс, м (табл. 2.18);

$C_l$  – геометрический масштаб (2.141);

$[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);

$E^*$  – приведённый модуль упругости Юнга, Па (2.163);

$r_1$  – радиус ролика, м (табл. 2.18);

$r_2$  – радиус колодки, м (табл. 2.18).

– для натурального контакта, м<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} [A_a]_H &= L_T \cdot 1,522 \sqrt{\frac{[P]_H}{L_T E^*} \left/ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right.} = \\ &= 0,042 \cdot 1,522 \sqrt{\frac{112700}{0,042 \cdot 1,18 \cdot 10^{11}} \left/ \left( \frac{1}{0,525} + \frac{1}{\infty} \right) \right.} = 2,2 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \quad (2.166)$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте колеса с рельсом, Н (2.8);

$R_1$  – радиус тягового колеса, м (табл. 2.18);

$R_2$  – радиус кривизны рельса, м.

### 13) Оценим номинальное давление

– модельного контакта

$$[Q_a]_M = \frac{[P]_M}{[A_a]_M} = \frac{256}{5 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-6} = 511 \text{ МПа}, \quad (2.167)$$

где  $[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);

$[A_a]_M$  – номинальная площадь касания модельного контакта, м<sup>2</sup> (2.164),  
– натурального контакта

$$[Q_a]_H = \frac{[P]_H}{[A_a]_H} = \frac{112700}{2,2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 511 \text{ МПа},$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н;

$[A_a]_H$  – номинальная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.166).

Видим, что несмотря на изменение нагрузок и номинальных площадей касания номинальное давление во фрикционном контакте модельной и натурной систем идентично и масштаб подобия равен

$$C_{Q_a} = \frac{[Q_a]_H}{[Q_a]_M} = \frac{511}{511} = 1. \quad (2.168)$$

14) Далее следует подобрать метод расчёта *контурной площади касания* для пластичного контакта (оценочный критерий (2.113)  $K_p \geq 3$ ). Так как  $R_{\max} / H_e = 12,84 / 8,1 = 1,6 \geq 0,1$  и число контактирующих волн  $n_e > 3$ , то выбираем метод расчёта по формуле (2.81). Для пластичного контакта и отношении  $E^*/HB = 2,15 \cdot 10^{11} / 2,41 \cdot 10^9 = 49 < [50]$  по табл. 2.6 выбираем коэффициенты, зависящие от высоты волн, и коэффициенты, учитывающие влияние шероховатости на деформацию волн.

Тогда получим значение контурной площади модельного контакта

$$\begin{aligned} [A_c]_M &= [A_a]_M K_e K_w \left[ \frac{[P]_M}{[A_a]_M E^* \sqrt{H_e}} \sqrt{\frac{2R_e}{H_e}} \right]^{v_e + \delta_w} = \\ &= 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2,38 \cdot 1,55 \cdot \left[ \frac{256}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 1,18 \cdot 10^{11}} \sqrt{\frac{2 \cdot 325}{8,1}} \right]^{3+1,5} = \\ &= 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2, \end{aligned} \quad (2.169)$$

где  $[A_a]_M$  – номинальная площадь касания модельного контакта, м<sup>2</sup> (2.164);

$K_e = 2,38$ ;  $v_e = 3$  – коэффициенты, зависящие от высоты волн;

$K_w = 1,55$ ;  $\delta_w = 1,5$  – коэффициенты, учитывающие влияние шероховатости на деформацию волн;

$[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);

$E^*$  – приведённый модуль упругости, Па (2.163);

$R_\epsilon$  – приведённый радиус кривизны выступов вершин волн, мкм (2.162);

$H_\epsilon$  – приведённая высота волны, мкм (2.161).

– для натурального контакта «колесо – рельс»

$$\begin{aligned}
 [A_c]_H &= [A_a]_H K_\epsilon K_w \left[ \frac{[P]_H}{[A_a]_H E^*} \sqrt{\frac{2R_\epsilon}{H_\epsilon}} \right]^{\frac{\nu_\epsilon}{\nu_\epsilon + \delta_w}} = \\
 &= 2,2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,38 \cdot 1,55 \cdot \left[ \frac{112700}{2,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,18 \cdot 10^{11}} \sqrt{\frac{2 \cdot 325}{8,1}} \right]^{3+1,5} = \quad (2.170) \\
 &= 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2,
 \end{aligned}$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н (табл. 2.18);

$[A_a]_H$  – номинальная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.166).

**15)** Аналогично п. 13 оценим контурное давление

– модельной фрикционной системы

$$[Q_c]_M = \frac{[P]_M}{[A_c]_M} = \frac{256}{2,1 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-6} = 1209 \text{ МПа}, \quad (2.171)$$

где  $[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);

$[A_c]_M$  – контурная площадь касания модельного контакта, м<sup>2</sup> (2.169),

– натурной фрикционной системы

$$[Q_c]_H = \frac{[P]_H}{[A_c]_H} = \frac{112700}{9,3 \cdot 10^{-5}} \cdot 10^{-6} = 1209 \text{ МПа}, \quad (2.172)$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н (табл. 2.18).

$[A_c]_H$  – контурная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.170).

Как и прежде (2.168) видим, что масштаб подобия контурного давления

$$C_{Q_c} = \frac{[Q_c]_H}{[Q_c]_M} = \frac{1209}{1209} = 1, \quad (2.173)$$

где  $[Q_c]_H$ ,  $[Q_c]_M$  – значения контурного давления натурального контакта «колесо – рельс» (2.172) и его модели (2.171).

**16)** Определим среднюю фактическую площадь касания (2.125) для

упруго-пластичного

– модельного контакта

$$[A_r]_M = \frac{[P]_M}{(K_3 B)^{\frac{\nu}{\nu + \varpi}} \cdot \left( \frac{R_p}{r} \right)^{\frac{\nu \varpi}{\nu + \varpi}} \cdot \left( \frac{[P]_M}{\alpha t_m [A_c]_M} \right)^{\frac{\varpi}{\nu + \varpi}}} = \quad (2.174)$$

$$= \frac{256}{(0,863 \cdot 3,57 \cdot 10^9)^{\frac{2,4}{2,4+0,24}} \cdot \left(\frac{7,37}{54,6}\right)^{\frac{2,40,24}{2,4+0,24}} \cdot \left(\frac{256}{0,7 \cdot 0,45 \cdot 2,1 \cdot 10^{-7}}\right)^{\frac{0,24}{2,4+0,24}}} =$$

$$= 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2,$$

где  $[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);

$B$  – коэффициент, характеризующий деформационные свойства материала (табл. 2.10), при  $R_a > 0,16$  мкм и пластичной с упрочнением деформацией

$$B = 2^{\varpi} H_{\text{MT}} = 2^{0,24} \cdot 3,03 \cdot 10^9 = 3,57 \cdot 10^9 \text{ Па},$$

$H_{\text{MT}}$  – максимальная твёрдость по Майеру (2.126)

$$H_{\text{MT}} = \frac{2HB}{\vartheta^{0,5\vartheta} (\vartheta - 2)^{0,5(\vartheta-2)} (\vartheta - 1)^{1-\vartheta}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2410 \cdot 10^6}{2,24^{0,5 \cdot 2,24} (2,24 - 2)^{0,5(2,24-2)} (2,24 - 1)^{1-2,24}} = 3,03 \cdot 10^9 \text{ Па};$$

$HB$  – твёрдость материалов ролика и колодки, Па (табл. 2.18);

$\vartheta$  – коэффициент, характеризующий упрочнение материала; для материалов железнодорожных колёс и рельсов  $\vartheta = 2,24$ ;

$\varpi$  – коэффициент, характеризующий деформационные свойства материала (табл. 2.10), для упрочнённой колёсной и рельсовой стали  $\varpi = 0,24$ ;

$K_3$  – коэффициент, характеризующий шероховатость и упрочнение материала

$$K_3 = \frac{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\varpi + 2)}{\Gamma(\nu + \varpi + 1)} = \frac{\Gamma(2,4 + 1)\Gamma(0,24 + 2)}{\Gamma(2,4 + 0,24 + 1)} = 0,863;$$

$\alpha$  – коэффициент упругой осадки при упругопластическом контакте, при отношении  $S_m / R_z \approx 1$  и твёрдости материала  $HB > 400$  МПа по табл. 2.9 и 2.10 принимаем величину  $\alpha = 0,7$ ;

$R_p$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.156);

$r$  – средний радиус кривизны вершин выступов, мкм (2.157);

$\nu$  – параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки (2.160);

$t_m$  – относительная опорная длина по средней линии (2.159);

$[A_c]$  – контурная площадь контакта модельного контакта, м<sup>2</sup> (2.169).

– натурального контакта

$$[A_r]_H = \frac{[P]_H}{(K_3 B)^{\frac{\nu}{\nu+\varpi}} \cdot \left(\frac{R_p}{r}\right)^{\frac{\nu\varpi}{\nu+\varpi}} \cdot \left(\frac{[P]_H}{\alpha t_m [A_c]_H}\right)^{\frac{\varpi}{\nu+\varpi}}} = \tag{2.175}$$

$$= \frac{112700}{(0,863 \cdot 3,57 \cdot 10^9)^{\frac{2,4}{2,4+0,24}} \cdot \left(\frac{7,37}{54,6}\right)^{\frac{2,40,24}{2,4+0,24}} \cdot \left(\frac{112700}{0,7 \cdot 0,45 \cdot 9,3 \cdot 10^{-5}}\right)^{\frac{0,24}{2,4+0,24}}} =$$

$$= 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2,$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н (табл. 2.18).  
 $[A_c]_H$  – контурная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.170);

**17) Оценим фактическое контактное давление**  
– модельного контакта

$$[Q_r]_M = \frac{[P]_M}{[A_r]_M} = \frac{256}{1,3 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-6} = 2033 \text{ МПа}, \quad (2.176)$$

где  $[P]_M$  – нормальная нагрузка на модельный контакт, Н (2.147);  
 $[A_r]_M$  – фактическая площадь касания, м<sup>2</sup> (2.174).

Характер изменения фактического контактного давления в функции коэффициента упрочнения материала  $\vartheta$  представлен на рис. 2.36.

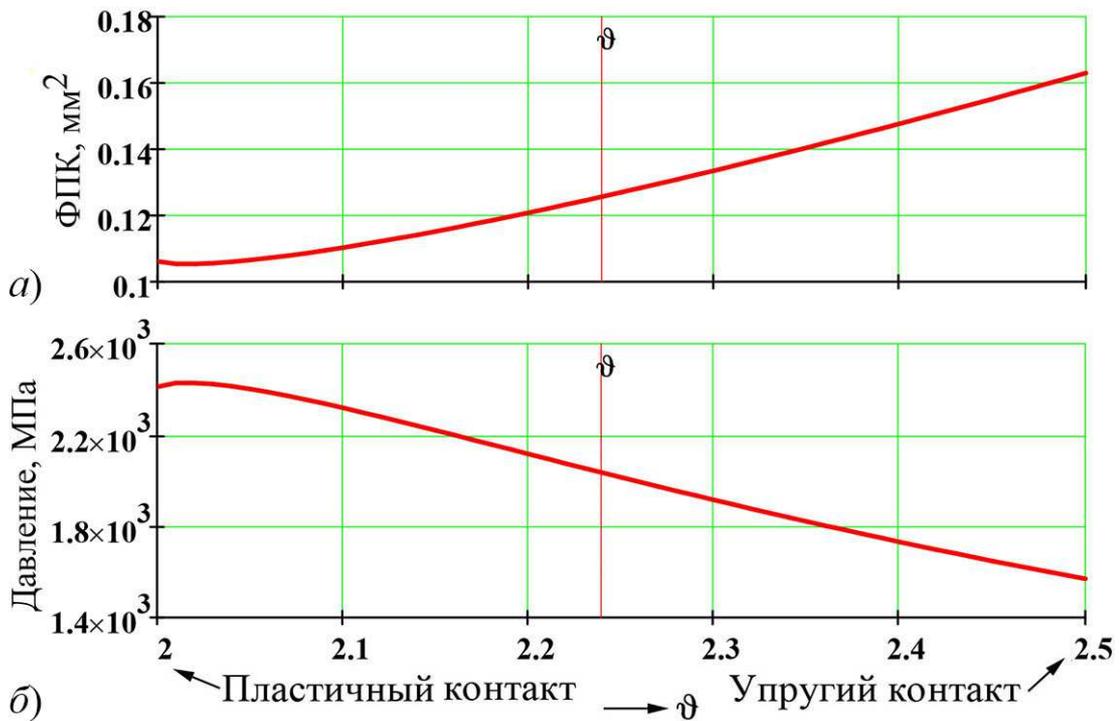


Рис. 2.36 – Зависимость фактической площади касания  $A_r$  (a) и контактного давления  $Q_r$  колодки на ролик от коэффициента упрочнения материала  $\vartheta$  – натурального контакта

$$[Q_r]_H = \frac{[P]_H}{[A_r]_H} = \frac{112700}{5,5 \cdot 10^{-5}} \cdot 10^{-6} = 2033 \text{ МПа}, \quad (2.177)$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н (табл. 2.18).  
 $[A_r]_H$  – фактическая площадь касания, м<sup>2</sup> (2.175).

