

РОСЖЕЛДОР  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ростовский государственный университет путей сообщения»  
(ФГБОУ ВО РГУПС)

---

В.В. Шаповалов, А.Л. Озябкин

**РАСЧЁТ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МЕХАНИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ**

**Учебно-методическое пособие для выполнения  
практических занятий, контрольных и курсовых работ**

**Ростов н/Д, 2017**

УДК 629.4.015: 625.144.5: 681.3.06

Рецензент: Волохов А.С., доцент каф. «Эксплуатация и ремонт машин» ФГБОУ ВО РГУПС

### **Шаповалов, В.В.**

Расчёт частот и форм собственных колебаний механических транспортных систем : учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ / В.В. Шаповалов, А.Л. Озябкин. – Ростов н/Д, 2017. – 102 с.: ил. Библиогр. С. 94.

Учебно-методическое пособие для выполнения практических занятий, контрольных и курсовых работ содержат теоретические сведения о приведении кинематических схем машин и механизмов к эквивалентным расчётным схемам минимальной сложности, а также примеры расчёта механических систем при запуске, стопорении рабочего органа, а также грузоподъёмных механизмов. Рассмотрены вопросы расчёта частот и форм собственных колебаний.

Предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов направлений подготовки: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», профиль «Автомобильный сервис»; «Эксплуатация перегрузочного оборудования портов и транспортных терминалов» (бакалавриат); 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», профиль: «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» (специалитет); 15.03.03 «Прикладная механика», профиль «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» (бакалавриат); 15.04.03 «Прикладная механика», профиль «Динамика и прочность машин» (магистратура).

Пункты 1-2 выполнены Шаповаловым В.В., 2-3 – Озябкиным А.Л.  
Одобрены кафедры «Транспортные машины и триботехника»

# ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	4
1 Построение эквивалентных расчётных схем машин и механизмов .....	4
1.1 Определение масс, жёсткостей кинематической схемы .....	7
1.2 Приведение масс, жёсткостей и сил к эквивалентной расчётной схеме .....	8
1.3 Упрощение эквивалентных расчётных схем до уровня минимальной сложности .....	14
1.4 Правила суммирования (присоединения) масс при упрощении эквивалентного вала. Принцип Релея.....	16
1.5 Уравнения движения и проблема собственных значений .....	25
2 Применение принципа Релея для решения прямой и обратной систем дифференциальных уравнений системы .....	34
2.1 Составление дифференциальных уравнений .....	34
2.2 Определение значений основной частоты и формы колебаний..	39
2.3 Определение значений высших частот и форм колебаний.....	40
2.4 Преобразование форм колебаний при стопорении рабочего органа механической системы .....	42
2.5 Определение амплитуд собственных колебаний системы в переходных динамических режимах .....	42
2.6 Описание алгоритма программы .....	43
2.7 Численная реализация алгоритма решения дифференциальных уравнений .....	47
3 Примеры составления и упрощения эквивалентных расчётных схем, расчёта частот и форм колебаний .....	61
3.1 Исследование поступательно движущихся масс .....	61
3.2 Исследование процессов запуска механической системы.....	66
3.3 Исследование процессов стопорения рабочего органа .....	74
3.4 Исследование процессов грузоподъёмного механизма .....	80
Список использованных источников.....	94
Варианты заданий для самоподготовки .....	94

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

По кинематической схеме и чертежу машины трудно судить о распределении масс и жёсткости в трансмиссии и других узлах. Составные части трансмиссии движутся с различными скоростями, передают разные крутящие моменты и силы, жёсткости упругих связей в сечениях могут быть различны, неодинаковы линейные и угловые деформации элементов на различных участках.

Поэтому для составления уравнений движения машину представляют в виде условной механической схемы, называемой *приведённой эквивалентной расчётной схемой машины*. Предусмотренные этой схемой динамические качества машины должны быть эквивалентны качествам реальной конструкции, то есть правильно отражать её основные динамические характеристики. Допущенная на этом этапе ошибка сводит на нет всё решение задачи и его исследование.

Для решения поставленных перед исследованиями задач рассмотрим принципы построения эквивалентных расчётных схем, упрощения их до требуемого уровня сложности, преобразования структурных схем и получения численных значений при решении математических моделей.

## 1 Построение эквивалентных расчётных схем машин и механизмов

Любая машина состоит из большого числа сосредоточенных и распределённых масс. Изучение нагрузок в системах подобного вида в общем виде практически невозможно. При составлении эквивалентной расчётной схемы для любого динамического расчёта неизбежна идеализация самой машины, её звеньев, связей и характера внешних сил, ибо попытка описать движение элементов реальной машины с учётом всех особенностей её конструкции и условий режима загрузки приводит к чрезвычайно сложным системам уравнений, которые трудно решить, но ещё труднее проанализировать решение и сделать какие-либо практические выводы.

Чаще всего движущиеся узлы механизма – это массивные и довольно жёсткие тела, перемещающиеся в течение пускотормозного процесса почти как одно целое. Такие узлы или детали (ротор или якорь, муфты, тормозные шкивы, барабаны, зубчатые или ходовые колёса и т.п.) можно считать в первом приближении абсолютно жёсткими, а их инерционные свойства приписывать точке, совпадающей с центром тяжести.

Общая деформация механизма определяется главным образом упругой податливостью его валов, канатов и других элементов, имеющих очень маленькую массу. Эти элементы в первом приближении принимают безмассовыми и абсолютно упругими.

Таким образом, расчётная схема механизма представляется в виде ряда точечных масс, соединённых между собой невесомыми абсолютно упругими звеньями.

В составе каждого механизма всегда есть, как правило, и вращающиеся, и поступательно движущиеся узлы. Для большей наглядности динамического взаимодействия отдельных масс друг с другом приводят массы, нагрузки, коэффициенты жёсткости, зазоры к одному какому-нибудь звену (звену приведения) и получают расчётную схему, которая динамически эквивалентна исходной системе. Анализируя динамические процессы в такой схеме, необходимо всегда помнить о том, что все расчётные параметры имеют приведённое значение – и нагрузки, и массы (моменты инерции), и коэффициенты жёсткости, и зазоры (люфты).

Если приведение выполнено на какой-либо вал механизма, то получаем расчётную схему вращательного движения. В ней нагрузки характеризуются крутящими моментами ( $H \cdot m$ ), инерционные свойства движущихся частей – моментами инерции ( $kg \cdot m^2$ ), упругость кинематических элементов – коэффициентами жёсткости при кручении ( $H \cdot m / рад$ ), люфты – угловыми зазорами ( $рад$ ). Если же приведение выполнено на поступательно движущийся элемент (например, канаты, цепи, рейки и т.п.), получаем расчётную схему поступательного движения, в которой нагрузки характеризуются силами ( $H$ ), инерционные свойства движущихся узлов – их массами ( $kg$ ), упругость кинематических элементов – коэффициентами жёсткости при растяжении или сжатии ( $H/m$ ), а люфты – линейными зазорами ( $m$ ).

Основные допущения при динамических расчётах:

1) принимается, что любую машину можно представить в виде некоторой механической модели, состоящей из отдельных сосредоточенных масс, соединённых упругими связями;

2) упругие связи считаются невесомыми и характеризуются постоянным коэффициентом жёсткости (при более точных расчётах возможен учёт масс связей, а также непостоянства, нелинейности их жёсткости, если такое непостоянство имеется).

Рассмотрим теперь правила приведения нагрузок. Коэффициенты жёсткости упругих элементов определяют по правилам сопротивления материалов, а приводят их при составлении расчётной схемы так же, как и массы (моменты инерции).

Если задаться законом изменения нагрузки привода, нагрузку статических сопротивлений считать в первом приближении неизменной, пренебречь изменением других параметров и затуханием колебаний, то представляется возможным дать сравнительно простое математическое описание нагрузок звеньев в пускотормозных процессах. Многочисленные натурные и стендовые испытания исследованных машин и механизмов подтверждают практическую приемлемость такого описания как при определении наибольших нагрузок, так и при выяснении качественных сторон изучаемого процесса.

При составлении эквивалентной расчётной схемы для любой механической системы неизбежна идеализация её звеньев, связей и характера внешних сил. Условием динамической эквивалентности исходной и приведённой систем является *равенство величин кинетической и потенциальной энергии до и после приведения*. Таким образом, от многовальной схемы можно перейти, например, к трёх-, двух- или одновальной эквивалентным схемам, изменив при переходе инерционные характеристики и параметры связей так, чтобы энергия систем оставалась без изменения.

Рассмотрим составление расчётной схемы на примере машины, кинематическая схема которой представлена на рис. 1.1,а.

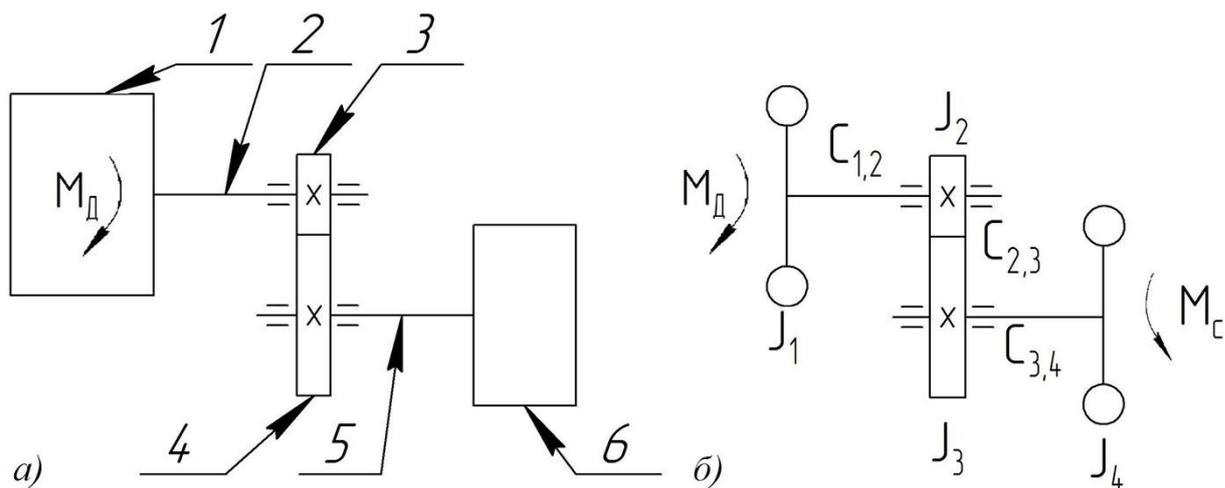


Рис. 1.1 – Кинематическая схема механизма: 1 – двигатель; 2 – вал двигателя; 3, 4 – зубчатая передача; 5 – вал рабочего органа; 6 – рабочий орган

Если рабочий орган и двигатель изобразить в виде маховиков с моментом инерции  $J$ , то получим схему, показанную на рис. 1.1,б. Составлять уравнения движения для маховиков  $J_1$  и  $J_4$ , используя эту схему, также неудобно, ибо она включает в себя зубчатую передачу, а маховики вращаются с различными скоростями.