Таким образом, масштаб подобия фактического давления

$$C_{Q_r} = \frac{[Q_r]_H}{[Q_r]_M} = \frac{2033}{2033} = 1, \quad (2.178)$$

где  $[Q_r]_H, [Q_r]_M$  – значения фактического давления натурального контакта «колесо – рельс» (2.177) и его модели (2.176).

**18)** Определим основные характеристики фактической площади касания (2.127):

– сближения контактирующих поверхностей модельной  $[h]_M$  и натурной  $[h]_H$  трибосистем

$$[h]_M = R_p \left( \frac{[A_r]_M}{[A_c]_M t_m} \right)^{\frac{1}{\nu}} = 7,37 \left( \frac{1,3 \cdot 10^{-7}}{2,1 \cdot 10^{-7} \cdot 0,45} \right)^{\frac{1}{2,4}} = 8,28 \text{ мкм}; \quad (2.179)$$

$$[h]_H = R_p \left( \frac{[A_r]_H}{[A_c]_H t_m} \right)^{\frac{1}{\nu}} = 7,37 \left( \frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{9,3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,45} \right)^{\frac{1}{2,4}} = 8,28 \text{ мкм},$$

где  $R_p$  – наибольшая высота выступа, мкм (2.156);

$[A_r]_M, [A_r]_H$  – фактическая площадь касания модельной (2.174) и натурной (2.175) системы, м<sup>2</sup>;

$[A_c]_M, [A_c]_H$  – контурная площадь контакта (2.169) и (2.170), м<sup>2</sup>;

$t_m$  – относительная опорная длина по средней линии (2.159);

$\nu$  – параметр опорной кривой поверхности трения, зависящий от вида механической обработки (2.160),

– увеличения количества пятен фактического контакта по сравнению с числом вершин на номинальной площади поверхности  $A_a$  модельного  $[n_r]_M$  и натурального  $[n_r]_H$  контактов

$$[n_r]_M = [n_a]_M \left( \frac{[A_r]_M}{[A_c]_M t_m} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = 1 \left( \frac{1,3 \cdot 10^{-7}}{2,1 \cdot 10^{-7} \cdot 0,45} \right)^{\frac{2,4-1}{2,4}} = 1,18;$$

$$[n_r]_H = [n_a]_H \left( \frac{[A_r]_H}{[A_c]_H t_m} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = 1 \left( \frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{9,3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,45} \right)^{\frac{2,4-1}{2,4}} = 1,18.$$

– средней площади пятен модельного  $[\Delta A_r]_M$  и натурального  $[\Delta A_r]_H$  контакта

$$[\Delta A_r]_M = \frac{[A_r]_M}{[n_r]_M} = \frac{1,3 \cdot 10^{-7}}{1,18} = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2; \quad (2.180)$$

$$[\Delta A_r]_H = \frac{[A_r]_H}{[n_r]_H} = \frac{5,5 \cdot 10^{-5}}{1,18} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

– среднего фактического давления модельного  $[\Delta Q_r]_M$  и натурального  $[\Delta Q_r]_H$  фрикционного контакта

$$[\Delta Q_r]_M = \frac{[P]_M}{[\Delta A_r]_M} = \frac{256}{1,1 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-6} = 2393 \text{ МПа}; \quad (2.181)$$

$$[\Delta Q_r]_H = \frac{[P]_H}{[\Delta A_r]_H} = \frac{112700}{4,7 \cdot 10^{-5}} \cdot 10^{-6} = 2393 \text{ МПа}.$$

– среднего расстояния между пятнами модельного  $[\bar{S}]_M$  и натурального  $[\bar{S}]_H$  контактов

$$[\bar{S}]_M = \sqrt{\frac{[A_c]_M}{[n_r]_M}} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{-7}}{1,18}} = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$[\bar{S}]_H = \sqrt{\frac{[A_c]_H}{[n_r]_H}} = \sqrt{\frac{9,3 \cdot 10^{-5}}{1,18}} = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (2.182)$$

Таким образом, мы получили следующие значения масштабов подобия модельного и натурального фрикционного контакта:

- а) сближения контактирующих поверхностей  $C_h = 1$ ;
- б) увеличения количества пятен фактического контакта по сравнению с числом вершин на номинальной площади поверхности  $C_{nr} = 1$ ;
- в) средней площади пятен контакта  $C_{\Delta Ar} = 4,7 \cdot 10^{-5} / 1,1 \cdot 10^{-7} = 441$ , то есть  $C_{\Delta Ar} = C_l^2$ ;
- г) среднего фактического давления  $C_{\Delta Qr} = 1$ ;
- д) среднего расстояния между пятнами контакта  $C_{\bar{S}} = 8,9 \cdot 10^{-3} / 4,2 \cdot 10^{-4} = 21$ , то есть  $C_{\bar{S}} = C_l$ .

**19)** Для оценки максимальной температуры во фрикционном контакте сначала вычислим определяющие её параметры.

Полная работа сил трения (2.105) за продолжительность трения  $t_T$

$$W_{\text{тр}} = m_{\text{п}} L_c (a_c + fg) = \frac{m_{\text{п}}^2 a_c^2 t_T^2}{2m_{\text{п}}} + \frac{m_{\text{п}} a_c f P_M t_T^2}{2m_{\text{п}}}, \text{ Дж} \quad (2.183)$$

где  $m_{\text{п}}$  – масса механической подсистемы, воздействующей на контакт, кг  
– для модельной трибосистемы

$$[m_{\text{п}}]_M = [P]_M / g = 256 / 9,81 = 26 \text{ кг}; \quad (2.184)$$

$[P]_M$  – нагрузка на номинальном контакте, Н (2.147);

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

– для натурной трибосистемы

$$[m_{\text{п}}]_H = [P]_H / g = 112700 / 9,81 = 11481,7 \text{ кг}; \quad (2.185)$$

$L_c$  – путь трения скольжения, м (2.144);

$a_c$  – ускорение при равноускоренном движении с целью поддержания постоянной скорости движения вследствие наличия сил трения, м/с<sup>2</sup>

$$a_c = \frac{2L_c}{t_T^2} = \frac{2 \cdot 2,403}{20,2^2} = 0,012; \quad (2.186)$$

$t_T$  – продолжительность трения, с (2.143);

$f$  – коэффициент трения (2.6) при взаимодействии ролика и колодки, моделей натурального колеса и рельса при движении в криволинейном участке пути

$$f = 0,25 + \frac{8}{100 + 20V_p} = 0,25 + \frac{8}{100 + 20 \cdot 70} = 0,255; \quad (2.187)$$

$V_p$  – скорость поступательного движения натурального подвижного состава, км/ч (табл. 2.18);

Подставив исходные данные, получим полную работу сил трения (2.183) за время трения  $t_T$

– для модельной трибосистемы

$$\begin{aligned} [W_{\text{тр}}]_M &= [m_{\text{п}}]_M L_c (a_c + fg) = \\ &= 26 \cdot 2,403 \cdot (0,012 + 0,255 \cdot 9,81) = 157,56 \text{ Дж}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

где  $[m_{\text{п}}]_M$  – масса модельной подсистемы, кг (2.184);

$L_c$  – путь трения скольжения колодки относительно ролика, м (2.144);

$a_c$  – ускорение при равноускоренном движении, м/с<sup>2</sup> (2.186);

$f$  – коэффициент трения колодки по ролику (2.187),

– для натурной трибосистемы

$$\begin{aligned} [W_{\text{тр}}]_H &= \frac{[m_{\text{п}}]_H^2 a_c^2 t_T^2}{2[m_{\text{п}}]_H} + \frac{[m_{\text{п}}]_H a_c f [P]_H t_T^2}{2[m_{\text{п}}]_H} = \frac{a_c t_T^2}{2} ([m_{\text{п}}]_H a_c + f [P]_H) = \\ &= \frac{0,012 \cdot 20,2^2}{2} (11481,7 \cdot 0,012 + 0,255 \cdot 112700) = 69483,1 \text{ Дж}, \end{aligned} \quad (2.189)$$

где  $[m_{\text{п}}]_H$  – масса подсистемы «колесо – рельс», кг (2.185);

$[P]_H$  – нормальная нагрузка в контакте «колесо – рельс», Н (табл. 2.18).

Определим коэффициенты температуропроводности материалов ролика и колодки,  $a_1 = a_2 = a$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{37}{490 \cdot 7850} = 9,62 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad (2.190)$$

где  $\lambda$  – коэффициенты теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$c$  – коэффициенты удельной теплоёмкости, Дж/кг·°С (табл. 2.18);

$\rho$  – плотность материалов, кг/м<sup>3</sup> (табл. 2.18);

Определим фактические размеры тел  $b_1$  и  $b_2$  в направлении нормального теплового потока принимаем для натурной системы равными толщине чистового бандажа колёс  $B_1$  и высоте головки рельса Р65 –  $B_2$  (табл. 2.18). В этом случае для модели будем иметь поверхностную толщину ролика  $b_1$  и колодки  $b_2$  (рис. 2.37,б), м

$$[b_1]_M = \frac{B_1}{C_l} = \frac{0,075}{21} = 3,6 \cdot 10^{-3}; \quad [b_2]_M = \frac{B_2}{C_l} = \frac{0,035}{21} = 1,7 \cdot 10^{-3}, \quad (2.191)$$

где  $C_l$  – геометрический масштаб модельных испытаний (2.141),

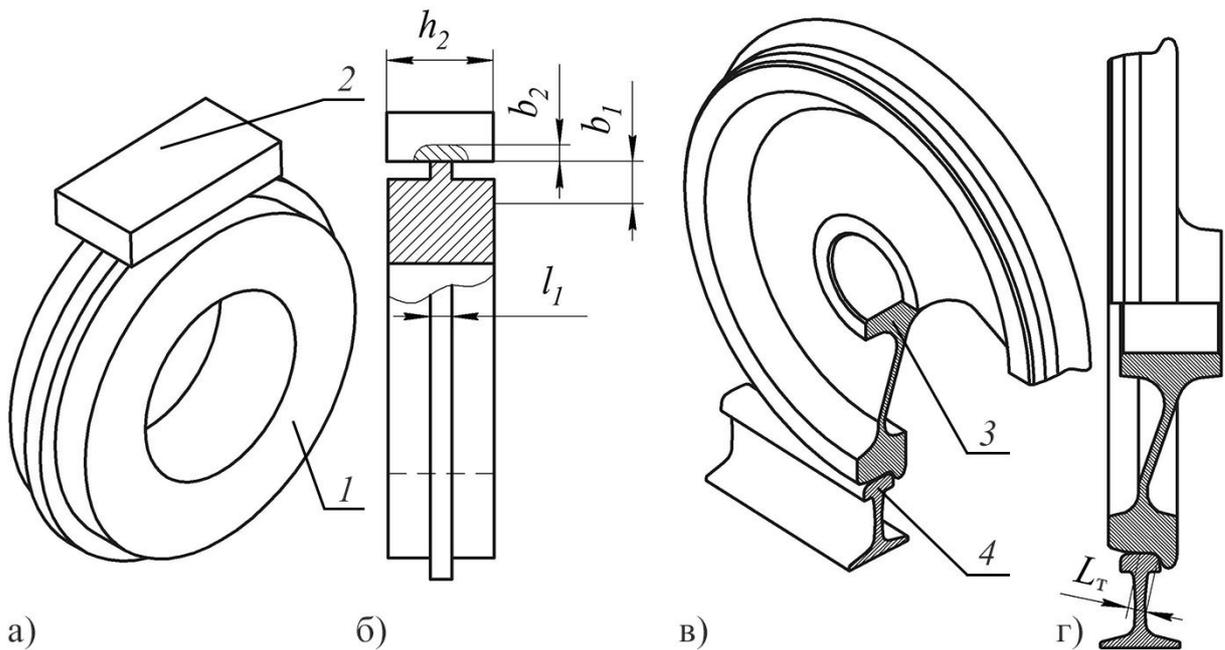


Рис. 2.37 – Расчётные схемы трибосистем: *а* – модельной «ролик 1 – колодка 2» на машине трения типа Amsler; *б* – эффективные теплопоглощающие объёмы поверхностей трения ролика 1 и колодки 2; *в* – натурной «колесо 3 – рельс 4»; *г* – номинальная ширина участка поверхности трения  $L_T$  колеса с рельсом, м

Определим эффективную толщину (2.89) поверхности трения модельной и натурной трибосистем

$$b_3 = \sqrt{3at_T} = \sqrt{3 \cdot 9,62 \cdot 10^{-6} \cdot 20,2} = 0,024 \text{ м}, \quad (2.192)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$  (2.190);

$t_T$  – эффективная продолжительность распространения теплоты (2.143).