При составлении уравнений движения схему рис. 1.1,б приводят к виду, представленному на рис. 1.2,а, исключив зубчатую передачу и представив схему машины в виде одного вала, состоящего из ряда маховиков, соединённых упругими связями.

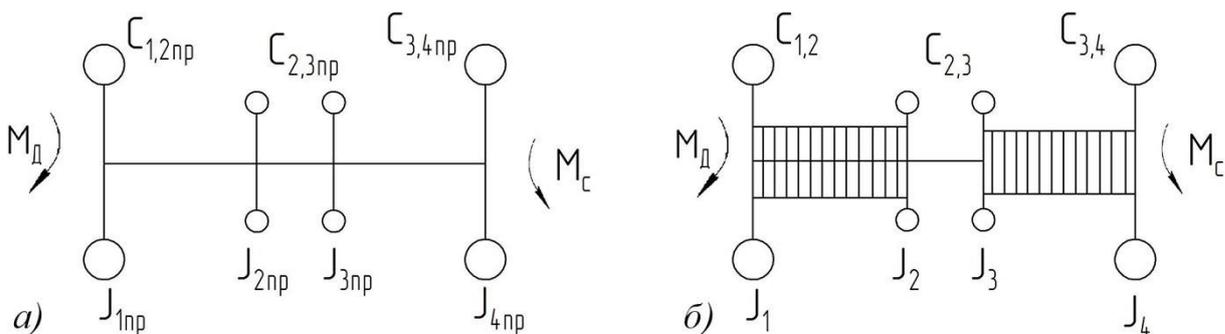


Рис. 1.2 – Эквивалентная приведённая схема механизма

Полученная одновальная схема называется *эквивалентной приведённой схемой*, а жёсткости, массы и силы на этой схеме называются *приведёнными жёсткостями, массами и силами*.

*Приведённая масса* – это масса, которую нужно расположить в центре приведения, чтобы получить кинетическую энергию, равную кинетической энергии заданной массы при её прежнем расположении, если считать трансмиссию машины абсолютно жёсткой.

*Приведённой жёсткостью* называется момент (или усилие), который необходимо приложить к центру приведения, чтобы повернуть его на 1 радиан (или сдвинуть его на 1 метр) за счёт деформации данного участка.

*Приведённая сила* – это сила, которая будучи приложенной к массе, расположенной в центре приведения, оказывает на неё такое же воздействие, как и при реальном приложении приводимой силы.

Иногда эквивалентную приведённую схему изображают таким образом, что расстояния между сосредоточенными массами обратно пропорциональны приведённым жёсткостям связей между ними, а на линиях связей откладывают прямоугольники, площади которых численно равны приведённым моментам инерции связей (если не пренебрегать массами связей). Такое изображение эквивалентной схемы называется *эквивалентным валом с диаграммой масс* (рис. 1.2,б) и даёт наглядное представление о распределении масс системы, соотношении приведённых жёсткостей.

Для построения эквивалентной расчётной схемы – эквивалентного вала (рис. 1.2,а) и диаграммы масс (рис. 1.2,б), необходимо знать численные значения элементов кинематической схемы: масс и жесткостей.

### **1.1 Определение масс, жёсткостей кинематической схемы**

*Моменты инерции* зубчатых колёс, сплошных валов, барабанов, маховиков, блоков, соединительных муфт и так далее определяются ориентировочно по формуле

$$J = \frac{m \cdot d^2}{K}, \quad (1.1)$$

где  $J$  – момент инерции, кг·м<sup>2</sup>;

$m$  – масса элемента кинематической схемы, кг;

$d$  – наружный диаметр элемента кинематической схемы, м.

$K$  – коэффициент сплошности детали, значения которого различны для различных деталей (например, для детали сплошного сечения, вала,  $K = 8$ ).

Из проектировочного расчёта валов, работающих на кручение, можно найти значение *внешнего диаметра вала*

$$d = \sqrt[3]{\frac{5M}{[\tau_k]}}, \quad (1.2)$$

где  $d$  – диаметр вала, м;

$M$  – крутящий момент вала, Н·м;

$[\tau_k]$  – допускаемое напряжение на кручение, для стального вала можно принять  $[\tau_k] = 20 \cdot 10^6$  Па.

Полученное значение диаметра вала следует округлять до ближайшего большего значения ряда значений по ГОСТ 2590-88 (мм): 5; 5,5; 6; 6,3; 6,5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 50; 52; 53; 54; 55; 56; 58; 60; 62; 63; 65; 67; 68; 70; 72; 75; 78; 80; 82; 85; 87; 90; 92; 95; 97; 100; 105; 110; 115; 120; 125; 130; 135; 140; 145; 150; 155; 160; 165; 170; 175; 180; 185; 190; 195; 200; 210; 220; 230; 240; 250; 260; 270.

*Жёсткость вала* определяется выражением

$$C = \frac{J_p \cdot G}{l}, \quad (1.3)$$

где  $C$  – угловая жёсткость вала, Н·м/рад;

$G$  – модуль сдвига, для стали  $G = 8,34 \cdot 10^{10}$  Па;

$d$  – наружный диаметр вала, м;

$J_p$  – полярный момент инерции вала, м<sup>4</sup>; для вала сплошного сечения

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (1.4)$$

*Массу* соответствующего участка длины вала можно определить следующей зависимостью

$$m = S \cdot \rho \cdot l, \quad (1.5)$$

где  $m$  – масса, кг;

$S$  – площадь поперечного сечения вала, м<sup>2</sup>; для вала сплошного сечения

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4};$$

$\rho$  – плотность материала вала, для стали  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;

$l$  – длина участка вала, м, которую можно определить при необходимости из соотношения (1.3).

## ***1.2 Приведение масс, жёсткостей и сил к эквивалентной расчётной схеме***

**1) Приведение масс.** Значимость той или иной массы в системе определяется величиной кинетической энергии этой массы. Кинетическая энергия до приведения системы, изображённой на рис. 1.1,б, составляет

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_1 \cdot \omega_1^2 + J_2 \cdot \omega_1^2 + J_3 \cdot \omega_2^2 + J_4 \cdot \omega_2^2),$$

где  $J_i$  – момент инерции относительно оси вращения вала;

$\omega_i$  – величина угловой скорости.

За центр приведения можно принять вал двигателя. Это означает, что эквивалентный вал и все массы будут иметь угловую скорость, равную скорости вала двигателя  $\omega_1$ . Тогда кинетическая энергия системы после приведения (см. рис. 1.2,а):

$$T_{np} = \frac{1}{2} \cdot \omega_1^2 \cdot (J_{1np} + J_{2np} + J_{3np} + J_{4np}).$$

Из условия равенства кинетических энергий системы до и после приведения для приведения вращающихся масс достаточно *момент инерции приводимой детали разделить на квадрат передаточного отношения между центром приведения и деталью* (рис. 1.1,б):

$$J_{1np} = J_1; \quad J_{2np} = J_2; \quad J_{3np} = \frac{J_3}{i_{12}^2}; \quad J_{4np} = \frac{J_4}{i_{12}^2}, \quad (1.6)$$

где  $i_{12}$  – передаточное отношение от центра приведения до приводимого участка

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (1.7)$$

определяемая как отношение угловой скорости  $\omega$  центра приведения к скорости приводимого участка.

Если требуется *поступательно движущуюся массу  $m$  грузоподъемного механизма привести к вращающемуся валу, принятому за центр приведения*, то такое приведение осуществляется следующим образом. Кинетические энергии системы до и после приведения определяются как:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}; \quad T_{np} = \frac{J_{np} \cdot \omega_1^2}{2},$$

где  $v$  – поступательная скорость движения массы  $m$ ;

$\omega_1$  – угловая скорость двигателя, вал которого принят за центр приведения.

Из равенства кинетических энергий до и после приведения получим

$$J_{mnp} = \frac{m \cdot v^2}{\omega_1^2} = \frac{m \cdot \omega_6^2 \cdot r_6^2}{\omega_1^2} = \frac{m \cdot r_6^2}{i_{12}^2}, \quad (1.8)$$

где  $\omega_6$  – угловая скорость барабана грузоподъемного механизма;

$i_{12}$  – передаточное отношение от центра приведения до приводимого участка (1.7).

Таким образом, при приведении к валу двигателя поступательно движущейся со скоростью  $v$  массы  $m$  величина массы умножается на квадрат радиуса барабана  $r_6$  и делится на квадрат передаточного отношения между валом двигателя и валом барабана  $i_{12}$ .

2) *Приведение жёсткостей.* В рассматриваемом случае приведения системы (см. рис. 1.1,б) участок 3–4, обладающей круговой жёсткостью  $C_{3,4}$ , приводится к центру, в качестве которого взят вал с круговой жёсткостью  $C_{1,2}$ . Потенциальная энергия участка 3–4, подверженного крутильным колебаниям, равна

$$P = \frac{1}{2} \cdot C_{3,4} \cdot \varphi_{3,4}^2,$$

где  $\varphi_{3,4}$  – угол закручивания участка 3–4.

Если этот участок получит деформацию  $\varphi_{3,4}$ , то центр приведения (вал маховика  $J_1$ ) повернётся за счёт деформации участка 3–4 на величину  $\varphi_{np} = i_{12} \cdot \varphi_{3,4}$ , являющуюся *деформацией* приведенного участка. Из условия равенства потенциальных энергий до и после приведения

$$\frac{1}{2} \cdot C_{3,4} \cdot \varphi_{3,4}^2 = \frac{1}{2} \cdot C_{3,4np} \cdot (i_{12} \cdot \varphi_{3,4})^2$$

определяется жёсткость участка 3–4 (рис. 1.2,а), приведенная к валу 1–2:

$$C_{3,4np} = \frac{C_{3,4}}{i_{12}^2}, \quad (1.9)$$

то есть для определения величины приведенной жёсткости любого элемента достаточно *разделить его жёсткость на квадрат передаточного отношения между центром приведения и приводимым звеном.*

Приведение жёсткости каната механизма подъёма груза, жёсткости зубчатого зацепления к круговой жёсткости вала также производится на основании равенства потенциальных энергий деформации.

Так, если *жёсткость каната механизма подъёма груза* приводится к валу двигателя, то равенство потенциальных энергий запишется

$$\frac{E_k \cdot x^2}{2l} = \frac{C_{np} \cdot \varphi_1^2}{2},$$

где  $E_k$  – погонная жёсткость каната, Н;

$l$  – длина каната, м;

$x$  – перемещение поднимаемого груза за счёт деформации каната, м;

$\varphi_1$  – величина деформации вала двигателя, вал которого принят за центр приведения, рад.