Толщина теплопоглощающего слоя материала пар трения (2.88) – модельной трибосистемы (2.193)

$$[b_1]_M = \text{if}(b_3 \leq [b_1]_M; b_3; [b_1]_M) = \text{if}(0,024 \leq 3,6 \cdot 10^{-3}; 0,024; 3,6 \cdot 10^{-3}) = 3,6 \cdot 10^{-3};$$

$$[b_2]_M = \text{if}(b_3 \leq [b_2]_M; b_3; [b_2]_M) = \text{if}(0,024 \leq 1,7 \cdot 10^{-3}; 0,024; 1,7 \cdot 10^{-3}) = 1,7 \cdot 10^{-3}.$$

– натурной трибосистемы (2.194)

$$[B_1]_H = \text{if}(b_3 \leq [B_1]_H; b_3; [B_1]_H) = \text{if}(0,024 \leq 0,075; 0,024; 0,075) = 0,024;$$

$$[B_2]_H = \text{if}(b_3 \leq [B_2]_H; b_3; [B_2]_H) = \text{if}(0,024 \leq 0,035; 0,024; 0,035) = 0,024.$$

Находим соотношения (2.91) между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры

– ролика и колодки (2.195)

$$[Fo_1]_M = \text{if} \left( b_3 \leq [b_1]_M; \frac{1}{3}; \frac{at_T}{[b_1]_M^2} \right) = \text{if} \left( 0,024 \leq 3,6 \cdot 10^{-3}; \frac{1}{3}; \frac{9,62 \cdot 10^{-6} \cdot 20,2}{(3,6 \cdot 10^{-3})^2} \right) = 15,2;$$

$$[Fo_2]_M = \text{if} \left( b_3 \leq [b_2]_M; \frac{1}{3}; \frac{at_T}{[b_2]_M^2} \right) = \text{if} \left( 0,024 \leq 1,7 \cdot 10^{-3}; \frac{1}{3}; \frac{9,62 \cdot 10^{-6} \cdot 20,2}{(1,7 \cdot 10^{-3})^2} \right) = 70.$$

Таким образом, за время трения  $t_T$  в теплопоглощении будет участвовать вся толщина ролика и колодки и оказывать воздействия на значения объёмных, поверхностных температур и температуры «вспышки».

Найдём числа Фурье натурной системы «колесо – рельс» (2.196)

$$[Fo_1]_H = \text{if} \left( b_3 \leq [B_1]_H; \frac{1}{3}; \frac{at_T}{[B_1]_H^2} \right) = \text{if} \left( 0,024 \leq 0,075; \frac{1}{3}; \frac{9,62 \cdot 10^{-6} \cdot 20,2}{0,075^2} \right) = \frac{1}{3};$$

$$[Fo_2]_H = \text{if} \left( b_3 \leq [B_2]_H; \frac{1}{3}; \frac{at_T}{[B_2]_H^2} \right) = \text{if} \left( 0,024 \leq 0,035; \frac{1}{3}; \frac{9,62 \cdot 10^{-6} \cdot 20,2}{0,035^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Анализ полученных значений показывает, что на объёмную  $\Theta_V$  и поверхностную  $\Theta^*$  температуры будут оказывать только эффективная толщина поверхностного слоя  $b_3$  натуральных поверхностей колеса и рельса.

Из-за конструктивных особенностей крепления колодки в образце-держатель машины трения типа Amsler в моделировании геометрических размеров колодки, моделирующей рельс, наблюдается нарушение в расчётной длине колодки  $l_k = L_p / C_l = 1 / 21 = 0,048$  м по сравнению в реальной длиной  $l_k = 0,015$  м (табл. 2.18). В соответствии с третьей теоремой подобия установим требование, чтобы контактные площади поверхностей модели и натурны (2.92) были равны. Для этого определим контактную площадь колеса и рельса натурной системы,  $\text{м}^2$

$$[A_{k1}]_H = 2\pi R_1 L_T = 6,28 \cdot 0,525 \cdot 0,042 = 0,14;$$

$$[A_{k2}]_H = L_p L_T = 1 \cdot 0,042 = 0,042,$$
(2.197)

$R_1$  – радиус колеса, м (табл. 2.18);

$L_T$  – ширина рабочей поверхности катания колёс, м (табл. 2.18);

$L_p$  – погонная длина рельса, м (табл. 2.18),

а также контактной площади  $[A_{k1}]_M$  ролика,  $[A_{k2}]_M$  колодки и ширины  $\delta_k$  колодки модельной системы

$$[A_{k1}]_M = 2\pi r_1 l_1 = 6,28 \cdot 0,025 \cdot 0,002 = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$[A_{k2}]_M = \frac{[A_{k2}]_H}{C_l^2} = \frac{0,042}{21^2} = 9,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2,$$
(2.198)

$$\delta_{\kappa} = \frac{[A_{\kappa 2}]_M}{l_{\kappa}} = \frac{9,5 \cdot 10^{-5}}{0,015} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

где  $r_1$  – радиус ролика, м (табл. 2.18);

$l_1$  – ширина участка поверхности трения, м (2.165);

$[A_{\kappa 2}]_H$  – контактная площадь рельса, м<sup>2</sup> (2.197);

$C_l^2$  – масштаб подобия площади;

$l_{\kappa}$  – длина рельсовой колодки, м (табл. 2.18).

Определим массы эффективных теплопоглощающих объёмов – ролика и колодки (рис. 2.37,б) модельной трибосистемы, кг

$$\begin{aligned} [m_{\varepsilon 1}]_M &= [A_{\kappa 1}]_M [b_1]_M \rho = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 7850 = 8,8 \cdot 10^{-3}; \\ [m_{\varepsilon 2}]_M &= [A_{\kappa 2}]_M [b_2]_M \rho = 9,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 7850 = 1,2 \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (2.199)$$

где  $[A_{\kappa 1}]_M, [A_{\kappa 2}]_M$  – контактные площади, м<sup>2</sup> (2.198);

$[b_1]_M, [b_2]_M$  – толщины теплопоглощающих объёмов, м (2.193);

$\rho$  – плотность материалов, кг/м<sup>3</sup> (табл. 2.18);

– колеса и рельса (рис. 2.37,з) натурной трибосистемы, кг

$$\begin{aligned} [m_{\varepsilon 1}]_H &= [A_{\kappa 1}]_H [B_1]_H \rho = 0,14 \cdot 0,024 \cdot 7850 = 26,3; \\ [m_{\varepsilon 2}]_H &= [A_{\kappa 2}]_H [B_2]_H \rho = 0,042 \cdot 0,024 \cdot 7850 = 8,0, \end{aligned} \quad (2.200)$$

где  $[A_{\kappa 1}]_H, [A_{\kappa 2}]_H$  – контактные площади, м<sup>2</sup>

$[B_1]_H, [B_2]_H$  – толщины теплопоглощающих объёмов, м (2.194).

Определим коэффициент взаимного перекрытия модельного и натурного контактов

$$\begin{aligned} [K_{\varepsilon 3}]_M &= \frac{[A_{\kappa 2}]_M}{[A_{\kappa 1}]_M} = \frac{9,5 \cdot 10^{-5}}{3,1 \cdot 10^{-4}} = 0,303; \\ [K_{\varepsilon 3}]_H &= \frac{[A_{\kappa 2}]_H}{[A_{\kappa 1}]_H} = \frac{0,042}{0,14} = 0,303. \end{aligned} \quad (2.201)$$

где  $[A_{\kappa 1}]_M, [A_{\kappa 2}]_M$  – контактные площади ролика и колодки (2.198);

$[A_{\kappa 1}]_H, [A_{\kappa 2}]_H$  – контактные площади колеса и рельса (2.197).

Для схемы контакта, изображённой на рис. 2.37, определим коэффициенты (2.117), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём

– ролика и колодки

$$\begin{aligned} [\Psi_{V_1}]_M &= 1; \\ [\Psi_{V_2}]_M &= \frac{l_1}{l_1 + \pi [b_2]_M / 4} = \frac{0,002}{0,002 + 3,14 \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} / 4} = 0,604, \end{aligned} \quad (2.202)$$

где  $l_1$  – ширина участка поверхности трения ролика, м (2.165);

$[b_2]_M$  – поверхностная толщина колодки, м (2.191),

– колеса и рельса

$$\begin{aligned} [\Psi_{V_1}]_H &= \frac{L_T}{L_T + \pi[B_1]_H/4} = \frac{0,042}{0,042 + 3,14 \cdot 0,024/4} = 0,689; \\ [\Psi_{V_2}]_H &= \frac{L_T}{L_T + \pi[B_2]_H/4} = \frac{0,042}{0,042 + 3,14 \cdot 0,024/4} = 0,689, \end{aligned} \quad (2.203)$$

где  $L_T$  – ширина участка поверхности трения колеса и рельса, м (табл. 2.18);  
 $[B_1]_H, [B_2]_H$  – поверхностная толщина колеса и рельса, м (2.194).

Для моделирования движения подвижного состава в криволинейном участке пути с постоянной скоростью примем временные факторы мощности (2.111) и работы (2.112) трения (рис. 2.38,а)

$$\tau_N(t) = 1,4 \cdot t^{0,1} \cdot (1 - 0,409 \cdot t); \quad \tau_W(t) = \int_0^t \tau_N(x) dx. \quad (2.204)$$

Для определения объёмных и поверхностных температур коэффициенты связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами ролика и колодки модельной трибосистемы (рис. 2.37,б) и колеса и рельса натурной трибосистемы (рис. 2.37,в) вычислим в соответствии с (2.128), а коэффициент распределения тепловых потоков – в соответствии с выражением (2.129).

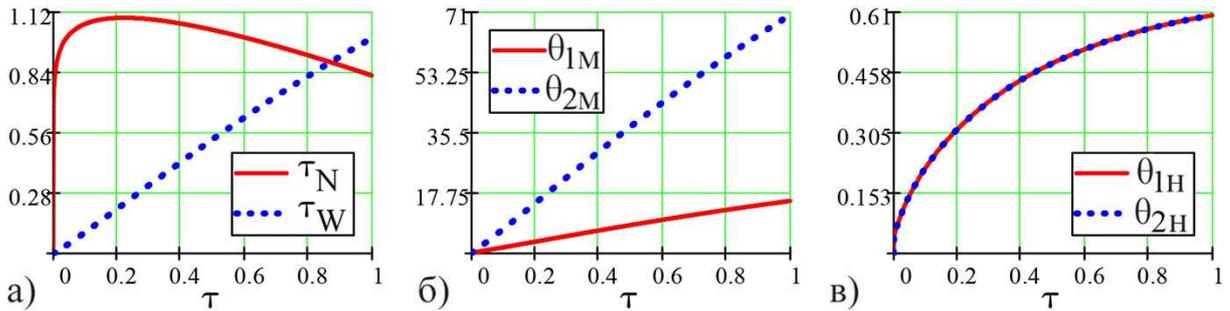


Рис. 2.38 – Временные факторы: мощности и работы трения (а); коэффициентов связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами ролика и колодки (б); колеса и рельса (в)

**20)** Номинальному контактному давлению 511 МПа (2.167) соответствуют следующие значения объёмной температуры (2.130) за продолжительность трения  $t_T$ .  
– модельной трибосистемы

$$\begin{aligned} [\Theta_{V_1}(t)]_M &= \frac{[W_{тп}]_M}{[m_{э1}]_M \cdot c} \cdot \frac{(1 - [\alpha_{тп}(t)]_M) \cdot [\Psi_{V_1}]_M}{t_T} = \\ &= \frac{157,56}{8,8 \cdot 10^{-3} \cdot 490} \cdot \frac{(1 - [\alpha_{тп}(t)]_M) \cdot 1}{20,2} = 1,8 \cdot (1 - [\alpha_{тп}(t)]_M); \end{aligned} \quad (2.205)$$

$$[\Theta_{V_1}(1)]_M = 1,01 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$\begin{aligned} [\Theta_{V_2}(t)]_M &= \frac{[W_{\text{тр}}]_M}{[m_{\text{э}2}]_M \cdot c} \cdot \frac{[\alpha_{\text{тр}}(t)]_M \cdot [\Psi_{V_2}]_M}{t_{\text{T}}} = \\ &= \frac{157,56}{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 490} \cdot \frac{[\alpha_{\text{тр}}(t)]_M \cdot 0,604}{20,2} = 7,7 \cdot [\alpha_{\text{тр}}(t)]_M; \\ [\Theta_{V_2}(1)]_M &= 3,4 \text{ }^\circ\text{C}, \end{aligned}$$

где  $[W_{\text{тр}}]_M$  – работа сил трения модельной трибосистемы, Дж (2.188);

$[m_{\text{э}1}]_M, [m_{\text{э}2}]_M$  – массы эффективных теплопоглощающих объёмов модельной системы (2.199);

$c$  – коэффициент удельной теплоёмкости, Дж/кг·°С (табл. 2.18);

$[\alpha_{\text{тр}}(t)]_M$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.129);

$[\Psi_{V_1}]_M, [\Psi_{V_2}]_M$  – коэффициент (2.202), учитывающий понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём ролика и колодки;

$t_{\text{T}}$  – продолжительность трения, с (2.143),

– натурной трибосистемы

$$\begin{aligned} [\Theta_{V_1}(t)]_H &= \frac{[W_{\text{тр}}]_H}{[m_{\text{э}1}]_H \cdot c} \cdot \frac{(1 - [\alpha_{\text{тр}}(t)]_H) \cdot [\Psi_{V_1}]_H}{t_{\text{T}}} = \\ &= \frac{69483,1}{26,3 \cdot 490} \cdot \frac{(1 - [\alpha_{\text{тр}}(t)]_H) \cdot 0,689}{20,2} = 0,2 \cdot (1 - [\alpha_{\text{тр}}(t)]_H); \\ [\Theta_{V_1}(1)]_H &= 0,1 \text{ }^\circ\text{C}; \end{aligned} \tag{2.206}$$

$$\begin{aligned} [\Theta_{V_2}(t)]_H &= \frac{[W_{\text{тр}}]_H}{[m_{\text{э}2}]_H \cdot c} \cdot \frac{[\alpha_{\text{тр}}(t)]_H \cdot [\Psi_{V_2}]_H}{t_{\text{T}}} = \\ &= \frac{69483,1}{8,0 \cdot 490} \cdot \frac{[\alpha_{\text{тр}}(t)]_H \cdot 0,764}{20,2} = 0,6 \cdot [\alpha_{\text{тр}}(t)]_H; \end{aligned}$$

$$[\Theta_{V_2}(1)]_H = 0,3 \text{ }^\circ\text{C},$$

где  $[W_{\text{тр}}]_H$  – полная работа сил трения натурной трибосистемы, Дж (2.189);

$[m_{\text{э}1}]_H, [m_{\text{э}2}]_H$  – массы эффективных теплопоглощающих объёмов колеса и рельса, кг (2.200).

$[\alpha_{\text{тр}}(t)]_H$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.129);

$[\Psi_{V_1}]_H, [\Psi_{V_2}]_H$  – коэффициенты (2.203), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём.

Результаты вычислений объёмных температур модельной и натурной систем представлены графически на рис. 2.39. Установим масштабы подобия объёмных температур в конечный момент времени  $t_{\text{T}} = 20,2$  с:

$$C_{\Theta_{V_1}} = \frac{[\Theta_{V_1}(1)]_H}{[\Theta_{V_1}(1)]_M} = \frac{0,1}{1,01} = 0,091; \quad C_{\Theta_{V_2}} = \frac{[\Theta_{V_2}(1)]_H}{[\Theta_{V_2}(1)]_M} = \frac{0,3}{3,4} = 0,09,$$

где  $[\Theta_{V_1}]_H, [\Theta_{V_1}]_M$  – значения объёмных температур колеса и ролика при относительном времени  $\tau = 1$ , или времени трения  $t_T = 20,2$  с;

$[\Theta_{V_2}]_H, [\Theta_{V_2}]_M$  – значения объёмных температур рельса и колодки.

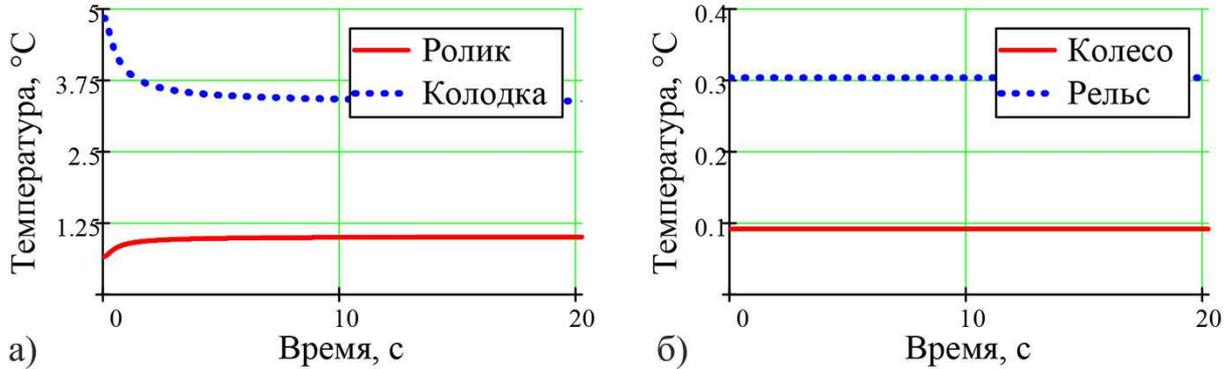


Рис. 2.39 – Функции изменения объёмных температур  $\Theta_V(t)$  (2.119) от времени трения  $\tau = t / t_T$ : а – модельной; б – натурной трибосистем

Полученные значения масштаба подобия объёмных температур колеса и ролика, а также рельса и колодки обратно пропорциональны масштабу геометрических размеров, то есть

$$C_{\Theta_V} = \frac{2}{C_l} = \frac{2}{21} = 0,095, \quad (2.207)$$

относительная ошибка которого  $(C_{\Theta_V} - C_{\Theta_{V_1}}) \cdot 100 / C_{\Theta_{V_1}} = 4,8 \%$ , а колодки – 6,3 %. Полученные значения масштаба подобия объёмных температур зависят от исходной толщины бандажа колеса  $B_1$  и высоты головки рельса  $B_2$ , погонной длины рельса  $L_p$ , а также эффективной теплопоглощающей толщины (2.192) и соотношения между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температур (2.195) и (2.196). Масштаб подобия объёмных температур согласно расчёту находится в диапазоне изменений геометрического масштаба  $1/C_l \dots 2/C_l$ .

**21)** Определим приращение поверхностных температур  $\Theta^*$  (2.120) за время трения  $t_T$   
– ролика и колодки

$$\begin{aligned} [\Theta_1^*(t)]_M &= \frac{[W_{тп}]_M}{[A_{к1}]_M t_T \left( \frac{\lambda}{[b_1]_M [\psi_{V_1}]_M \theta_1(t)} + \frac{\lambda}{[b_2]_M [\psi_{V_2}]_M \theta_2(t)} \right)} = \\ &= \frac{157,56}{3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 20,2 \left( \frac{37}{3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot \theta_1(t)} + \frac{37}{1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 0,604 \cdot \theta_2(t)} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{24828}{\left( \frac{10360}{\theta_1(t)} + \frac{36730}{\theta_2(t)} \right)};$$

$$[\Theta_2^*(t)]_M = \frac{[\Theta_1^*(t)]_M}{K_{B3}},$$

где  $[W_{\text{тр}}]_M$  – работа сил трения модельной трибосистемы, Дж (2.188);

$[A_{\kappa 1}]_M$  – контактная площадь ролика, м<sup>2</sup> (2.198);

$t_{\text{т}}$  – продолжительность трения, с (2.143);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$[b_1]_M, [b_2]_M$  – толщина теплопоглощающего слоя пары трения, м (2.193);

$[\psi_{V1}]_M, [\psi_{V2}]_M$  – коэффициенты (2.202), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём ролика и колодки;

$[\theta_1]_M, [\theta_2]_M$  – коэффициенты (2.128) связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами;

$K_{B3}$  – коэффициент взаимного перекрытия (2.201).

– колеса и рельса

$$[\Theta_1^*(t)]_H = \frac{[W_{\text{тр}}]_H}{[A_{\kappa 1}]_H t_{\text{т}} \left( \frac{\lambda}{[B_1]_H [\psi_{V1}]_H \theta_1(t)} + \frac{\lambda}{[B_2]_H [\psi_{V2}]_H \theta_2(t)} \right)} =$$

$$= \frac{69483}{0,14 \cdot 20,2 \left( \frac{37}{0,024 \cdot 0,689 \cdot \theta_1(t)} + \frac{37}{0,024 \cdot 0,689 \cdot \theta_2(t)} \right)} =$$

$$= \frac{24828}{\left( \frac{2224}{\theta_1(t)} + \frac{2224}{\theta_2(t)} \right)};$$

$$[\Theta_2^*(t)]_H = \frac{[\Theta_1^*(t)]_H}{K_{B3}},$$

где  $[W_{\text{тр}}]_H$  – работа сил трения трибосистемы «колесо – рельс», Дж (2.189);

$[A_{\kappa 1}]_H$  – контактная площадь колеса, м<sup>2</sup> (2.197);

$t_{\text{т}}$  – продолжительность трения, с (2.143);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$[B_1]_H, [B_2]_H$  – толщина теплопоглощающего слоя пары трения, м (2.194);

$[\psi_{V1}]_H, [\psi_{V2}]_H$  – коэффициенты (2.203), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём ролика и колодки;

$[\theta_1]_H, [\theta_2]_H$  – коэффициенты (2.128) связи скорости изменения температурного поля с физическими свойствами и размерами;

$K_{B3}$  – коэффициент взаимного перекрытия (2.201).

Результат расчёта поверхностной температуры как функции от времени трения  $\tau = t / t_T$  приведён на рис. 2.40.

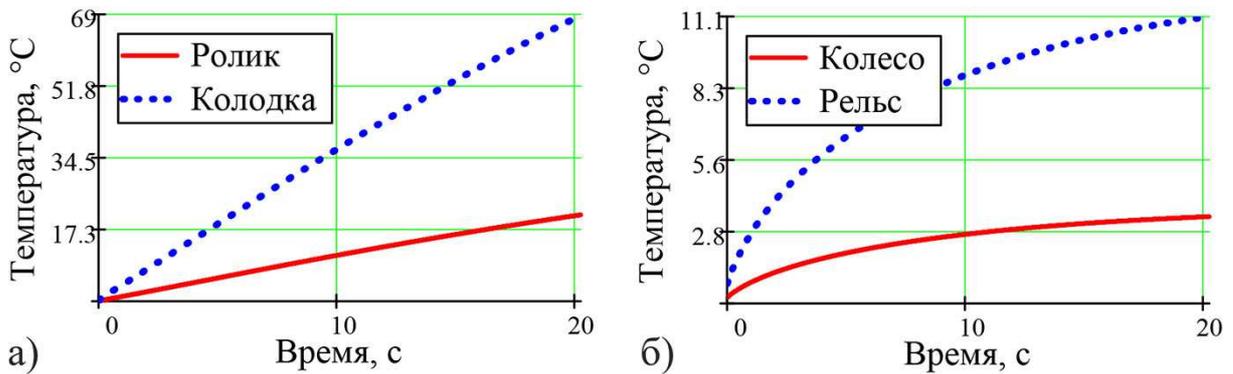


Рис. 2.40 – Функция изменения поверхностной температуры  $\Theta^*(\tau)$  (2.120) от времени трения  $\tau = t / t_T$ : а – модельной; б – натурной трибосистем

Масштабы подобия поверхностных температур в конечный момент времени  $t_T = 20,2$  с будут равны:

$$C_{\Theta_1^*} = \frac{[\Theta_1^*(1)]_H}{[\Theta_1^*(1)]_M} = \frac{3,4}{20,8} = 0,161; \quad C_{\Theta_2^*} = \frac{[\Theta_2^*(1)]_H}{[\Theta_2^*(1)]_M} = \frac{11,1}{68,8} = 0,161,$$

где  $[\Theta_1^*]_H, [\Theta_1^*]_M$  – значения поверхностных температур колеса и ролика;  
 $[\Theta_2^*]_H, [\Theta_2^*]_M$  – значения поверхностных температур рельса и колодки,

$$C_{\Theta^*} = 1,7C_{\Theta_V} = 1,7 \cdot 0,095 = 0,162, \quad (2.208)$$

$C_{\Theta_V}$  – масштаб подобия объёмных температур (2.207).

**22) Определение температуры вспышки.** Для упруго-пластичного контакта фрикционных подсистем «ролик – колодка» и «колесо – рельс» определим диаметр пятна касания (2.115), м  
 – ролика (модель колеса)

$$\begin{aligned} [d_{r1}]_M &= \sqrt{\frac{8r_1 R_{\max 1}}{\nu_1} \cdot \left( \frac{[P]_M}{[A_c]_M \cdot b_{p1} \cdot c \cdot \sigma_T} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}} = \\ &= \sqrt{\frac{8 \cdot 130,8 \cdot 10^{-6} \cdot 7,184 \cdot 10^{-6}}{1,8} \cdot \left( \frac{256}{2,1 \cdot 10^{-7} \cdot 1,8 \cdot 3 \cdot 785 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{1,8}}} = (2.209) \\ &= 4,56 \cdot 10^{-5} \text{ м,} \end{aligned}$$

– колодки (модель рельса)

$$[d_{r2}]_M = \sqrt{\frac{8r_2 R_{\max 2}}{\nu_2} \cdot \left( \frac{[P]_M}{[A_c]_M \cdot b_{p2} \cdot c \cdot \sigma_T} \right)^{\frac{1}{\nu_2}}} = \quad (2.210)$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 93,7 \cdot 10^{-6} \cdot 8,516 \cdot 10^{-6}}{1,9} \cdot \left( \frac{256}{2,1 \cdot 10^{-7} \cdot 1,4 \cdot 3 \cdot 785 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{1,9}}} =$$

$$= 4,45 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

где  $r_1, r_2$  – средний радиус кривизны вершин выступов, м (2.154);

$R_{\max 1}, R_{\max 2}$  – наибольшая высота неровностей профиля, мкм (2.149);

$v_1, v_2$  – параметры опорной кривой поверхности трения (2.152);

$[P]_M$  – нормальная нагрузка ролика на колодку, Н (2.147);

$[A_c]_M$  – контурная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.169);

$b_{p1}, b_{p2}$  – параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения (2.153);

$c$  – коэффициент, характеризующий влияние геометрии касания на напряжённое состояние в контакте (2.116),  $c = 3$ ;

$\sigma_T$  – предел текучести материала с меньшей твёрдостью и шероховатостью (табл. 2.18), Па.