Из приведенного равенства получим

$$C_{np} = \frac{E_k \cdot x^2}{l \cdot \varphi_1^2} = \frac{E_k \cdot \varphi_{\delta}^2 \cdot r_{\delta}^2}{l \cdot \varphi_1^2} = \frac{E_k \cdot r_{\delta}^2}{l \cdot i_{12}^2}, \quad (1.10)$$

где  $\varphi_1$  – угол поворота двигателя, рад;

$\varphi_{\delta}$  – угол поворота вала барабана, рад;

$r_{\delta}$  – радиус барабана, м.

Линейная жёсткость зубчатого зацепления  $C_d$  приводится сначала к круговой жёсткости вала одной из шестерён данного зубчатого зацепления

$$C_{np} = C_d \cdot r_i^2, \quad (1.11)$$

где  $r_i$  – радиус начальной окружности шестерни, к валу которой приводится значение жёсткости.

Радиус начальной окружности шестерни можно определить из проектировочного расчёта зубчатых передач по формуле

$$r = \frac{1}{2} \cdot K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{12} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{12}}}, \quad (1.12)$$

где  $M$  – крутящий момент, передаваемый шестерней, Нм;

$K_d$  – вспомогательный коэффициент,

– для прямозубых передач  $K_d = 0,77$ ;

– для косозубых и шевронных передач – 0,675;

$\Psi_{bd}$  – коэффициент ширины зубчатого венца  $b$  относительно внешнего конусного расстояния  $r_e$

$$\Psi_{bd} = \frac{b}{r_e} \leq 0,3,$$

меньшие значения которого назначают для неприрабатываемых зубчатых колёс, когда их твёрдость больше 350 НВ или скорость больше 15 м/с;

$K_{H\beta}$  – коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине венца, определяют для каждого вида зубчатого зацепления; например,  $K_{H\beta} = 1$  – для прямозубых передач; а для конических – по графикам рис. 1.3.

$[\sigma_H]$  – допустимое контактное напряжение, для расчётов можно принимать  $[\sigma_H] = 790$  МПа;

$i_{12}$  – передаточное число зубчатой передачи.

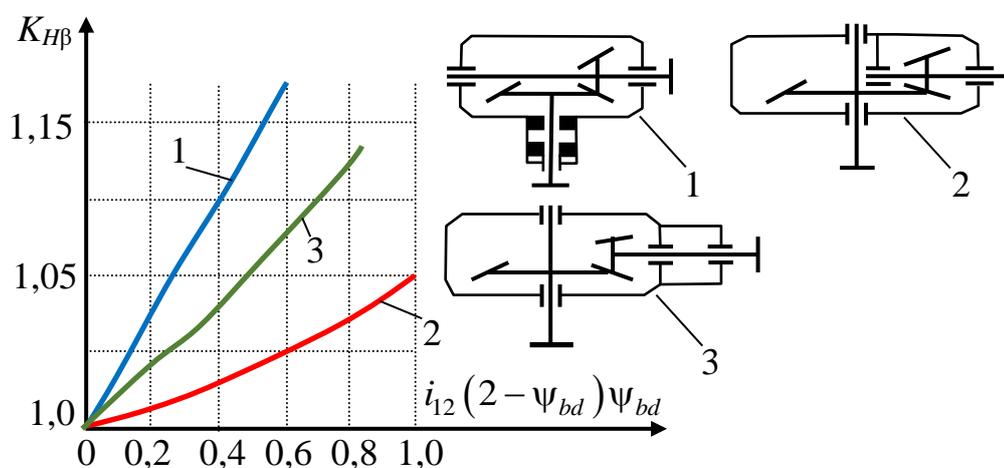


Рис. 1.3 – Зависимость коэффициента неравномерности распределения нагрузки по длине зуба в зависимости от коэффициента ширины зубчатого венца

Сама же *линейная жёсткость зубчатого зацепления*, зависящая от контактных и изгибных деформаций зубьев, определяется по формуле

$$C_n = \xi \cdot b \cdot \cos^2 \alpha ,$$

где  $\xi$  – величина нагрузки пары зубьев, отнесённой к единице ширины зуба,

$\xi = 1,7 \cdot 10^{10}$  Па – для стальных прямозубых колёс,

$\xi = 2,8 \cdot 10^{10}$  Па – для стальных косозубых колёс;

$b$  – ширина зуба, м;

$\alpha$  – угол наклона зубьев.

Аналогично определяется *линейная жёсткость шлицевых и шпоночных соединений*

$$C_n = \xi \cdot S ,$$

где  $S$  – рабочая поверхность, передающая нагрузку, мм<sup>2</sup>;

$\xi$  – контактная жёсткость соединения,  $\xi = 160 \dots 200$  Н/мм<sup>2</sup>.

*Жёсткость угловая всей связи* определяется с учётом приведенных линейных жесткостей зубчатых, шлицевых, шпоночных соединений, жёсткости каната грузоподъёмного механизма.

При параллельном соединении двух упругих связей, имеющих коэффициенты жёсткости  $C_1, C_2$  (рис. 1.4,а), смещение тела равно деформации каждой из упругих связей:

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2.$$

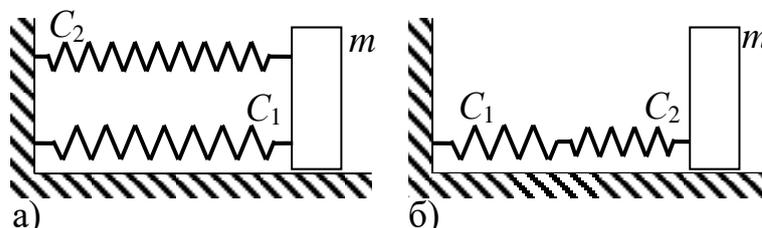


Рис. 1.4 – Типы соединений с помощью упругих связей: а – параллельном; б – последовательном

Сила упругости эквивалентной пружины с коэффициентом жесткости  $C^*$  будет равна сумме сил упругости двух установленных пружин

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = -C_1 \Delta l - C_2 \Delta l = -(C_1 + C_2) \Delta l;$$

$$F_x = -C^* \Delta l.$$

Так как в этих выражениях  $\Delta l = \text{const}$ , то коэффициент упругости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов упругости отдельных пружин при параллельном их соединении

$$C^* = C_1 + C_2 .$$

При последовательном соединении двух пружин, имеющих коэффициенты жёсткости  $C_1, C_2$  (рис. 1.4,б), смещение материальной точки равно сумме деформаций пружин:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Сила упругости эквивалентной пружины с коэффициентом жёсткости  $C^*$  будет равна каждой из сил упругости установленных пружин

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x1} + F_{x2} = -C_1 \Delta l_1 - C_2 \Delta l_2; \\ F_x &= -C^* \Delta l, \end{aligned}$$

или

$$\Delta l = \frac{|F_x|}{C^*}, \quad \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{|F_{x1}|}{C_1} + \frac{|F_{x2}|}{C_2},$$

откуда из условия равенства  $\Delta l = \text{const}$  получим соотношение упругих коэффициентов

$$\frac{1}{C^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{или} \quad C^* = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим на примере рис. 1.1,б приведение линейной жёсткости зубчатого зацепления  $C_{2,3}$  к валу 3–4 с последующим приведением к центру приведения системы (валу 1–2) по общему правилу (1.13). Согласно выражению (1.11) приведенная к валу 3–4 жёсткость зубчатого зацепления  $C_{2,3np}$  определяется радиусом делительной окружности шестерни  $J_3$

$$\begin{aligned} C_{2,3np} &= C_{2,3} \cdot r_2^2; \\ \frac{1}{C'_{3,4}} &= \frac{1}{C_{2,3np}} + \frac{1}{C_{3,4}} \Rightarrow C'_{3,4} = \frac{C_{2,3np} \cdot C_{3,4}}{C_{2,3np} + C_{3,4}}; \quad C_{3,4np} = \frac{C_{3,4}}{i_{12}^2}. \end{aligned}$$

**3) Приведение сил.** При переходе от кинематической схемы машины (см. рис. 1.1,а) к эквивалентной расчётной схеме (см. рис. 1.2,а) необходимо выполнить также и приведение сил, так как на приведенные массы эквивалентной расчётной схемы должны действовать приведенные силы. Если за центр приведения принять вал 1, то очевидно, что момент сопротивления на рабочем органе  $M_c$ , приведенный к валу двигателя, определится следующим образом:

$$M_{Cnp} = \frac{M_c}{i_{12} \cdot \eta_{mp}}, \quad (1.14)$$

где  $\eta_{mp}$  – коэффициент полезного действия (КПД) трансмиссии от массы, к которой приложена приводимая сила, до центра приведения

$$\eta_{mp} = \eta_{zn}^n \cdot \eta_{ndu}^m, \quad (1.15)$$

$\eta_{zn}$  – КПД зубчатых передач,  $\eta_{zn} = 0,95$ ;

$\eta_{ndu}$  – КПД подшипниковых узлов трения качения,  $\eta_{ndu} = 0,98$ ;

$n$  – количество зубчатых передач до центра приведения;

$m$  – количество подшипниковых опор кинематической схемы.

Линейная сила  $P$  приводится к вращающемуся центру приведения по формуле

$$M_{Cnp} = \frac{P \cdot r}{i_{12} \cdot \eta_{mp}}, \quad (1.16)$$

где  $r$  – радиус приложения линейной силы, перенесённой к вращающемуся центру.

### ***1.3 Упрощение эквивалентных расчётных схем до уровня минимальной сложности***

Даже несложная трансмиссия может иметь эквивалентный вал, состоящий из нескольких сосредоточенных маховиков и нескольких участков с распределёнными массами. Уравнения движения такой системы громоздки и, следовательно, решать их затруднительно. Как правило, в машинах одновременно происходит несколько качественно различных процессов.

Например, в трансмиссии привода рабочего органа экскаватора для разработки мерзлоты могут одновременно протекать:

- 1) переходные динамические процессы, вызванные столкновением исполнительного органа (резцов) с твёрдыми включениями и резким увеличением сил сопротивления на рабочем органе;
- 2) вынужденные крутильные колебания в редукторе под действием периодических внешних сил в зубчатых передачах и исполнительном органе (например, вследствие непостоянства числа резцов, одновременно находящихся в контакте с забоем);
- 3) волновые (продольные) колебания в экскаваторе, вызываемые периодическими возмущениями, связанными с изменениями мгновенной скорости подъёма, опускания или заглупления ковша, а также внешними силами, изменение которых носит случайный характер.

В зависимости от характеристик двигателя, трансмиссии и исполнительного органа, а также от внешних условий тот или иной процесс приобретает преобладающее значение и вызывает наибольшие нагрузки. Поэтому для упрощения обычно выделяют отдельно интересующий процесс и изучают его, не учитывая остальные, если это не вносит существенных искажений в общую картину рассматриваемого явления. Данный метод называется *принципом суперпозиции*.

Самым первым упрощением эквивалентного вала является или пренебрежение массами связей, или распределение масс связей между соседними маховиками. В таком случае получается многомассная система с конечным числом масс. Но движение такой системы описывают лишь в том случае, если хотят *найти самые высокие частоты колебаний*.