– колеса

$$[d_{r1}]_H = \sqrt{\frac{8r_1 R_{\max 1}}{v_1} \cdot \left( \frac{[P]_H}{[A_c]_H \cdot b_{p1} \cdot c \cdot \sigma_T} \right)^{\frac{1}{v_1}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 130,8 \cdot 10^{-6} \cdot 7,184 \cdot 10^{-6}}{1,8} \cdot \left( \frac{112700}{9,3 \cdot 10^{-5} \cdot 1,8 \cdot 3 \cdot 785 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{1,8}}} = (2.211)$$

$$= 4,56 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

– рельса

$$[d_{r2}]_H = \sqrt{\frac{8r_2 R_{\max 2}}{v_2} \cdot \left( \frac{[P]_H}{[A_c]_H \cdot b_{p2} \cdot c \cdot \sigma_T} \right)^{\frac{1}{v_2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 93,7 \cdot 10^{-6} \cdot 8,516 \cdot 10^{-6}}{1,9} \cdot \left( \frac{112700}{9,3 \cdot 10^{-5} \cdot 1,4 \cdot 3 \cdot 785 \cdot 10^6} \right)^{\frac{1}{1,9}}} = (2.212)$$

$$= 4,45 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

где  $[P]_H$  – нормальная нагрузка колеса на рельс, Н (табл. 2.18);

$[A_c]_H$  – контурная площадь касания, м<sup>2</sup> (2.170).

Так как значения диаметров пятна касания ролика (2.209) и колеса (2.211), и также колодки (2.210) и рельса (2.212), вследствие идентичных характеристик микро- и макрогеометрии поверхностей трения равны, то значения чисел Пекле (2.96), как функций времени трения и скорости для модельной и натурной систем, будут равны между собой, то есть

$$\begin{aligned}
[Pe_1]_M = [Pe_1]_H &= \frac{v_c [d_{r2}]_M}{a} = \frac{v_c [d_{r2}]_H}{a} = \frac{0,119 \cdot 4,45 \cdot 10^{-5}}{9,62 \cdot 10^{-6}} = 0,551; \\
[Pe_2]_M = [Pe_2]_H &= \frac{v_c [d_{r1}]_M}{a} = \frac{v_c [d_{r1}]_H}{a} = \frac{0,119 \cdot 4,56 \cdot 10^{-5}}{9,62 \cdot 10^{-6}} = 0,564,
\end{aligned}
\tag{2.213}$$

где  $v_c$  – скорость скольжения, м/с (2.145);

$a$  – коэффициент температуропроводности материалов, м<sup>2</sup>/с (2.190);

$[d_{r1}]_M, [d_{r1}]_H$  – средний статический размер пятна касания ролика (2.209) и колеса (2.211), м;

$[d_{r2}]_M, [d_{r2}]_H$  – средний статический размер пятна касания колодки (2.210) и рельса (2.212), м.

Так как число Пекле (2.213) для исследуемых трибосистем находится в диапазоне 0,4...20, то коэффициент распределения тепловых потоков вычислим по формуле А.В. Чичинадзе и А.Г. Гинзбурга (2.102)

– для системы «ролик – колодка»

$$\begin{aligned}
[A]_M &= \sqrt{\frac{1}{9} + Fo_1^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 15,2^2} = 15,2; \\
[\alpha'_{тп}]_M &= \frac{1}{1 + \frac{\psi_{V_2} b_2 \lambda_1}{\psi_{V_1} b_1 \lambda_2} \left( \frac{Fo_2}{Fo_1} - \frac{Fo_1 - Fo_2}{3Fo_1^2 A} \times \left[ \frac{1}{3} \ln \left( \frac{\frac{1}{3} - A}{\frac{1}{3} + A} \right) \left( \frac{\frac{1}{3} - Fo_1 + A}{\frac{1}{3} - Fo_1 - A} \right) - A \ln \frac{3}{2} Fo_1 \right] \right)} = \\
&= \frac{1}{1 + \frac{0,604 \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 37}{1 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 37} \left( \frac{70}{15,2} - \frac{15,2 - 70}{3 \cdot 15,2^2 \cdot 15,2} \times \left[ \frac{1}{3} \ln \left( \frac{\frac{1}{3} - 15,2}{\frac{1}{3} + 15,2} \right) \left( \frac{\frac{1}{3} - 15,2 + 15,2}{\frac{1}{3} - 15,2 - 15,2} \right) \dots \right] - 15,2 \cdot \ln \left( \frac{3}{2} \cdot 15,2 \right) \right)} = \\
&= 0,45,
\end{aligned}
\tag{2.214}$$

где  $\psi_{V_1}, \psi_{V_2}$  – коэффициенты (2.202), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём ролика и колодки;

$b_1, b_2$  – толщина теплопоглощающего слоя пары трения, м (2.193);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$Fo_1, Fo_2$  – числа Фурье (2.195), определяющие соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры ролика и колодки,

– для системы «колесо – рельс»

$$[A]_H = \sqrt{\frac{1}{9} + Fo_1^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0,5;$$

$$\begin{aligned}
 [\alpha'_{\text{тп}}]_H &= \frac{1}{1 + \frac{\psi_{V_2} b_2 \lambda_1}{\psi_{V_1} b_1 \lambda_2} \left( \frac{Fo_2}{Fo_1} - \frac{Fo_1 - Fo_2}{3Fo_1^2 A} \times \left[ \frac{1}{3} \ln \frac{\left(\frac{1}{3} - A\right) \left(\frac{1}{3} - Fo_1 + A\right)}{\left(\frac{1}{3} + A\right) \left(\frac{1}{3} - Fo_1 - A\right)} - A \ln \frac{3}{2} Fo_1 \right] \right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{0,689 \cdot 0,024 \cdot 37}{0,689 \cdot 0,024 \cdot 37} \left[ \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 0,5} \times \frac{\frac{1}{3} \ln \frac{\left(\frac{1}{3} - 0,5\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0,5\right)}{\left(\frac{1}{3} + 0,5\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 0,5\right)} \dots \right.} \\
 &\quad \left. - 0,5 \cdot \ln \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \right]} \\
 &= 0,5,
 \end{aligned} \tag{2.215}$$

где  $\psi_{V_1}, \psi_{V_2}$  – коэффициенты (2.203), учитывающие понижение температуры за счёт распространения теплоты в объём колеса и рельса;

$b_1, b_2$  – толщина теплопоглощающего слоя пары трения, м (2.194);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$Fo_1, Fo_2$  – числа Фурье (2.196), определяющие соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры колеса и рельса.

Для вычисления значений температур вспышки (скачка температуры при трении) на фактическом пятне касания, как избыточные над средней поверхностной температурой  $\Theta^*$ , воспользуемся формулой (2.122) А.В. Чичинадзе

– для модельной трибосистемы «ролик 1 – колодка 2» (2.216)

$$\begin{aligned}
 [\Theta_{\text{всп1}}(t)]_M &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4[d_{r1}]_M}{4\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{\pi \cdot [Pe_1]_M}} \cdot \frac{(1 - [\alpha'_{\text{тп}}]_M) [W_{\text{тп}}]_M}{[A_r]_M t_{\tau}} \cdot \tau_N(t) = \\
 &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot 4,56 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 37 + 37 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,551}} \cdot \frac{(1 - 0,45) \cdot 157,56}{1,3 \cdot 10^{-7} \cdot 20,2} \cdot \tau_N(t) = \\
 &= 54,1 \cdot \tau_N(t);
 \end{aligned}$$

$$[\Theta_{\text{всп1}}(1)]_M = 44,8 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$\begin{aligned}
 [\Theta_{\text{всп2}}(t)]_M &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4[d_{r2}]_M}{4\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{\pi \cdot [Pe_2]_M}} \cdot \frac{[\alpha'_{\text{тп}}]_M [W_{\text{тп}}]_M}{[A_r]_M t_{\tau}} \cdot \tau_N(t) = \\
 &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot 4,45 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 37 + 37 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0,564}} \cdot \frac{0,45 \cdot 157,56}{1,3 \cdot 10^{-7} \cdot 20,2} \cdot \tau_N(t) = \\
 &= 43 \cdot \tau_N(t);
 \end{aligned}$$

$$[\Theta_{всп2}(1)]_M = 35,6 \text{ } ^\circ\text{C},$$

где  $[d_{r1}]_M, [d_{r2}]_M$  – диаметр статического пятна фактического касания ролика (2.209), колодки (2.210) при упруго-пластическом деформировании;

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$[Pe_1]_M, [Pe_2]_M$  – числа Пекле (2.213), как функции времени трения и скорости модельной системы;

$[\alpha'_{тп}]_M$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.214);

$[W_{тп}]_M$  – работа сил трения (2.188);

$[A_r]_M$  – средняя фактическая площадь касания для упруго-пластичного модельного контакта, м<sup>2</sup> (2.174);

$t_T$  – продолжительность трения, с (2.143);

$\tau_N(t)$  – временной фактор мощности трения (2.204).

– для натурной трибосистемы «колесо 1 – рельс 2» (2.217)

$$\begin{aligned} [\Theta_{всп1}(t)]_H &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4[d_{r1}]_H}{4\lambda_2 + \lambda_1 \sqrt{\pi} \cdot [Pe_1]_H} \cdot \frac{(1 - [\alpha'_{тп}]_H) [W_{тп}]_H}{[A_r]_H t_T} \cdot \tau_N(t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot 4,56 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 37 + 37 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0,551} \cdot \frac{(1 - 0,5) \cdot 69483,1}{5,5 \cdot 10^{-5} \cdot 20,2} \cdot \tau_N(t) = \\ &= 49,1 \cdot \tau_N(t); \end{aligned}$$

$$[\Theta_{всп1}(1)]_H = 40,7 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$\begin{aligned} [\Theta_{всп2}(t)]_H &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4[d_{r2}]_H}{4\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{\pi} \cdot [Pe_2]_H} \cdot \frac{[\alpha'_{тп}]_H [W_{тп}]_H}{[A_r]_H t_T} \cdot \tau_N(t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot 4,45 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 37 + 37 \cdot \sqrt{\pi} \cdot 0,564} \cdot \frac{0,5 \cdot 69483,1}{5,5 \cdot 10^{-5} \cdot 20,2} \cdot \tau_N(t) = \\ &= 47,8 \cdot \tau_N(t); \end{aligned}$$

$$[\Theta_{всп2}(1)]_H = 39,6 \text{ } ^\circ\text{C},$$

где  $[d_{r1}]_H, [d_{r2}]_H$  – диаметр статического пятна фактического касания колеса (2.211), рельса (2.212) при упруго-пластическом деформировании;

$\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности, Вт/м·°С (табл. 2.18);

$[Pe_1]_H, [Pe_2]_H$  – числа Пекле (2.213), как функции времени трения и скорости натурной системы;

$[\alpha'_{тп}]_H$  – коэффициент распределения тепловых потоков (2.215);

$[W_{тп}]_H$  – работа сил трения (2.189);

$[A_r]_H$  – средняя фактическая площадь касания для упруго-пластичного натурального контакта, м<sup>2</sup> (2.175).

Результаты вычислений температуры вспышки (2.122) и максимальных температур (2.118) на фактическом пятне касания по методике А.В. Чичинадзе модельной и натурной трибосистем представлены на рис. 2.41.

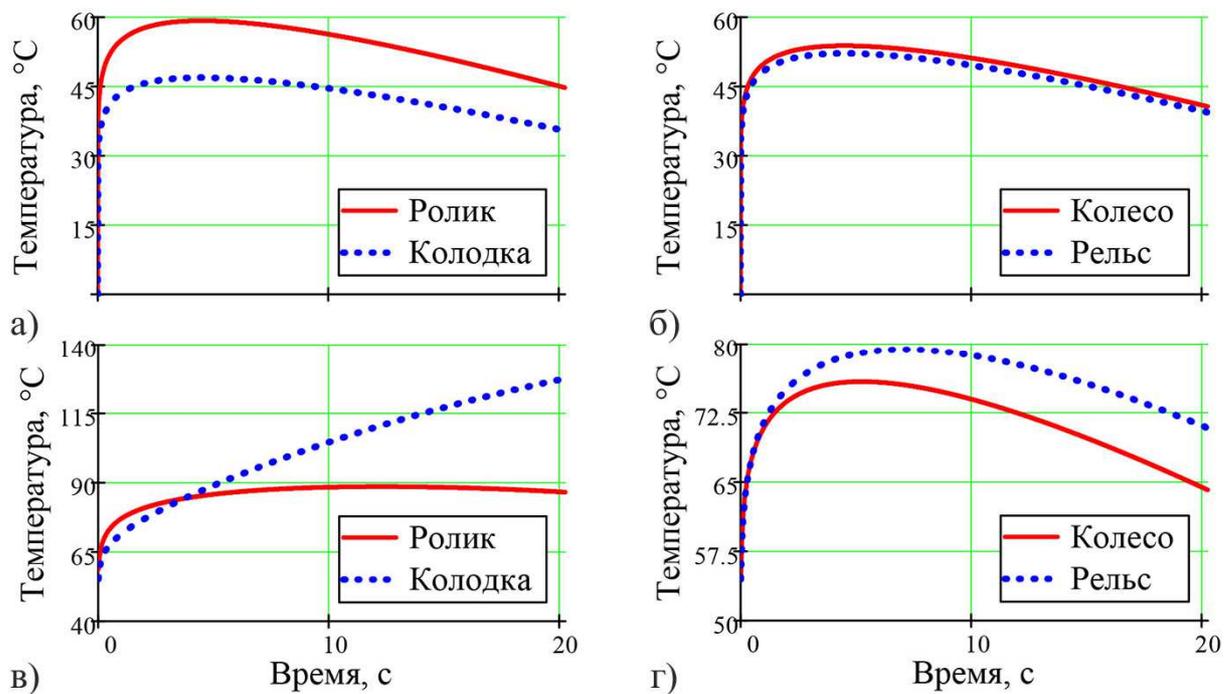


Рис. 2.41 – Функции изменения от времени трения  $\tau = t / t_T$  модельной (а, в) и натурной (б, г) трибосистем: а, б – температур вспышки  $\Theta_{всп}(\tau)$  (2.122); максимальных температур  $\Theta_{max}$  (2.118) на фактическом пятне касания по методике А.В. Чичинадзе

Определим масштабы подобия температур вспышки в любой момент времени  $\tau$ , например  $\tau = 1$

$$C_{\Theta_{всп1}} = \frac{[\Theta_{всп1}(1)]_H}{[\Theta_{всп1}(1)]_M} = \frac{40,7}{44,8} = 0,91; \quad C_{\Theta_{всп2}} = \frac{[\Theta_2^*(1)]_H}{[\Theta_2^*(1)]_M} = \frac{39,6}{35,6} = 1,11,$$

где  $[\Theta_{всп1}]_H, [\Theta_{всп1}]_M$  – значения температур вспышки колеса и ролика;  
 $[\Theta_{всп2}]_H, [\Theta_{всп2}]_M$  – значения температур вспышки рельса и колодки,

$$C_{\Theta_{всп}} = \frac{C_{\Theta_{всп1}} + C_{\Theta_{всп2}}}{2} = \frac{0,91 + 1,11}{2} = 1,01 \approx 1. \quad (2.218)$$

Таким образом, при моделировании процессов трения на машинах трения типа Amsler по методике А.В. Чичинадзе расчёта максимальных температур на фактическом пятне касания относительно геометрического масштаба  $C_l$  имеем следующие масштабы подобия:

- объёмных температур (2.207)  $C_{\Theta_V} = 2 / C_l$ ;
- поверхностных температур (2.208)  $C_{\Theta^*} = 1,7 \cdot C_{\Theta_V} = 3,4 / C_l$ ;
- температур вспышки (2.218)  $C_{\Theta_{всп}} = 1$ .

Пересчётные масштабы подобия и значения физических величин для натурального объекта «колесо магистрального тепловоза 2ТЭ116 – рельс» и его модели «ролик – колодка» представлены в табл. 2.19.

Табл. 2.19 – Физические величины и масштабы подобия трибосистемы «колесо – рельс» магистрального тепловоза 2ТЭ116 (объект) и его модели «ролик – колодка» на машинах трения типа Amsler

Параметр	Объект	Масштаб подобия	Модель
1	2	3	4
Радиус тягового колеса, м	$R_1 = 0,525$	$C_l = 21$	$r_1 = 0,025$
Радиус кривизны рельса, м	$R_2 = \infty$	$C_l = 21$	$r_2 = \infty$
Номинальная ширина участка поверхности трения, м	$L_T = 0,042$	$C_l = 21$	$l = 0,002$ (2.165)
Толщина чистового бандажа, м	$B_1 = 0,075$	$C_l = 21$	$b_1 = 0,0036$ (2.191)
Высота головки рельса Р65, м	$B_2 = 0,035$	$C_l = 21$	$b_2 = 0,0017$ (2.191)
Статическая нагрузка колеса на рельс, Н	$P_H = 112700$ (2.8)	$C_l^2 = 441$	$P_M = 256$ (2.147)
Радиус криволинейного участка пути, м	$R = 250$	не моделируется	
Путь, пройденный локомотивом, м	$L = 392,7$ (2.142)	не моделируется	
Продолжительность трения, с	$t_T = 20,2$ (2.143)	$C_t = 1$	$t_T = 20,2$
Путь трения скольжения, м	$L_c = 2,403$ (2.144)	$C_{Lc} = 1$	$L_c = 2,403$
Скорость скольжения, м/с	$v_c = 0,119$ (2.145)	$C_{vc} = 1$	$v_c = 0,119$
Угловая скорость вращения колеса, об/мин	$\Omega = 353,7$	не моделируется	
Угловая скорость вращения ролика относительно неподвижной колодки, об/мин	не реализуемо		$\Omega = 45,4$ (2.146)
Наибольшая высота неровностей профиля, мкм	$R_{max} = 12,84$	$C_{Rmax} = 1$	$R_{max} = 12,84$ (2.155)
Наибольшая высота выступа, мкм	$R_p = 7,37$	$C_{Rp} = 1$	$R_p = 7,37$ (2.156)

Продолжение табл. 2.19

1	2	3	4
Средний радиус кривизны вершин выступов, мкм	$r = 54,6$	$C_r = 1$	$r = 54,6$ (2.157)
Параметр степенной аппроксимации начальной части опорной кривой поверхности трения	$b_p = 3$	$C_{bp} = 1$	$b_p = 3$ (2.158)
Относительная опорная длина по средней линии	$t_m = 0,45$	$C_{tm} = 1$	$t_m = 0,45$ (2.159)
Параметр опорной кривой поверхности трения	$v = 2,4$	$C_v = 1$	$v = 2,4$ (2.160)
Наибольшая высота волны, мкм	$H_g = 8,1$	$C_{Hg} = 1$	$H_g = 8,1$ (2.161)
Радиус кривизны выступов вершин волн, мкм	$R_g = 325$	$C_{Rg} = 1$	$R_g = 325$ (2.162)
Средний статический размер пятна касания, мкм	$d_{r1} = 45,6$ (2.211) $d_{r2} = 44,5$ (2.212)	$C_{dr} = 1$	$d_{r1} = 45,6$ (2.209) $d_{r2} = 44,5$ (2.210)
Приведённая масса механической подсистемы, воздействующая на контакт, кг	$m_{\text{п}} = 11481,7$ (2.185)	$C_l^2 = 441$	$m_{\text{п}} = 26,0$ (2.184)
Ускорение при равноускоренном движении, м/с <sup>2</sup>	$a_c = 0,012$	$C_a = 1$	$a_c = 0,012$ (2.186)
Коэффициент трения	$f = 0,255$ (2.187)	$C_f = 1$	$f = 0,255$
Полная работа сил трения за время трения $t_t$ , Дж	$W_{\text{тп}} = 69483,1$ (2.189)	$C_l^2 = 441$	$W_{\text{тп}} = 157,56$ (2.188)
Эффективная толщина поверхности трения, м	$b_g = 0,024$	$C_b = 1$	$b_g = 0,024$ (2.192)
Толщина теплопоглощающего слоя материала пары трения, м	$B_1 = 0,024$ $B_2 = 0,024$ (2.194)	$C_{B1} = 0,15$ $C_{B2} = 0,07$	$b_1 = 0,0036$ $b_2 = 0,0017$ (2.193)

1	2	3	4
Контактные площади поверхностей трения, м <sup>2</sup>	$A_{\kappa 1} = 0,14$ $A_{\kappa 2} = 0,042$ (2.197)	$C_l^2 = 441$	$A_{\kappa 1} = 3,1 \cdot 10^{-4}$ $A_{\kappa 2} = 9,5 \cdot 10^{-5}$ (2.198)
Коэффициент взаимного перекрытия	$K_{\text{вз}} = 0,303$	$C_{K\text{вз}} = 1$	$K_{\text{вз}} = 0,303$ (2.201)
Масса эффективного теплопоглощающего объёма, кг	$m_{\text{э}1} = 26,3$ $m_{\text{э}1} = 8,0$ (2.200)	$C_l^2 = 441$	$m_{\text{э}1} = 8,8 \cdot 10^{-3}$ $m_{\text{э}2} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (2.199)
Критерий Фурье	$Fo_1 = 1/3$ $Fo_2 = 1/3$ (2.196)	$C_{Fo1} = 0,022$ $C_{Fo2} = 0,005$	$Fo_1 = 15,2$ $Fo_2 = 70$ (2.195)
Критерий Пекле	$Pe_1 = 0,551$ $Pe_2 = 0,564$ (2.213)	$C_{Pe} = 1$	$Pe_1 = 0,551$ $Pe_2 = 0,564$ (2.213)
Площадь касания, мм <sup>2</sup> : – номинальная $A_a$ – контурная $A_c$ – фактическая $A_r$ – средняя $\Delta A_r$	220,0 (2.166) 93,0 (2.170) 55,0 (2.175) 47,0	$C_l^2 = 441$	0,5 (2.164) 0,21 (2.169) 0,13 (2.174) 0,11 (2.180)
Давление, МПа – номинальное $Q_a$ – контурное $Q_c$ – фактическое $Q_r$ – среднее $\Delta Q_r$	511 1209 (2.172) 2033 (2.177) 2393	$C_Q = 1$ (2.168) (2.173) (2.178)	511 (2.167) 1209 (2.171) 2033 (2.176) 2393 (2.181)
Сближение контактирующих поверхностей, мкм	$h = 8,28$	$C_h = 1$	$h = 8,28$ (2.179)
Среднее расстояние между пятнами контакта, мм	$\bar{S} = 8,9$	$C_l = 21$	$\bar{S} = 0,42$ (2.182)
Температуры образца / контрообразца при $t_T = 20,2$ с, °С – начальная $\Theta_0$ – объёмной $\Theta_V$ – поверхностной $\Theta^*$ – контактной $\Theta_{\text{всп}}$ – максимальной $\Theta_{\text{max}}$	20 0,1 / 0,3 (2.206) 3,4 / 11,1 40,7 / 39,6 (2.217) 64,2 / 70,9	$C_{\Theta_{\text{окр}}} = 1$ $C_{\Theta_V} = 2/C_l$ $C_{\Theta^*} = 3,4/C_l$ $C_{\Theta_{\text{всп}}} = 1$ $C_{\Theta} = 11,7/C_l$ ... 15,6/ $C_l$	20 1,01 / 3,4 (2.205) 20,8 / 68,8 44,8 / 35,6 (2.216) 86,7 / 127,6 (2.118)

Выполненные расчёты показали применение методики физико-математического моделирования процессов трения скольжения для определения нагрузочно-скоростных режимов проведения лабораторных исследований трибосистем на машинах трения типа Amsler. С целью обеспечения

подобия характеристик динамики фрикционного взаимодействия и процессов трения и изнашивания на примере подсистемы «гребень колеса – рельс» механической системы «магистральный тепловоз 2ТЭ116 – путь» было показано, что:

1) равенство параметров микрогеометрии ( $R_{\max}, R_p, r, b_p, t_m, v$ ) и макрогеометрии ( $H_s, R_s$ ), модуля упругости  $E$  [Па], твёрдости  $HB$  [Па], удельной теплоёмкости  $c$  [Дж/кг·°С], коэффициентов теплопроводности  $\lambda$  [Вт/м·°С], плотности материалов  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>], толщины теплопоглощающего слоя материала пары трения  $b$  [мкм] (2.88) поверхностей трения обеспечивают как в натурной, так и модельной трибосистемах равенство физико-механических свойств и динамических характеристик, а также размер пятна касания  $d_{r1}$ ;

2) равенство давлений (номинального  $Q_a$ , контурного  $Q_c$  и фактического  $Q_r$ ), скорости скольжения  $v_c$ , пятна касания  $d_{r1}$  как в натурной, так и модельной трибосистемах обеспечивают тождественность реализации как коэффициента трения  $f = F_{\text{тр}} / N$  (масштаб подобия  $C_f = 1$ ), условий сцепления контактирующих пар трения, так и регистрируемых в толщине теплопоглощающего слоя материала пары трения  $b$  (2.88) величин температуры вспышки  $\Theta_{\text{всп}}$  с масштабom подобия  $C_{\Theta_{\text{всп}}} = 1$ ;

3) так как при моделировании геометрические размеры трибосистемы уменьшены в  $C_l$  раз, то объёмные температуры будут выше в  $2/C_l$  раз, а поверхностные – в  $3,4/C_l$  раз;

4) с целью обеспечения подобия коэффициентов теплоотдачи  $\sigma$  [Вт/м<sup>2</sup>·°С] модельного и натурального узлов трения при проведении модельных испытаний необходимо обеспечить принудительное охлаждение;

5) площади касания (номинальная  $A_a$ , контурная  $A_c$ , фактическая  $A_r$ ) при моделировании уменьшается в  $C_l^2$  раз, то есть пропорционально квадрату геометрического масштаба;

6) параметры нормальной нагрузки  $P_M$  на контакт, приведённой массы  $m$  механической системы, массы эффективного теплопоглощающего объёма  $m_s$  (2.199) при моделировании пропорциональны изменению площади касания (номинальной  $A_a$ , контурной  $A_c$ , фактической  $A_r$ ), что обеспечивает снижение работы сил трения  $W_{\text{тр}}$  и мощности трения  $N_T$  в соответствующее число раз, то есть в масштабе  $C_l^2$ .

### ***2.7 Применение методики экспериментальной термодинамики при реализации мониторинга термодинамических характеристик***

Получив расчётным путём значения шероховатости поверхностей  $R_a$  (2.148) и  $R_{\max}$  (2.149), номинальной  $A_a$  (2.164) и фактической  $A_r$  (2.174) площади касания, в соответствие с гипотезой экспериментальной триботермодинамики (2.135), рис. 2.32 выполним расчёт значения температуры вспышки (рис. 2.42).