На практике же, как правило, требуется знать приближённые значения нескольких *низших собственных частот*, а поэтому систему упроща-

ют, сводя её к одно-, двух-, трёхмассным системам. Рассмотрим общую направленность в упрощении расчётных схем при определении нагрузок.

1) *Процесс запуска.* При упрощении эквивалентного вала в целях получения расчётной схемы для определения усилий при запуске машины или механизма учитывается, что они определяются в первую очередь силами инерции исполнительного органа, а также движущим усилием при запуске, непосредственно приложенным к массе вращающихся частей самого двигателя.

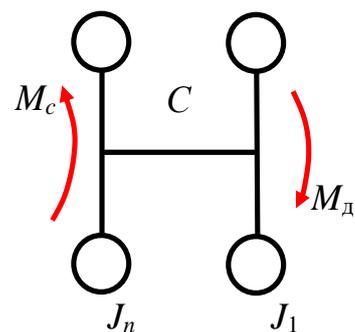


Рис. 1.5 – Упрощённая расчётная схема механизма запуска трансмиссии

Поэтому при расчёте схема может иметь вид, показанный на рис. 1.5, где  $J_1$  – приведенный момент инерции ротора двигателя;  $J_n$  – суммарный приведенный момент инерции рабочего органа и трансмиссии;  $C$  – суммарная приведенная жёсткость трансмиссии и рабочего органа, по формуле (1.13);  $M_d$  – приведенный движущий момент двигателя;  $M_c$  – приведенный момент сопротивления рабочего органа.

2) *Процесс стопорения* – это иногда встречающийся на практике режим работы машины или механизма, когда их рабочий орган оказывается заблокированным, то есть неподвижным. Примером таких режимов можно назвать условия начала движения автотранспортного средства при заблокированном стояночном тормозе; условия взаимодействия ковша строительной машины с непреодолимым препятствием и так далее. В этом случае начинается динамический процесс деформации ковша, трансмиссии, а также и препятствия.

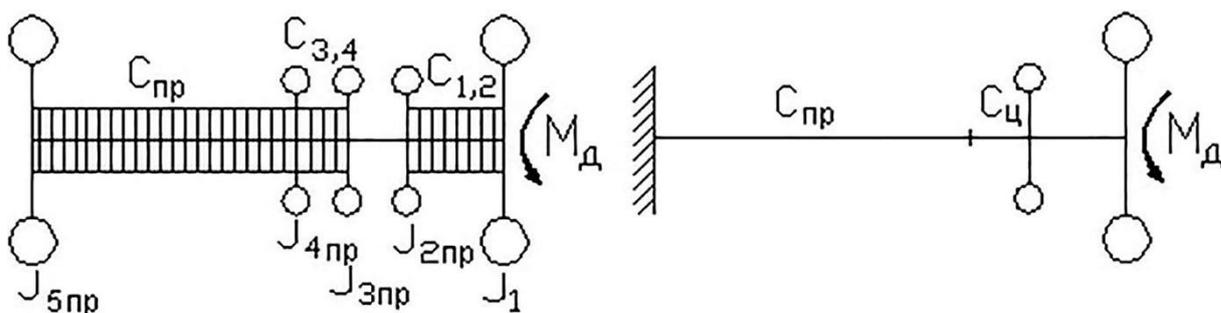


Рис. 1.6 – Расчётная схема механизма стопорения трансмиссии

Принимаем, что сила взаимодействия ковша с препятствием пропорциональна линейному перемещению ковша экскаватора, который встретился с этим препятствием (1.11). Тогда на расчётной схеме (рис. 1.6,а) препятствие можно изобразить участком с определённой приведенной жёсткостью

$$C_{пр} = \frac{\alpha \cdot r^2}{i_{15}^2},$$

где  $\alpha$  – жёсткость препятствия, Н/м;

$r$  – средний радиус ведущей звёздочки, м;

$i_{15}$  – общее передаточное отношение от вала двигателя до препятствия.

Само же препятствие можно представить в виде маховика огромных размеров с моментом инерции  $J_{5np} \approx \infty$  (рис. 1.6,а). В данном случае инерционную характеристику ковша следует присоединить к соседней сосредоточенной массе  $J_4$ , а другой конец показать в виде заделки (рис. 1.6,б).

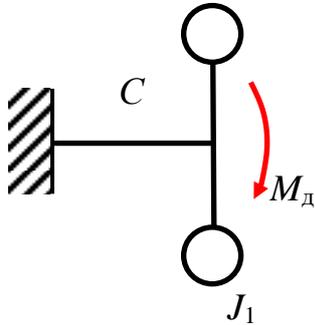


Рис. 1.7 – Привод машины при стопорении рабочего органа как система с одной степенью свободы

Как видим, все массы трансмиссии практически сосредоточены в одном месте, поэтому влияние отдельных узлов трансмиссии на закон движения всей упругой системы при стопорении рабочего органа невелико. Без существенных искажений их массу в некоторой пропорции можно присоединить к массе ротора, представив привод машины как систему с одной степенью свободы (рис. 1.7), где  $C$  – суммарная приведенная жёсткость препятствия и трансмиссии;  $J$  – суммарный приведенный момент инерции двигателя, трансмиссии и части рабочего органа.

В этой схеме не учтено влияние непостоянства передаточного отношения между двигателем и рабочим органом вследствие изменения радиуса набегающей цепи. Как показывают расчёты процесса стопорения, учёт переменности радиуса звёздочки мало влияет на результат, но значительно усложняет решение.

#### 1.4 Правила суммирования (присоединения) масс при упрощении эквивалентного вала. Принцип Релея

Выполняя практические расчёты на эквивалентном валу, целесообразно выделять лишь наиболее крупные массы (моменты инерции) и прибавлять к ним в определённой пропорции массы остальных элементов.

В самом первом приближении массы эквивалентного вала можно складывать по их абсолютной величине без учёта жёсткостей связей между ними. Более точное определение расчётных нагрузок позволят сделать упрощённые расчётные схемы, полученные с использованием принципа Релея: допускается, что характер деформации системы при динамических процессах сохраняется таким же и при статическом нагружении.

Так как уравнение деформации эквивалентного вала при его статическом нагружении записать несложно, то для каждой массы и каждого сечения весомой связи можно записать выражение для определения перемещения  $x_i$  через перемещение одной из основных масс.

Согласно принципу Релея, если считать характер деформации одинаковым со статическим, выражение кинетической энергии этой массы или элементарного отрезка весомой связи при динамических процессах

$$T = \frac{m \cdot \dot{x}_i^2}{2} \quad \text{или} \quad T = \frac{dm \cdot \dot{x}_0^2}{2}.$$

После этого к массе, принятой за основную, перемещение которой при том же статическом нагружении равно  $x_0$ , добавляем массу  $m_d$ , которая при перемещении с основной массой обладает такой же кинетической энергией, как и при прежнем её расположении. Тогда из равенства кинетических энергий получаем значение *добавочной массы*

$$m_d = m \cdot \frac{\dot{x}_i^2}{\dot{x}_0^2}.$$

Покажем это на примерах.

**Пример 1.** *Процесс подъёма груза грузоподъёмным механизмом.*

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.8,а, из груза  $m$ , подвешенного на длинном канате (с длиной каната  $L$ , погонном весе  $q$ ).

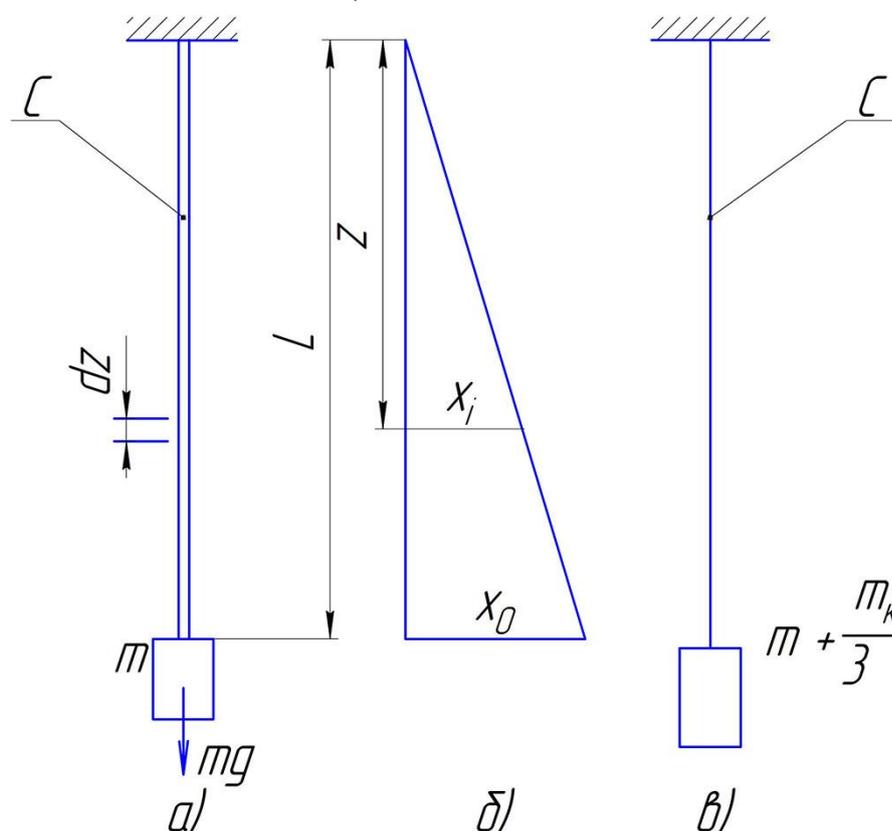


Рис. 1.8 – Приведение массы канатной подвески к массе концевого груза: а – система с подвешенным грузом; б – перемещение сечений подвески груза; в – упрощённая расчётная схема

Даже исследование собственных колебаний такой системы с учётом распределенной массы приводит к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных. Пренебрежение массой каната значительно упрощает задачу, но вносит заметную погрешность, если масса каната соизмерима с массой груза. Погрешность эта может быть значительно уменьшена, если к массе концевого груза добавить некоторую часть массы каната. Провести такое сложение позволяет метод Рэлея.

При статическом нагружении *перемещения сечения троса* подчиняются линейному закону и перемещение  $x_i$  любого сечения можно определить через перемещение  $x_0$  концевого груза следующим образом (рис. 1.8,б)

$$x_i = \frac{z}{L} \cdot x_0. \quad (1.17)$$

Если при динамических процессах соотношение (1.17) полагать прежним, то кинетическая энергия каната длиной  $dz$  запишется:

$$dT = \frac{\dot{x}_i^2}{2} dm = \frac{\dot{x}_i^2 q}{2g} dz,$$

где  $q$  – погонный вес, Н;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Интегрируя, найдем полную кинетическую энергию каната:

$$T = \frac{q}{2g} \int_0^L \dot{x}_i^2 dz = \frac{q\dot{x}_0^2}{2gL^2} \int_0^L z^2 dz = \frac{qL\dot{x}_0^2}{6g}.$$

Так как кинетическая энергия добавляемой к концу грузу массы  $m_\partial$  должна быть равна кинетической энергии каната, то

$$\frac{m_\partial \dot{x}_0^2}{2} = \frac{qL\dot{x}_0^2}{6g},$$

откуда величина добавляемой массы

$$m_\partial = \frac{qL}{3g} = \frac{m_k}{3}. \quad (1.18)$$

где  $m_k$  – масса каната.