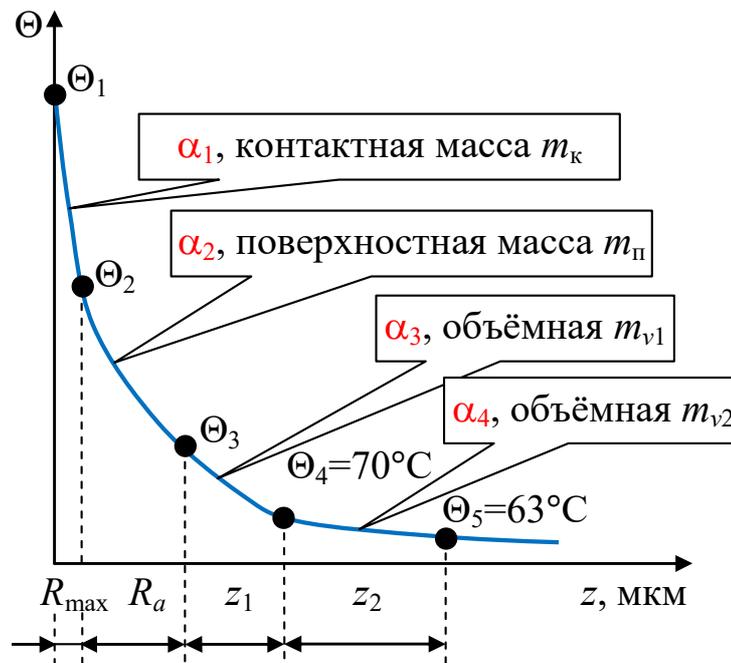


Рис. 2.42 – Модель триботермодинамики

Исходные данные для расчёта:

- плотность стали Р65:  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ;
- расстояние от термопары до фактической площади касания:  $z_1 = 2000 \text{ мкм}$ ;
- расстояние между двумя термопарами:  $z_2 = 5000 \text{ мкм}$ ;
- температура ближайшей к ФПК термопары  $\Theta_4 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- температура второй термопары  $\Theta_5 = 63 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Расчёт выполняется в несколько этапов, используя понятие логарифмического декремента колебаний.

1. Вычисляем значения масс, участвующих в теплопередаче (2.135):

- массы контактирующих микронеровностей поверхностей трения

$$m_k = A_r \cdot R_{\max} \cdot \rho = 1,3 \cdot 10^{-7} \cdot 7,18 \cdot 10^{-6} \cdot 7850 = 7,1 \cdot 10^{-9} \text{ кг},$$

где  $A_r$  – фактическая площадь касания модельной трибосистемы «ролик – колодка»,  $\text{м}^2$  (2.174);

$R_{\max}$  – наибольшая высота профиля поверхности, мкм (2.149);

$\rho$  – плотность стали,  $\text{кг/м}^3$ , по заданию,

- поверхностной массы, т.е. массы, заключённой в микронеровностях поверхности среднего арифметического отклонения профиля  $R_a$

$$m_n = A_a \cdot R_a \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 1,382 \cdot 10^{-6} \cdot 7850 = 5,4 \cdot 10^{-9} \text{ кг},$$

где  $A_a$  – номинальная площадь касания трибосистемы «ролик – колодка»,  $\text{м}^2$  (2.164);

$R_a$  – среднее арифметическое отклонение профиля поверхности, мкм (2.148);

- объёмной массы, участвующей в теплопередаче

$$m_v = A_a \cdot b_1 \cdot \rho = 5 \cdot 10^{-7} \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 7850 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ кг},$$

где  $b_1$  – поверхностная толщина ролика, м (2.191);

- объёмной массы, заключённой между термопарой и фактической площадью касания

$$m_{v1} = \frac{z_1}{z_1 + z_2} m_v = \frac{2000}{2000 + 5000} \cdot 1,4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ кг};$$

- объёмной массы, заключённой между двумя термопарами

$$m_{v2} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} m_v = \frac{5000}{2000 + 5000} \cdot 1,4 \cdot 10^{-5} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ кг}.$$

2. Исходя из выражения для логарифмического декремента затухания, для объёмной массы  $m_{v2}$  рассчитаем:

- темп затухания объёмных температур

$$q_4 = \frac{\Theta_5}{\Theta_4} = \frac{63}{70} = 0,9;$$

- показатель экспоненты затухания температуры

$$\alpha_4 = \frac{\ln q_4}{z_2} = \frac{\ln 0,9}{5000} = -2,1 \cdot 10^{-5}.$$

3. В соответствии с выдвинутой гипотезой экспериментальной триботермодинамики, градиент температуры есть величина постоянная, тогда в соответствии с выражением (2.135)

$$m_k \alpha_1 = m_n \alpha_2 = m_{v1} \alpha_3 = m_{v2} \alpha_4$$

определяем характеристики на границе объёма:

- показатель затухания объёмной температуры

$$\alpha_3 = \alpha_4 \cdot \frac{m_{v2}}{m_{v1}} = -2,1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-6}} = -5,3 \cdot 10^{-5};$$

- логарифмический декремент затухания объёмной температуры

$$\delta_3 = \ln q_3 = \alpha_3 \cdot z_1 = -5,3 \cdot 10^{-5} \cdot 2000 = -0,11;$$

- темп затухания объёмной температуры

$$q_3 = e^{\delta_3} = e^{-0,11} = 0,9,$$

следовательно темп затухания температуры в объёме металла не изменился ( $q_3 = q_4$ ), что подтверждает утверждение о постоянстве градиента температуры в объёме металла;

- исходя из формулы темпа затухания, определяем температуру на границе объёма

$$\Theta_3 = \frac{\Theta_4}{q_3} = \frac{70}{0,9} = 77,8 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

4. Повторяем аналогичный расчёт для поверхностной массы  $m_n$ :

- определяем показатель затухания поверхностной температуры на уровне среднего арифметического отклонения профиля  $R_a$

$$\alpha_2 = \alpha_3 \cdot \frac{m_{v1}}{m_n} = -5,3 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}}{5,4 \cdot 10^{-9}} = -3,9 \cdot 10^{-2};$$

- его логарифмический декремент затухания

$$\delta_2 = \ln q_2 = \alpha_2 \cdot R_a = -3,9 \cdot 10^{-2} \cdot 1,382 = -0,054;$$

- темп затухания поверхностной температуры

$$q_2 = e^{\delta_2} = e^{-0,054} = 0,95;$$

- температура контурной поверхности

$$\Theta_2 = \frac{\Theta_3}{q_2} = \frac{77,8}{0,95} = 82,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

5. Наконец, для определения максимальной температуры в контакте («температуры вспышки») в объёме контактной массы  $m_k$ :

- определяем показатель затухания температуры вспышки на уровне наибольшей высоты профиля  $R_{\max}$ :

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cdot \frac{m_n}{m_k} = -3,9 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{5,4 \cdot 10^{-9}}{7,1 \cdot 10^{-9}} = -3 \cdot 10^{-2};$$

- его логарифмический декремент затухания

$$\delta_1 = \ln q_1 = \alpha_1 \cdot R_{\max} = -3 \cdot 10^{-2} \cdot 7,184 = -0,21;$$

- темп затухания температуры вспышки

$$q_1 = e^{\delta_1} = e^{-0,21} = 0,81;$$

- максимальная температура во фрикционном контакте

$$\Theta_{\max} = \frac{\Theta_2}{q_1} = \frac{82,1}{0,81} = 101,7 \text{ } ^\circ\text{C},$$

что согласуется с анализом цветов побежалости и результатами теоретических исследований (рис. 2.41,в).

### ***2.8 Исследование фактической площади касания методом электропроводимости контакта***

Внешнее трение возникает при любом относительном смещении соприкасающихся твёрдых тел. Количественные зависимости для оценки

внешнего трения, применяемые для использования в инженерных расчётах, по существу сводятся к закону Амонтона о прямой пропорциональности силы трения силе нормального давления (1699 г.), где коэффициентом пропорциональности является коэффициентом трения. Отсутствие выражения, позволяющего правильно вычислить коэффициент трения, значительно затрудняет проведение инженерных расчётов. Для уточнения величин этого коэффициента приходится ставить специальные натурные эксперименты. Одним из методов экспериментального определения коэффициента трения нами был рассмотрен метод комплексных амплитуд с применением частотных передаточных функций.

Значительный вклад в науку о трении представляют работы Ф.П. Бодуна и Д. Тейбора, посвящённые раскрытию сложных процессов, протекающих во фрикционном контакте. Комплекс этих процессов, как было сказано ранее, весьма многообразен – это неровности поверхностей трения, молекулярное взаимодействие твёрдых тел, влияние поверхностных физико-механических несовершенств на прочность этих тел, наличие окисных поверхностных плёнок и загрязнений, возникающие при трении температурные вспышки, химические реакции на поверхностях и др.

Была развита теория Р. Хольма трения пластических тел, таких как металлы, основанная на экспериментальном изучении предварительного смещения измерением электрического сопротивления. При фрикционном взаимодействии под влиянием нормальной нагрузки контактирующие поверхности металлов соприкасаются в множестве точек фактического контакта. Возникает контактное давление в различных точках контактной поверхности, которое может вызывать в одних точках упругую, а в других – пластическую деформации.

Суть метода измерения электрического сопротивления состоит в том, что при прохождении через фрикционный контакт постоянного по величине тока на пятнах фактического контакта возникает разность потенциалов (Кольрауш, 1900 г.), обратно пропорциональное току

$$R + R_f = U/I, \text{ мОм} \quad (2.219)$$

где  $R_f$  – сопротивление окисных плёнок на фрикционном контакте

$R$  – сопротивление электрическому току металлов образца 1 и контрообразца 2. Если не учитывать влияние поверхностных плёнок окислов и загрязнений на поверхности контактирующих металлов, то снижение проходящего через единственный контакт силы тока соответствует сопротивлению  $R$ , равному

$$R = \frac{\rho}{n_r \cdot d_r}, \quad (2.220)$$

$\rho$  – удельное электрическое сопротивление металла двух металлов

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \text{ Ом}\cdot\text{м}; \quad (2.221)$$

$n_r$  – количество пятен фактического контакта (2.127);

$d_r$  – диаметр пятна единичного фактического контакта, м (2.115).

$U$  – разность потенциалов на фрикционном контакте, мВ;

$I$  – величина тока, проходящего через единичные точки фактического контакта двух соприкасающихся поверхностей, мА;

Р. Хольмом, Ф.П. Боуденом и Д. Тейбором было показано, что контактная проводимость  $G = 1 / R$  металлов  $\sigma_r$  [ $\text{Ом}^{-1}$ , См] при трении скольжения значительно зависит от наличия окисных поверхностных плёнок. Ими было выделено три области такой зависимости:

а) когда нормальная нагрузка на контакт мала, металлический контакт отсутствует и сопротивление остаётся очень высоким;

б) с ростом нагрузки окисная плёнка временами разрушается и сопротивление колеблется между высокими и низкими значениями;

в) при дальнейшем росте нагрузки окисная плёнка разрушается почти полностью, значения электросопротивления малы и преобладает металлический контакт.

По мере увеличения тангенциальной силы трения, сопровождающейся тангенциальным смещением, наблюдается значительное увеличение электрической проводимости  $G$ . Более значительное влияние имеет место при тангенциальном смещении, значительно меньшем диаметра площадки фактического контакта  $d_r$ . Если предположить, что электрическая проводимость не зависит от поверхностных плёнок, а обуславливается исключительно сопротивлением «растеканию» (Хольм, 1958 г.), то текущая проводимость  $G_r$  связывается с первоначальной статической проводимостью  $G_0$  соотношением

$$\frac{G_r}{G_0} = \frac{d_r}{d_a} = \sqrt{\frac{A_r}{A_a}},$$

где  $A_a, A_r$  – номинальная и фактическая площадь касания,  $\text{м}^2$ ;

$d_a, d_r$  – номинальное и фактическое пятно контакта, м.

Статическая контактная проводимость относительно маленькая, но после незначительного тангенциального смещения она увеличивается в несколько сот раз. Результаты показывают, что при нормальном нагружении окисные поверхностные плёнки не разрушаются. По мере приложения тангенциальной силы окисные плёнки разрушаются, и рост площади контакта сопровождается значительным увеличением величины сопротивления контакта «металл-металл». Однако контакт никогда не достигает стадии полностью металлического.

Присутствие плёнки смазочного материала не влияет на первоначальную величину  $G_0$ . По мере роста тангенциальной силы рост проводимости металлов  $G_r$  значительно меньше, чем для не смазанных поверхностей. Плёнка смазочного материала не позволяет тангенциальной силе достигать очень высоких величин, и это, в свою очередь, ограничивает степень разрушения плёнок окислов и самой поверхности трения.

По мере дальнейшего роста тангенциальной силы увеличивается доля пластической деформации микро- и макронеровностей, что сопровождается ростом фактической площади касания

$$A_r = \frac{\rho \cdot R_z}{R}, \quad (2.222)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление металла двух металлов (2.221), Ом·м;

$R_z$  – наибольшая высота неровностей профиля по десяти точкам (2.63), мкм;

$R$  – измеренное сопротивление фрикционного контакта (2.219), Ом.

В результате этого сопротивление контакта (2.220) падает. Для чистых поверхностей металлов этот процесс может проходить весьма интенсивно, приводя к сильному схватыванию. Было показано, что при отсутствии окисных плёнок погрешность экспериментального определения фактической площади касания не превышает 10 % для реальных тел толщиной не менее чем в 10 раз превышающей размер пятна фактического контакта  $d_r$ .

Если же поверхности загрязнены настолько, что возникающие связи уступают в прочности самим материалам, то размеры пятен контакта остаются небольшими и схватывания не происходит. Показано, что даже небольшое ослабление адгезионной связи приводит к коэффициенту трения порядка единицы и выше.