Итак, система, изображенная на рис. 1.8,а, может быть упрощена до вида, изображенного на рис. 1.8,в. Зависимость (1.18) справедлива только при  $m / m_k \geq 20$ .

### **Пример 2. Процесс запуска.**

При упрощении эквивалентного вала (например, рис. 1.9,а) до двух-массной расчётной схемы, удобной для исследования процессов запуска, метод Рэлея не позволяет найти непосредственно величины суммарных масс упрощённой схемы  $J_1$  и  $J_n$  (рис. 1.5), но даёт возможность записать приближенное выражение кинетической энергии исходной системы как квадратичную функцию скоростей только двух (наиболее крупных масс  $J_1$  и  $J_n$ ), принятых за основные:

$$T = \Phi(\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_n^2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_n). \quad (1.19)$$

Зная функцию (1.19) и используя уравнения Лагранжа, можно получить два дифференциальных уравнения с неизвестными обобщёнными ко-

ординатами  $\theta_1$  и  $\theta_n$ , описывающими движение упрощённой системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим этот случай подробнее.

На эквивалентном валу (рис. 1.9,а) массы  $J_1$  и  $J_n$  примем за основные. К массе  $J_1$  приложен движущий момент двигателя, к массе  $J_n$  – приведенный момент сопротивления движению исполнительного органа.

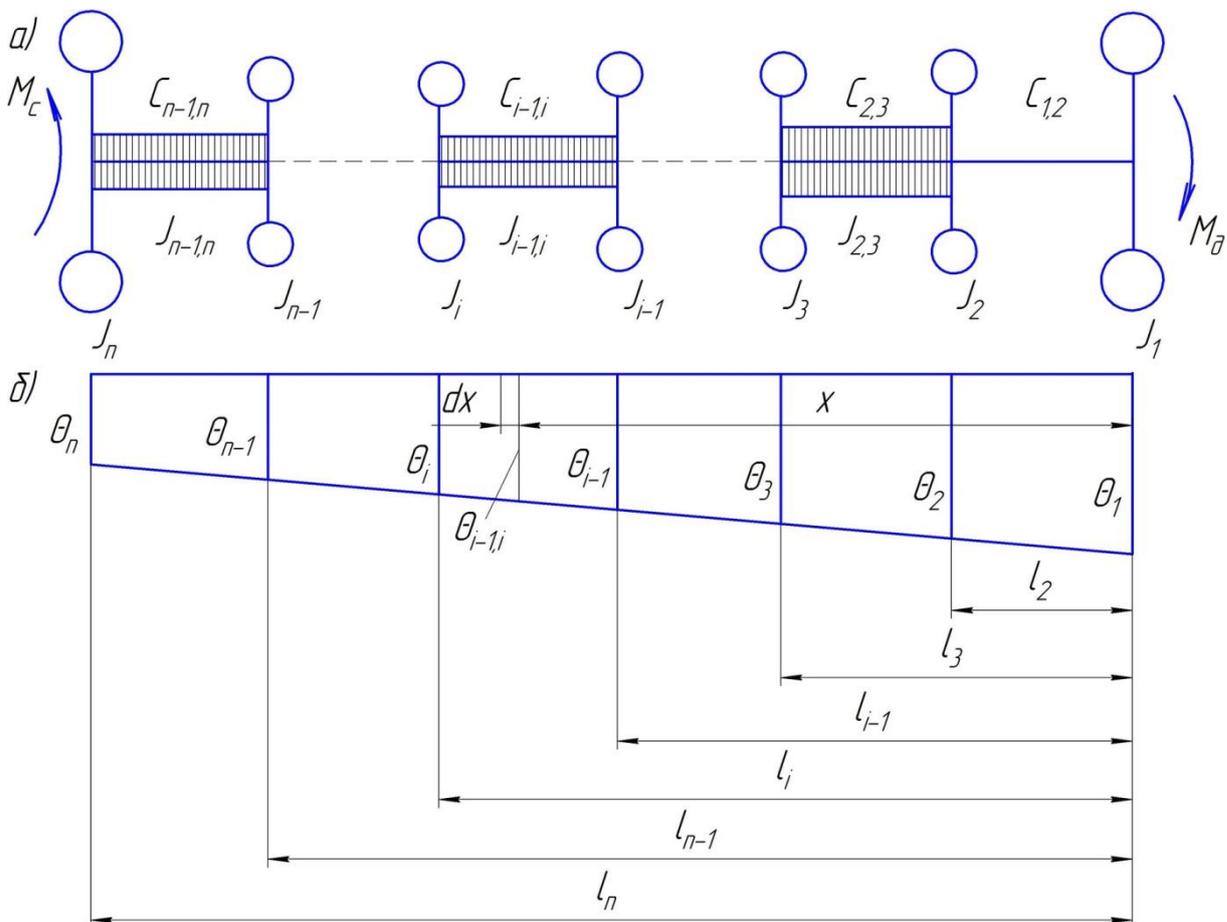


Рис. 1.9 – Эквивалентная схема (а) машины и характер деформации при статическом нагружении (б)

Характер деформации такой системы при статическом нагружении зависит от того, могут ли силы сопротивления  $M_c$  на исполнительном органе вызвать его обратное вращение (как, например, в грузоподъёмных механизмах) или силы сопротивления носят реактивный характер (силы трения, силы копания и т.п.) и проявляют себя только в том случае, когда внешнее усилие двигателя стремится сдвинуть исполнительный орган.

Тогда согласно рис. 1.5 получим соотношения между перемещениями масс при статическом нагружении:

– для сосредоточенных маховиков

$$\theta_i = \theta_1 - \frac{\theta_1 - \theta_n}{l_n} \cdot l_i = \theta_1 \cdot \left(1 - \frac{l_i}{l_n}\right) + \theta_n \cdot \frac{l_i}{l_n}; \quad (1.20)$$

– для участков с распределёнными моментами инерции

$$\theta_{i-1,i} = \theta_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_n}\right) + \theta_n \cdot \frac{x}{l_n}, \quad (1.21)$$

где  $\theta_1$  – приведенный угол поворота ротора двигателя, рад;

$\theta_n$  – приведенный угол поворота исполнительного органа машины, рад;

$\theta_i$  – приведенный угол поворота  $i$ -го участка трансмиссии, выделенного в виде сосредоточенного маховика;

$\theta_{i-1,i}$  – приведенный угол поворота  $x$ -го сечения  $i$ -го участка трансмиссии с распределённым моментом инерции.

Если считать, что при динамическом деформировании вала во время запуска перемещения всех масс будут выражаться теми же зависимостями (1.20) и (1.21) через перемещения масс  $J_1$  и  $J_n$ , то это позволяет записать выражение кинетической энергии системы масс эквивалентного вала

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{J_i \dot{\theta}_i^2}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{J_{i-1,i}}{2 \cdot (l_i - l_{i-1})} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \left[ \dot{\theta}_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_n}\right) + \dot{\theta}_n \cdot \frac{x}{l_n} \right]^2 dx; \quad (1.22)$$

$$\int_{l_{i-1}}^{l_i} \left[ \dot{\theta}_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_n}\right) + \dot{\theta}_n \cdot \frac{x}{l_n} \right]^2 dx = \quad (1.23)$$

$$= \dot{\theta}_1^2 \cdot \left( \frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} - \frac{l_i^2 - l_{i-1}^2}{l_n} + l_i - l_{i-1} \right) + \dot{\theta}_n^2 \cdot \frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_n \cdot \frac{l_i - l_{i-1}}{l_n}.$$

Подставляя в (1.22) выражения (1.20) и (1.23) и учитывая, что

$$l_i = \frac{\mu_C}{C_i}, \quad (1.24)$$

где  $C_i$  – угловая жёсткость участка вала, Н·м/рад;

$\mu_C$  – графический масштаб изображения жёсткостей на рис. 1.9, после преобразований получаем выражение кинетической энергии как квадратичную функцию скоростей  $\dot{\theta}_1$  и  $\dot{\theta}_n$ :

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_D \dot{\theta}_1^2 + J_{ДР} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_n + J_P \dot{\theta}_n^2), \quad (1.25)$$

где  $J_D$  – приведённое значение момента инерции ротора двигателя эквивалентной двухмассной расчётной схемы (см. рис. 1.5)

$$J_D = \sum_{i=1}^n J_i \cdot \left(1 - \frac{C}{C_i}\right)^2 + \sum_{i=2}^n J_{i-1,i} \cdot \left[ 1 - C \cdot \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_{i-1}}\right) + \frac{C^2 \cdot \left(\frac{1}{C_i^3} - \frac{1}{C_{i-1}^3}\right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1}}\right)} \right] \quad (1.26)$$

$J_{ДР}$  – приведённое значение распределённого момента инерции трансмиссии эквивалентной двухмассной расчётной схемы

$$J_{ДР} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n J_i \cdot \frac{C}{C_i} \cdot \left(1 - \frac{C}{C_i}\right) + \sum_{i=2}^n J_{i-1,i} \cdot C \cdot \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_{i-1}}\right); \quad (1.27)$$

$J_P$  – приведенное значение момента сопротивления движению исполнительного органа эквивалентной двухмассной расчётной схемы

$$J_P = \sum_{i=1}^n J_i \cdot \frac{C}{C_i^2} + \sum_{i=2}^n J_{i-1,i} \cdot \frac{C^2 \cdot \left(\frac{1}{C_i^3} - \frac{1}{C_{i-1}^3}\right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1}}\right)}. \quad (1.28)$$

Подставляя в уравнения Лагранжа выражение кинетической энергии (1.25), найдём значение потенциальной энергии деформации связи

$$П = \frac{C}{2} \cdot \left(\theta_1 - \theta_n + \frac{M_C}{C}\right)^2$$

и обобщенные силы  $M_D$  и  $M_C$ , получаем дифференциальные уравнения движения системы

$$\left. \begin{aligned} J_D \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \cdot J_{ДР} \ddot{\theta}_n &= -C \cdot \left(\theta_1 - \theta_n + \frac{M_C}{C}\right) + M_D; \\ J_P \ddot{\theta}_n + \frac{1}{2} \cdot J_{ДР} \ddot{\theta}_1 &= C \cdot \left(\theta_1 - \theta_n + \frac{M_C}{C}\right) - M_C. \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} J_D \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \cdot J_{ДР} \ddot{\theta}_n + C \cdot \theta_1 - \theta_n &= M_D - M_C; \\ J_P \ddot{\theta}_n + \frac{1}{2} \cdot J_{ДР} \ddot{\theta}_1 - C \cdot \theta_1 - \theta_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Незнание величин суммарных приведенных масс  $J_1$  и  $J_n$  упрощённой двухмассной расчётной схемы не мешает нам решить дифференциальные уравнения движения (1.29) относительно  $\theta_1$  и  $\theta_n$  или их разности  $\theta_1 - \theta_n$  и найти нагрузки в упругой связи при запуске.

**Пример 3.** *Процесс стопорения рабочего органа* рассмотрим на примере схемы, изображённой на рис. 1.10, где на участке  $l_5$  эквивалентного вала показана распределённая масса с моментом инерции  $J_P$ .

Если к массе с моментом инерции  $J_1$  приложить статический момент определённой величины, то согласно закону Гука (в пределах упругих деформаций жёсткость постоянна) *угловые перемещения сечений эквивалентного вала* будут подчиняться линейному закону (рис. 1.10,б)

$$\theta_i = \theta_1 \cdot \frac{z}{L}, \quad (1.30)$$

так как длина каждого участка определяется делением постоянного масштаба  $\mu_C$  (1.24) на жёсткость этого участка.

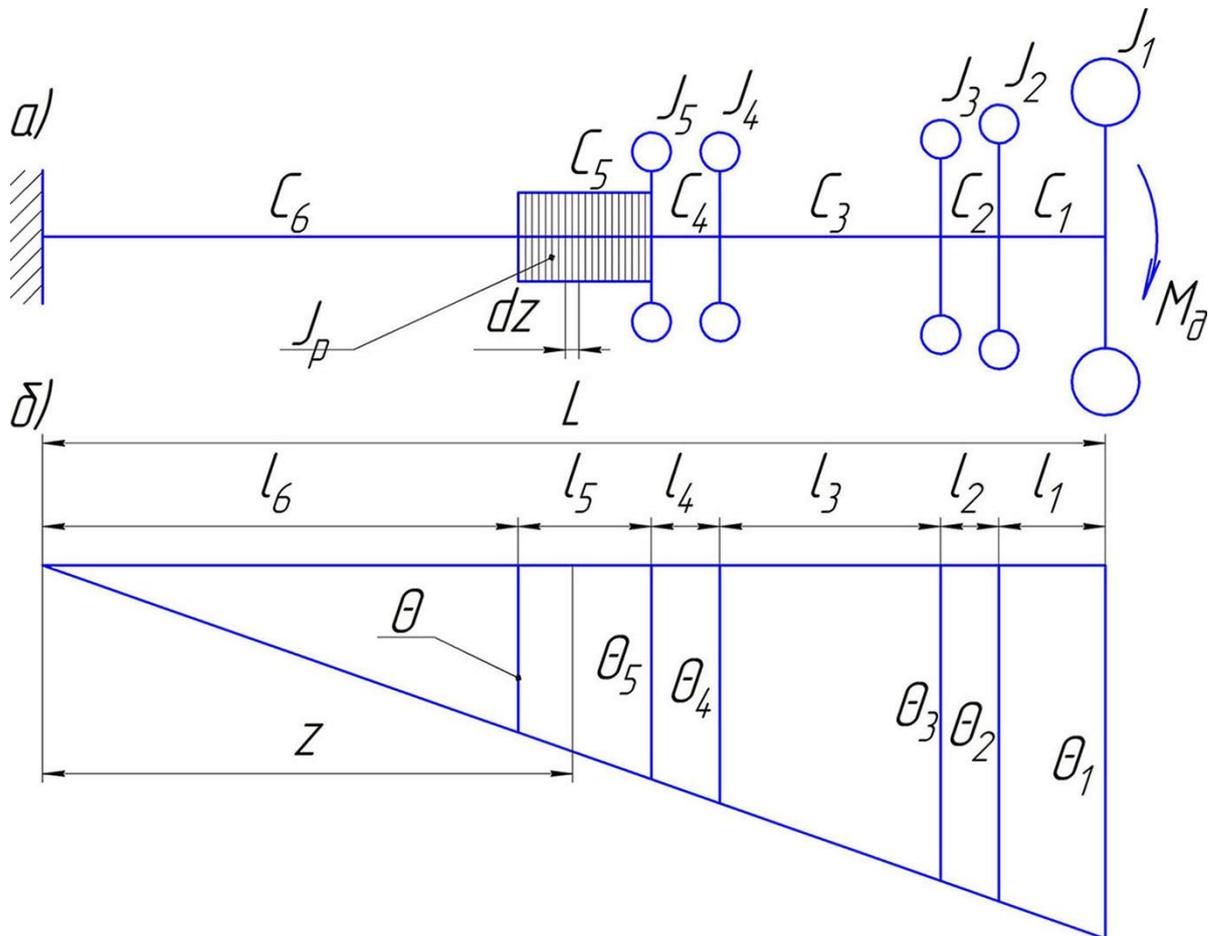


Рис. 1.10 – Эквивалентная схема (а) машины при стопорении рабочего органа и характер деформации сечений при статическом нагружении (б)

Используя метод Рэля, предполагаем, что при динамическом деформировании эквивалентного вала (например, при стопорении системы, применительно к которой и составлена схема) зависимость угла поворота любого сечения от угла поворота маховика  $J_1$  останется такой же, как и при статическом деформировании.

Так как угловые перемещения маховиков  $J_2, J_3, J_4, J_5$  выражаются через угловое перемещение  $\theta_1$  маховика  $J_1$  равенствами

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 \cdot \frac{L-l_1}{L}; & \theta_3 &= \theta_1 \cdot \frac{L-l_1-l_2}{L}; \\ \theta_4 &= \theta_1 \cdot \frac{L-l_1-l_2-l_3}{L}; & \theta_5 &= \theta_1 \cdot \frac{L-l_1-l_2-l_3-l_4}{L}, \end{aligned} \right\}$$

то выражения для кинетических энергий сосредоточенных масс в соответствии с методом Рэля можно записать в виде

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\theta}_1^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{J_2 \dot{\theta}_1^2 \cdot (L - l_1)^2}{2L^2} = \frac{J_2 \dot{\theta}_1^2}{2} \cdot \left( \frac{\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C}} \right)^2 = \frac{J_2 \dot{\theta}_1^2}{2} \cdot \left( 1 - \frac{C}{C_1} \right)^2 = k_2 J_2 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2},$$

где  $C$  – суммарная угловая жёсткость кинематической схемы (рис. 1.10,а)

$$\frac{1}{C} = \sum_1^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_6};$$

$k_2$  – постоянный коэффициент влияния

$$k_2 = \left( 1 - \frac{C}{C_1} \right)^2.$$

Аналогично получим

$$T_3 = k_3 J_3 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2}; \quad T_4 = k_4 J_4 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2}; \quad T_5 = k_5 J_5 \frac{\dot{\theta}_1^2}{2},$$

где

$$k_3 = \left( 1 - \frac{C}{C_1} - \frac{C}{C_2} \right)^2; \quad k_4 = \left( 1 - \frac{C}{C_1} - \frac{C}{C_2} - \frac{C}{C_3} \right)^2; \quad k_5 = \left( 1 - \frac{C}{C_1} - \frac{C}{C_2} - \frac{C}{C_3} - \frac{C}{C_4} \right)^2.$$

Если справедливо соотношение (1.30), то кинетическая энергия распределённой массы запишется в виде

$$T_p = \frac{J_p}{2l_5} \int_{l_6}^{l_6+l_5} \dot{\theta}_1^2 dz = \frac{J_p \dot{\theta}_1^2}{2l_5 L^2} \int_{l_6}^{l_6+l_5} z^2 dz = k_p J_p \frac{\dot{\theta}_1^2}{2},$$

где  $k_p = \frac{(l_6 + l_5)^3 - l_6^3}{3l_5 L^2}.$

Суммарная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} \cdot (J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3 + k_4 J_4 + k_5 J_5 + k_p J_p).$$

Такую же кинетическую энергию должна иметь эквивалентная масса  $J$ , которой заменяются маховые массы вала и которая должна быть поставлена на место массы  $J_1$ . Приравнявая выражения кинетических энергий, получим

$$\frac{J \dot{\theta}_1^2}{2} = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} \cdot (J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3 + k_4 J_4 + k_5 J_5 + k_p J_p),$$

где  $J$  – приведённый суммарный момент инерции

$$J = J_1 + \sum_{i=2}^n k_i J_i = J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3 + k_4 J_4 + k_5 J_5 + k_p J_p. \quad (1.31)$$

Сложив массы по формуле (1.31), можно для расчёта процесса стопорения системы использовать эквивалентную схему, показанную на рис. 1.10,а, представить в виде одномассной схемы, показанной на рис. 1.7, где  $C$  – суммарная приведенная жёсткость.

Из формулы (1.31) видно, что динамическая значимость маховика зависит от его приведенного момента инерции и места его расположения на эквивалентном валу. В формуле (1.31) коэффициенты  $k_i$  указывают, какую часть приведенной массы следует добавить к массе, принятой за основную. Например,

$$k_2 J_2 = \left(1 - \frac{C}{C_1}\right)^2 \cdot J_2 = \left(1 - \frac{190}{37000}\right)^2 \cdot J_2 = 0,99 \cdot J_2;$$

$$k_5 J_5 = \left(1 - \frac{C}{C_1} - \frac{C}{C_2} - \frac{C}{C_3} - \frac{C}{C_4}\right)^2 \cdot J_5 = \left(1 - \frac{190}{37000} - \frac{190}{59000} - \frac{190}{16000} - \frac{190}{50000}\right)^2 \cdot J_5 = 0,95 \cdot J_5.$$

Как видно из примера, при сложении масс от массы  $J_2$  берётся 99 %, а от массы  $J_5$  – 95 % их величины, то есть чем более податлив участок трансмиссии между рассматриваемым маховиком и основной массой, тем меньшая часть массы этого маховика присоединяется к основной массе.

В данном случае, когда жёсткость последнего участка  $l_6$ , имитирующего жёсткость забоя при встрече с непреодолимым препятствием, в сотни раз меньше жёсткостей участков редуктора, при изучении процессов резкого торможения исполнительного органа все массы редуктора можно непосредственно прибавить к массе ротор-двигателя. Вносимая при этом ошибка ( $\approx 0,05 \cdot J_i$ ) не выходит за пределы погрешности измерения  $J_i$ . Но если рассматривается процесс стопорения системы, в которой все приведённые жёсткости эквивалентного вала соизмеримы, то суммировать массы трансмиссии следует по формуле суммирования (1.31), так как масса любого маховика на эквивалентном валу будет уже значительно отличаться от массы, найденной по формуле

$$J_{np} = k_i J_i.$$

Однако иногда при изучении процессов стопорения даже в случае соизмеримых жесткостей участков эквивалентного вала абсолютные величины его масс суммируют с основной массой, завышая этим суммарную приведенную массу, что ведёт к получению завышенных нагрузок по сравнению с действительными.