**Пример.** Из примера предыдущего раздела главы имеем среднее арифметическое отклонение профиля  $R_a = 1,38...2,14$  мкм, диаметр пятна фактического контакта  $d_{r1} = 45,6$  мкм и количество пятен фактического контакта  $n_r = 1,18 \cdot n_a$ , где  $n_a$  – число вершин на номинальной площади поверхности  $A_a$ . Для колёсной стали удельное сопротивление постоянному току  $\rho = 0,23 \cdot 10^{-6}$  Ом·м. Замеры активного сопротивления контакта выполнялись по четырёхпроводной схеме при помощи миллиметра GOM-802 в динамике взаимодействия двух образцов без разрыва электрического контакта путём накручивания электрического провода на ось вала машины трения типа Amsler. В результате миллиметр регистрировал статические и динамические изменения сопротивления  $R$ . Среднее измеренное значение сопротивления составило величину  $R = 0,02$  мОм.

Требуется найти фактическую площадь касания  $A_r$  (2.222), давление  $Q_r$  и число вершин микронеровностей на номинальном контакте  $n_a$ , если нормальная нагрузка  $P_M$  составляет 256 Н. По табл. 2.3 по значениям среднего арифметического отклонения профиля  $R_a$  устанавливаем 6 класс шероховатости поверхности по ГОСТ 2789-73 и наибольшую высоту неровностей профиля по десяти точкам  $R_z = 8$  мкм.

$$A_r = \frac{\rho \cdot R_z}{R} = \frac{0,23 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{0,02 \cdot 10^{-3}} = 0,092 \text{ мм}^2;$$

$$Q_r = \frac{P_M}{A_r} = \frac{256}{0,092 \cdot 10^{-6}} = 2778 \text{ МПа.}$$

Из формул (2.220) и (2.127) определим число вершин микронеровностей на номинальной площади поверхности  $A_a$ .

$$n_a = \frac{\rho}{1,18 \cdot R \cdot d_{r1}} = \frac{0,23 \cdot 10^{-6}}{1,18 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3} \cdot 45,6 \cdot 10^{-6}} = 214,3.$$

Упругая деформация контактирующих областей вероятна только при низком трении, например, в присутствии защитной плёнки окислов или в присутствии эффективного смазочного материала. В состоянии скольжения поверхностей трения деформируемых поверхностей контакт имеет место в ряде дискретных областей. Трение здесь подобно трению, наблюдаемому для единично точечного контакта. Фрикционные связи образуются и разрушаются, их величина и расположение изменяются от момента к моменту. Однако в любой произвольный момент времени общая площадь контакта сохраняется в среднем постоянной. Как показывают многочисленные опыты, перед скольжением имеет место некоторый рост фактической площади касания, обусловленный прочностью на срез на поверхности раздела и пластичностью металлов. Для любой данной пары металлов он будет приблизительно постоянным.

### *Список использованных источников*

- 1) **Боуден, Ф.П.** Трение и смазка твёрдых тел. / Ф.П. Боуден, Д. Тейбор. // Пер. с англ. Под ред. д-ра техн. наук И.В. Крагельского. М.: Машиностроение, 1968.
- 2) **Браун, Э.Д.** Моделирование трения и изнашивания в машинах / Э.Д. Браун, Ю.А. Евдокимов, А.В. Чичинадзе. – М. : Машиностроение, 1982.
- 3) **Дёмкин, Н.Б.** Качество поверхности и контакт деталей машин / Н.Б. Дёмкин, Э.В. Рыжов. – М.: Машиностроение, 1981. – 244 с.
- 4) **Крагельский, И.В.** Трение и износ. Изд. 2-е, пераб. и доп. / И.В. Крагельский. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с.
- 5) Основы теории инженерного эксперимента. Теория физического подобию и моделирования сложных объектов и процессов. Ч. 2: Учеб. пособие / Ю.А. Евдокимов, В.М. Приходько, З.Ю. Корниенко, В.В. Гудима; Рост. гос. ун-т путей сообщения, Ростов н/Д. – 1997. – 83 с.
- 6) Основы трибологии (трение, износ, смазка): Учебник для технических вузов. 2-е изд. переработ. и доп. / А.В. Чичинадзе, Э.Д. Браун, Н.А. Буше и др.; Под общ. ред. А.В. Чичинадзе. – М.: Машиностроение, 2001. – 664 с.
- 7) **Рубан, В.Г.** Решение задач динамики в пакете Mathcad: Учебное пособие / В.Г. Рубан, А.М. Матва // РГУПС, Ростов н/Д, 2009.– 100 с.
- 8) **Сена, Л.А.** Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 2000. – 309 с.
- 9) Теория и конструкция локомотивов: Учебник для вузов ж.-д. транспорта / Г.С. Михальченко, В.Н. Кашников [и др.]: под ред. Г.С. Михальченко.– М.: Маршрут, 2006. – 584 с.
- 10) Тепловоз 2ТЭ116 / С.П. Филонов, А.И. Гибалов [и др.].– М.: Транспорт, 1996. – 334 с.
- 11) Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1. – 400 с.
- 12) **Хольм, Р.** Электрические контакты. Пер. с англ. / Под ред. д-ра техн. наук, проф. Д.Э. Брускина и д-ра хим. наук А.А. Рудницкого. – М.: Изд-во иностранной литературы. – 1961. – 464 с.
- 13) **Чичинадзе, А.В.** Расчёт и исследование внешнего трения при торможении / А.В. Чичинадзе: под ред. И.В. Крагельского. – М.: Наука, 1967. – 231 с.

## *Заключение*

Были изложены закономерности полного подобия при физическом моделировании натуральных механических систем. Показаны как отдельные приёмы моделирования, так и фундаментальные способы, реализующие задачи натуральных исследований на физических моделях. Сформулируем следующие выводы по результатам исследований.

1) Повседневно нам приходится иметь дело со всевозможными измерениями – прямыми и косвенными, представляющими собой сравнение измеряемой величины с другой однородной величиной, принятой за основную. Единицы измерения всех величин могут выбираться независимо друг от друга. Наличие косвенных измерений или вычислений позволяет единицы измерения разных величин связывать друг с другом методом анализа размерности с ограничениями.

2) Метод анализа дифференциальных уравнений объекта и его модели позволяет получить безразмерные уравнения, описывающие бесконечное множество конкретных процессов. Частные особенности различных явлений одного и того же класса определяются с помощью условий однозначности. Проведённый анализ системы безразмерных дифференциальных уравнений и условий однозначности делает более понятными общие условия подобия физических процессов, сформулированные в виде четырёх теорем подобия.

3) Выполнить точное подобие процессов конвективного теплообмена в широком интервале изменения температурных параметров процесса не представляется возможным. В связи с этим возникает необходимость в разработке методов приближенного моделирования. Одной из возможностей приближенного моделирования является проявление так называемой автомодельности процесса относительно какого-либо критерия. Говорят, что определяемая величина автомодельна относительно критерия подобия, если она не зависит от него. Если процесс автомоделен относительно какого-либо критерия подобия, то при моделировании отпадает необходимость соблюдать равенство этого критерия для образца и модели. Явление автомодельности даёт возможность упрощения дифференциальных уравнений и условий однозначности.

4) Показано, что автомодельность нагрузочно-скоростных условий эксплуатации и параметров шероховатости, волнистости контактирующих поверхностей натурной трибосистемы и её модели обеспечивают подобные условия сцепления и реализацию подобных значений номинальной, контурной и фактической площадей касания; номинального, контурного и фактического давления. Методы расчёта площадей касания и температур по А.В. Чичинадзе, электропроводимости контакта по Ф.П. Боудену и Д. Тейбору и экспериментальной триботермодинамики дают сходственные результаты исследований. Точность же теоретических расчётов принципиально зависит от выбора размеров тел в направлении нормального тепло-

вого потока и вычислении эффективной теплопоглощающей толщины пары трения (2.89).

5) Приведённые методы позволяют исследователю корректно создать физико-математическую модель, выявить закономерности подобия натуральных и модельных механической и фрикционной подсистем, выбрать базисные нагрузочно-скоростные, граничные условия эксплуатации и побочные факторы для решения поставленных перед исследователем цели и задач испытаний. Это позволяет ещё до создания физического стенда обосновать критерий физического подобия модельной и натурной трибодинамической системы, а также наметить методику проведения последующих испытаний.

### *Варианты заданий для самоподготовки*

Для выбранного преподавателем кинематической схемы машины или механизма необходимо:

- 1) методом анализа дифференциальных уравнений натурального объекта и его модели выявить масштабы и критерии подобия, обосновать граничные условия автомодельности динамических систем;
- 2) выбрать базисные нагрузочно-скоростные условия проведения испытаний, граничные условия и побочные физические величины, обеспечивающие подобие как динамических, так и триботехнических параметров эксплуатации;
- 3) сформировать уникальный критерий подобия трибосистемы;
- 4) сформулировать выводы по проведённым исследованиям.

### *Вопросы для контроля знаний*

- 1) В каком случае применяется метод анализа размерностей?
- 2) В каком случае применяется теория подобия?
- 3) В чём заключается полное и неполное динамическое подобие?
- 4) В чём заключается способ интегральных аналогов?
- 5) В чём заключается физический смысл числа Пекле?
- 6) В чём заключается физический смысл числа Фурье?
- 7) В чём состоят возникающие противоречия при физическом моделировании и как они разрешаются?
- 8) Дайте определение критерия подобия.
- 9) Для термического сопротивления  $R_\lambda$  [ $\text{м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ ] составьте его критерий подобия.
- 10) Для удельного количества теплоты  $q$  [ $\text{Дж}/\text{кг}$ ] составьте его критерий подобия.
- 11) Из ряда физических величин  $l$ ,  $m$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $\Theta$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta\Theta$  ( $l$  – длина [ $\text{м}$ ],  $m$  – масса [ $\text{кг}$ ],  $t$  – время [ $\text{с}$ ],  $v$  – скорость [ $\text{м}/\text{с}$ ],  $N$  – нагрузка [ $\text{Н}$ ],  $P$  – мощность [ $\text{Вт}$ ],  $\Theta$  – температура [ $^\circ\text{C}$ ],  $\sigma$  – нормальное напряжение [ $\text{Па}$ ],  $\Delta\Theta$  – градиент температуры [ $^\circ\text{C}/\text{м}$ ]) составить все независимые комбинации.

Ответ:  $F\left(\frac{vt}{l}, \frac{Nt^2}{lm}, \frac{Pt^3}{l^2m}, \frac{\sigma lt^2}{m}, \frac{\Delta\Theta l}{\Theta}\right) = 0.$

- 12) Как построить опорную кривую Аббота?
- 13) Как составить критерий подобия изучаемого явления или процесса?
- 14) Какие параметры характеризуют размеры неровностей профиля поверхности по нормали к базовой линии отсчёта?
- 15) Какие расчёты необходимо выполнить перед выполнением модельных экспериментальных исследований на физическом стенде?
- 16) Назовите обязательные граничные условия, обеспечивающие полное физическое подобие механических систем.
- 17) Назовите основные и производные физические величины.
- 18) Назовите структурные параметры неровностей профиля.
- 19) Обоснуйте выражение для критерия подобия сил инерции.
- 20) Обоснуйте выражение для критерия подобия сил сопротивления.
- 21) Обоснуйте выражение для критерия подобия сил упругости.
- 22) Охарактеризуйте шаговые параметры неровностей профиля.
- 23) Преобразуйте размерность коэффициента теплоотдачи в основные величины.
- 24) Преобразуйте размерность мощности трения в основные величины.
- 25) Приведите пример, иллюстрирующий реализацию законов подобия на основе метода анализа дифференциальных уравнений натурального объекта и его модели.
- 26) Приведите примеры формул размерности физических величин.
- 27) Чем обуславливается выбор граничных факторов при физическом моделировании трибосистем методом анализа размерностей физических величин, на какие факторы накладываются ограничения моделирования?
- 28) Чем отличается высота профиля поверхности  $R_z$  от отклонения профиля  $R_a$ ?
- 29) Чем отличается критерий от масштаба подобия?
- 30) Чем отличается симплекс от критерия подобия?
- 31) Чем отличаются базисные факторы при физическом моделировании от основных, как их выбрать?
- 32) Чем отличаются друг от друга номинальная, контурная и фактическая площади касания?
- 33) Что характеризует критериальное уравнение подобия Э. Букингема?
- 34) Что характеризует критерий Био?
- 35) Что характеризует критерий гомохронности?
- 36) Что характеризует критерий Рейнольдса?
- 37) Что характеризует критерий Фруда?
- 38) Что характеризует критерий Эйлера?
- 39) Что характеризуют граничные условия реализации процесса?
- 40) Что является необходимым и достаточным признаком подобия транспортных средств?

41) Что является необходимым и достаточным признаком подобия фрикционных подсистем?

Учебное издание

Шаповалов Владимир Владимирович  
Озябкин Андрей Львович  
Рубан Владимир Григорьевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ  
ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ**

Печатается в авторской редакции

Технический редактор

Учебно-методическое пособие для выполнения  
практических занятий, контрольных и курсовых работ

Подписано к печати \_\_. \_\_.17. Формат 60x84/19  
Бумага газетная. Ризография. Усл.печ.л. \_\_\_\_.  
Тираж \_\_\_\_ экз. Изд. № \_\_\_\_ . Заказ \_\_\_\_.

---

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВО РГУПС

Адрес университета: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского  
Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.