Итак, возможность на основе принципа Рэля приближенной записи кинетической энергии как квадратичной функции скоростей только основ-

ных масс системы позволяет упрощать расчётную схему и сводить число степеней свободы до одной или двух.

### 1.5 Уравнения движения и проблема собственных значений

Степень сложности расчётной схемы определяется в первую очередь числом степеней свободы. Для инженерных целей выявления прочности основных звеньев механизма в расчёт вводят наиболее податливые упругие элементы (канаты или цепи, упругие муфты и т.п.). В результате получают расчётную схему с двумя, тремя, четырьмя или пятью массами и, соответственно, с одним, двумя, тремя или четырьмя соединительными упругими звеньями. Более сложные расчётные схемы привлекают обычно только для исследовательских целей и для оценки степени точности простых схем.

Рассмотрим, как решается задача о нагрузках в упругих элементах схемы, содержащих  $k + 1$  массу и  $k$  соединительных звеньев, с соблюдением вышеназванных упрощений. Расчётная цепная схема без ответвлений выглядит так, как показано на рис. 1.11.

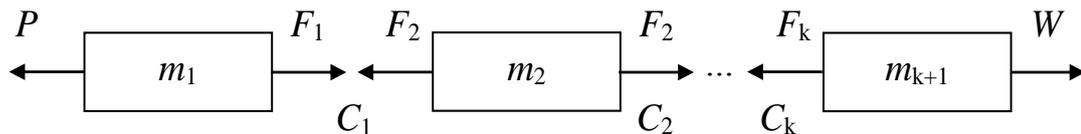


Рис. 1.11 – Многомассовая расчётная схема

Уравнения движения для консервативной схемы:

$$m_q \ddot{x}_q = F_{q-1} - F_q; \quad F_q = W + C_q (x_q - x_{q+1});$$

$$F_0 = P = \text{const}; \quad F_{q+1} = W = \text{const},$$

где  $P$  – среднепусковая сила двигателя,  $H$ ;

$W$  – сила статического сопротивления движению (в частном случае для механизма подъёма – это вес груза  $Q$ ),  $H$ ;

$q$  – номер массы и соответствующего соединительного звена;

$$q = 1, 2, \dots, k \text{ (для звена) и } k+1 \text{ (для массы)}.$$

При определении наибольших нагрузок воспользуемся упрощённым подходом, в котором не будем учитывать затухание колебаний. Однако такой подход даёт пренебрежимо малые погрешности. Для нагрузок имеем

$$F_q = D_q + \sum_{r=1}^k (A_{qr} \cos \omega_r t + B_{qr} \sin \omega_r t), \quad (1.32)$$

где  $D_q$  – свободные члены или кинематические нагрузки,  $H$ ;

$\omega_r$  – частоты собственных упругих колебаний,  $c^{-1}$ ;

$A_{qr}, B_{qr}$  – амплитуды гармонических составляющих,  $H$ ; определяются начальными условиями.

Наиболее просто определяются свободные члены

$$D_q = W + \frac{P - W}{m} \sum_{q+1}^{k+1} m_q,$$

где  $m = \sum_1^{k+1} m_q$  – масса всей системы, кг.

Полная нагрузка  $F_q$  по выражению (1.32) состоит из трёх составляющих:  $W$  – статической,  $(P - W) \Sigma m/m$  – инерционной и  $\Sigma(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$  – колебательной. В целях экономии места в последующем такую нагрузку будем условно именовать динамической.

Для аналитического определения амплитуд  $A$  и  $B$  в (1.32) необходимо найти частоты собственных колебаний (или, как говорят, решить проблему собственных значений). Для этого прежде всего необходимо составить *частотное уравнение*

$$\omega^{2k} - a_1 \omega^{2(k-1)} + a_2 \omega^{2(k-2)} - a_3 \omega^{2(k-3)} + \dots + (-1)^n a_n \omega^{2(k-n)} + \dots + (-1)^k a_k = 0,$$

где  $k$  – число упругих связей масс, составляющих расчётную схему.

Один из способов получения коэффициентов частотного уравнения – способ *М.И. Гриншпуна*, который сводится к определению квадратов парциальных частот одномассовых схем:

$$\gamma_1 = \frac{C_1}{m_1}; \gamma_2 = \frac{C_2}{m_2}; \dots; \gamma_{2k-1} = \frac{C_k}{m_k}; \gamma_{2k} = \frac{C_k}{m_{k+1}}. \quad (1.33)$$

Значения коэффициентов полинома схемы рис. 1.11:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=1}^{2k} \gamma_i; \quad a_2 = \gamma_1 \sum_{i=3}^{2k} \gamma_i + \gamma_2 \sum_{i=4}^{2k} \gamma_i + \dots + \gamma_{2k-2} \gamma_{2k}; \\ a_3 &= \gamma_1 \left( \gamma_3 \sum_{i=5}^{2k} \gamma_i + \gamma_4 \sum_{i=6}^{2k} \gamma_i + \dots + \gamma_{2k-2} \gamma_{2k} \right) + \\ &+ \gamma_2 \left( \gamma_4 \sum_{i=6}^{2k} \gamma_i + \gamma_5 \sum_{i=7}^{2k} \gamma_i + \dots + \gamma_{2k-2} \gamma_{2k} \right) + \dots + \gamma_{2k-4} \gamma_{2k-2} \gamma_{2k}; \\ a_k &= \frac{C_1 C_2 \dots C_k \cdot \sum m_j}{m_1 m_2 \dots m_{k+1}} = \frac{\prod C_i \sum m_j}{\prod m_j}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

При определении коэффициентов  $a_i$  в данном случае применяются операции суммирования и умножения. Как видно, здесь операции вычитания отсутствуют. Данный способ пригоден только для цепных не разветвлённых схем и заключается в методе расчёта с помощью табл. 1.1. Рассмотрим примеры использования.

**Пример 1.** Составить и решить частотное уравнение для четырёх-массовой консервативной расчётной схемы (рис. 1.12) механизма подъёма мостового крана грузоподъёмностью 10 т. Исходные данные:

$$m_1 = 0,0576; \quad m_2 = 0,0410; \quad m_3 = 0,0102; \quad m_4 = 0,0032;$$

$$C_{12} = 14800; \quad C_{23} = 148; \quad C_{34} = 0,784.$$



Рис. 1.12 – Расчётная схема мостового крана

Метод М.И. Гриншпуна заключается в определении квадратов частот (1.33) парциальных одномассовых схем

$$\gamma_1 = \frac{C_{12}}{m_1} = \frac{14800}{0,0576} = 25694,44 \text{ с}^{-2};$$

$$\gamma_2 = \frac{C_{12}}{m_2} = \frac{14800}{0,0410} = 360975,61 \text{ с}^{-2};$$

$$\gamma_3 = \frac{C_{23}}{m_2} = \frac{148}{0,0410} = 3609,76 \text{ с}^{-2};$$

$$\gamma_4 = \frac{C_{23}}{m_3} = \frac{148}{0,0102} = 14509,8 \text{ с}^{-2};$$

$$\gamma_5 = \frac{C_{34}}{m_3} = \frac{0,784}{0,0102} = 76,86 \text{ с}^{-2};$$

$$\gamma_6 = \frac{C_{34}}{m_4} = \frac{0,784}{0,0032} = 245 \text{ с}^{-2}$$

и последующем вычислении коэффициентов характеристического полинома (1.34) с помощью компактной табл. 1.1.

Табл. 1.1 – Последовательность вычислений по методу М.И. Гриншпуна

$i$	$\gamma_i$	$S_i^{(1)}$	$\gamma_i \cdot S_i^{(1)}$	$S_i^{(2)}$	$\gamma_i \cdot S_i^{(2)}$
1	256944,44	18441,42	4738421127	4716748	$1,21194 \cdot 10^{12}$
2	360975,61	14831,67	5353869919	3554902	$1,28323 \cdot 10^{12}$
3	3609,76	321,86	1161846	$a_3 = 2,49517 \cdot 10^{12}$	
4	14509,80	245,00	3554902		
5	76,86	$a_2 = 1,0097 \cdot 10^{10}$			
6	245,00				

$$a_1 = 636361,48$$

Во втором столбце таблицы помещены квадраты частот парциальных одномассовых схем  $\gamma$ , а первый коэффициент частотного уравнения  $a_1$  получен как их сумма. Элементы третьего столбца найдены как неполные суммы элементов второго столбца: число в четвёртой строчке третьего столбца 245,00 равно числу в шестой строчке второго столбца, число в третьей строчке третьего столбца 321,86 – сумме чисел в шестой и пятой строчках второго столбца ( $245,00 + 76,86$ ) и т.д. Элементы четвёртого столбца вычислены в результате перемножения соответствующих элемен-

тов второго и третьего столбцов. Второй коэффициент частотного уравнения  $a_2$  найден как сумма элементов четвёртого столбца. Элементы пятого столбца определены аналогично элементам третьего столбца, а элементы шестого столбца – аналогично элементам четвертого. Третий коэффициент частотного уравнения  $a_3$  есть сумма двух элементов шестого столбца.

Таким образом, получено частотное уравнение

$$\omega^6 - 636361,48\omega^4 + 1,0097 \cdot 10^{10}\omega^2 - 2,49517 \cdot 10^{12} = 0,$$

решив которое, имеем следующие корни:

$$s_1 = \omega_1^2 = 251,09; \quad s_2 = \omega_2^2 = 16025,69; \quad s_3 = \omega_3^2 = 620084,69.$$

Проверим полученные корни по соотношению Ф. Виета:

$$a_1 = \sum s = s_1 + s_2 + s_3 = 251,09 + 16025,69 + 620084,69 = 636361,47;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum s_i s_j = s_1(s_2 + s_3) + s_2 s_3 = \\ &= 251,09 \cdot (16025,69 + 620084,69) + 16025,69 \cdot 620084,69 = \\ &= 1,0097 \cdot 10^{10}; \end{aligned}$$

$$a_3 = \prod s = s_1 s_2 s_3 = 251,09 \cdot 16025,69 \cdot 620084,69 = 2,49517 \cdot 10^{12}.$$

Проверка показала удовлетворительную сходимость полученного решения. Зная корни характеристического уравнения, теперь можно получить значения частот собственных колебаний,  $\text{с}^{-1}$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{251,09} = \pm 15,85; & \omega_2 &= \sqrt{16025,69} = \pm 126,59; \\ \omega_3 &= \sqrt{620084,69} = \pm 787,45. \end{aligned}$$

Возникает вопрос, нельзя ли предложить такой универсальный способ, который бы мог применяться как для цепных, так и разветвлённых схем механизмов. Оказывается, это возможно, если применить *комбинаторный способ* получения коэффициентов частотного уравнения по методу А.В. Кармишина. Приведём примеры его использования.

**Пример 2.** Решить задачу из предыдущего примера комбинаторным способом получения коэффициентов частотного уравнения. Частотное уравнение имеет следующий вид

$$\omega^{2 \cdot 3} - a_1 \omega^{2 \cdot 2} + a_2 \omega^{2 \cdot 1} - a_3 \omega^{2 \cdot 0} = 0,$$

$$\text{где } \beta_{i,i+1}^2 = \frac{C_{i,i+1}}{m_i} + \frac{C_{i+1}}{m_{i+1}};$$

$$a_1 = \beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{34}^2 = \left( \frac{C_{12}}{m_1} + \frac{C_{12}}{m_2} \right) + \left( \frac{C_{23}}{m_2} + \frac{C_{23}}{m_3} \right) + \left( \frac{C_{34}}{m_3} + \frac{C_{34}}{m_4} \right);$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left[ C_{12}C_{23} \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3} + \beta_{12}^2\beta_{34}^2 \right] + \left[ C_{23}C_{34} \frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4} + \beta_{23}^2 0 \right] = \\
&= \left[ C_{12}C_{23} \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3} + C_{12} \frac{m_1+m_2}{m_1m_2} C_{34} \frac{m_3+m_4}{m_3m_4} \right] + C_{23}C_{34} \frac{m_2+m_3+m_4}{m_2m_3m_4}; \\
a_3 &= C_{12}C_{23}C_{34} \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{m_1m_2m_3m_4}.
\end{aligned}$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left( \frac{14800}{0,0576} + \frac{14800}{0,0410} \right) + \left( \frac{148}{0,0410} + \frac{148}{0,0102} \right) + \left( \frac{0,784}{0,0102} + \frac{0,784}{0,0032} \right) = 636361,48; \\
a_2 &= 14800 \cdot 148 \cdot \frac{0,0576+0,0410+0,0102}{0,0576 \cdot 0,0410 \cdot 0,0102} + 14800 \cdot \frac{0,0576+0,0410}{0,0576 \cdot 0,0410} \times \\
&\quad \times 0,784 \cdot \frac{0,0102+0,0032}{0,0102 \cdot 0,0032} + 148 \cdot 0,784 \cdot \frac{0,0410+0,0102+0,0032}{0,0410 \cdot 0,0102 \cdot 0,0032} = 1,0097 \cdot 10^{10}; \\
a_3 &= 14800 \cdot 148 \cdot 0,784 \cdot \frac{0,0576+0,0410+0,0102+0,0032}{0,0576 \cdot 0,0410 \cdot 0,0102 \cdot 0,0032} = 2,49517 \cdot 10^{12}.
\end{aligned}$$

Сопоставляя вычисления по методу А.В. Кармишина с вычислениями из примера 1 по методу М.И. Гриншпуна, легко видеть удобство предложенной им компактной таблицы для расчёта коэффициентов частотного уравнения.

**Пример 3.** Составить и решить частотное уравнение для четырёхмассовой консервативной *разветвлённой* схемы (рис. 1.13) механизма передвижения мостового электрического крана в момент наезда на концевые пружинные упоры (режим стопорения рабочего органа). Исходные данные:

$$\begin{array}{llll}
m_1 = 1,154; & m_2 = 3,205; & m_3 = 3,115; & m_4 = 5,23; \\
C_{12} = 988; & C_{23} = 600; & C_{34} = 7; & C_{20} = 187.
\end{array}$$

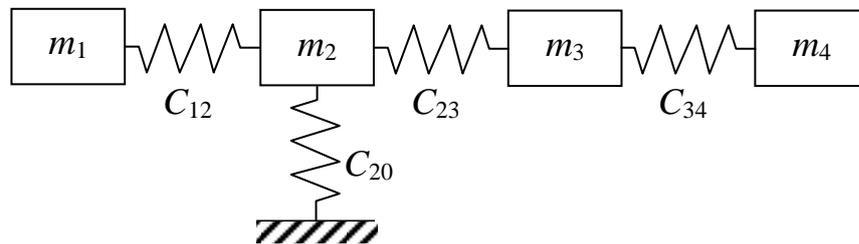


Рис. 1.13 – Расчётная схема механизма передвижения мостового электрического крана в момент наезда на концевые пружинные упоры

Запишем частотное уравнение для этой схемы:

$$\omega^{2 \cdot 4} - a_1 \omega^{2 \cdot 3} + a_2 \omega^{2 \cdot 2} - a_3 \omega^{2 \cdot 1} + a_4 \omega^{2 \cdot 0} = 0,$$

где решение по комбинаторному способу

$$\begin{aligned}
a_1 &= \beta_{12}^2 + \beta_{20}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{34}^2 = \left( \frac{C_{12}}{m_1} + \frac{C_{12}}{m_2} \right) + \frac{C_{20}}{m_2} + \left( \frac{C_{23}}{m_2} + \frac{C_{23}}{m_3} \right) + \left( \frac{C_{34}}{m_3} + \frac{C_{34}}{m_4} \right); \\
a_2 &= \left[ C_{12}C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1m_2m_3} + \beta_{12}^2\beta_{34}^2 + \frac{C_{12}C_{20}}{m_1m_2} \right] + \left[ C_{23}C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2m_3m_4} + \beta_{23}^2 \cdot 0 + \frac{C_{23}C_{20}}{m_2m_3} \right] + \beta_{20}^2\beta_{34}^2 = \\
&= \left[ C_{12}C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1m_2m_3} + C_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2} C_{34} \frac{m_3 + m_4}{m_3m_4} + \frac{C_{12}C_{20}}{m_1m_2} \right] + \\
&+ \left[ C_{23}C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2m_3m_4} + \frac{C_{23}C_{20}}{m_2m_3} \right] + \frac{C_{20}}{m_2} \cdot C_{34} \frac{m_3 + m_4}{m_3m_4}; \\
a_3 &= \left[ C_{12}C_{23}C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1m_2m_3m_4} + \frac{C_{12}C_{20}}{m_1m_2} \beta_{34}^2 \right] + \beta_{20}^2 \left( \frac{C_{12}C_{23}}{m_1m_3} + \frac{C_{23}C_{34}}{m_3m_4} \right) = \\
&= \left[ C_{12}C_{23}C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1m_2m_3m_4} + \frac{C_{12}C_{20}}{m_1m_2} C_{34} \frac{m_3 + m_4}{m_3m_4} \right] + \\
&+ \frac{C_{20}}{m_2} \left( \frac{C_{12}C_{23}}{m_1m_3} + \frac{C_{23}C_{34}}{m_3m_4} \right); \\
a_4 &= \frac{C_{12}C_{23}C_{34}C_{20}}{m_1m_2m_3m_4}.
\end{aligned}$$

Вычислим значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left( \frac{988}{1,154} + \frac{988}{3,205} \right) + \frac{187}{3,205} + \left( \frac{600}{3,205} + \frac{600}{3,115} \right) + \left( \frac{7}{3,115} + \frac{7}{5,23} \right) = 1606,18; \\
a_2 &= \left[ \frac{988 \cdot 600 \cdot \frac{1,154 + 3,205 + 3,115}{1,154 \cdot 3,205 \cdot 3,115} + 988 \cdot \frac{1,154 + 3,205}{1,154 \cdot 3,205} \cdot 7 \cdot \frac{3,115 + 5,23}{3,115 \cdot 5,23}}{+ \frac{988 \cdot 187}{1,154 \cdot 3,205}} \right] + \\
&+ \left[ \frac{600 \cdot 7 \cdot \frac{3,205 + 3,115 + 5,23}{3,205 \cdot 3,115 \cdot 5,23} + \frac{600 \cdot 187}{3,205 \cdot 3,115}}{+ \frac{187}{3,205} \cdot 7 \cdot \frac{3,115 + 5,23}{3,115 \cdot 5,23}} \right] = \\
&= 451069,94; \\
a_3 &= \left[ \frac{988 \cdot 600 \cdot 7 \cdot \frac{1,154 + 3,205 + 3,115 + 5,23}{1,154 \cdot 3,205 \cdot 3,115 \cdot 5,23} + \frac{988 \cdot 187}{1,154 \cdot 3,205} \cdot 7 \cdot \frac{3,115 + 5,23}{3,115 \cdot 5,23}}{+ \frac{187}{3,205} \cdot \left( \frac{988 \cdot 600}{1,154 \cdot 3,115} + \frac{600 \cdot 7}{3,115 \cdot 5,23} \right)} \right] = 10690880,26; \\
a_4 &= \frac{988 \cdot 600 \cdot 7 \cdot 187}{1,154 \cdot 3,205 \cdot 3,115 \cdot 5,23} = 12878173,12.
\end{aligned}$$

Таким образом, частотное уравнение имеет следующий вид

$$\omega^8 - 1606,18\omega^6 + 451069,94\omega^4 - 10690880,26\omega^2 + 12878173,12 = 0,$$

которое имеет следующие корни

$$\omega_1 = \pm 1,13; \quad \omega_2 = \pm 4,97; \quad \omega_3 = \pm 18,09; \quad \omega_4 = \pm 35,4.$$

Проверим корни по соотношению Ф. Виета:

$$a_1 = \sum \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = 1,13^2 + 4,97^2 + 18,09^2 + 35,4^2 = 1606,17;$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum \omega_i^2 \omega_j^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_1^2 \omega_4^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_4^2 + \omega_3^2 \omega_4^2 = \\ &= 1,13^2 \cdot (4,97^2 + 18,09^2 + 35,4^2) + 4,97^2 \cdot (18,09^2 + 35,4^2) + 18,09^2 \cdot 35,4^2 = \\ &= 451069,94; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \sum \omega_i^2 \omega_j^2 \omega_k^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_4^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 \omega_4^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2 = \\ &= 1,13^2 \cdot 4,97^2 \cdot (18,09^2 + 35,4^2) + (1,13^2 + 4,97^2) \cdot 18,09^2 \cdot 35,4^2 = 10690880,26; \end{aligned}$$

$$a_4 = \prod \omega^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2 = 1,13^2 \cdot 4,97^2 \cdot 18,09^2 \cdot 35,4^2 = 12878173,12.$$

**Пример 4.** Покажем также другие способы вычисления коэффициентов частотного уравнения по методу А.В. Кармишина. Рассмотрим теперь пятимассовую *цепную* эквивалентную схему, представленную на рис. 1.14.

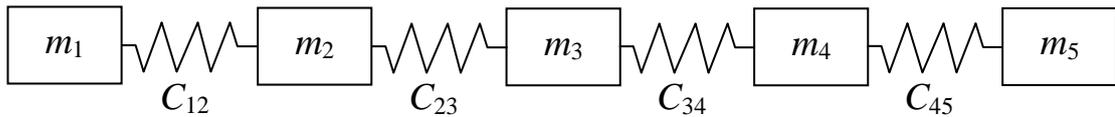


Рис. 1.14 – Расчётная схема транспортного средства

Запишем частотное уравнение для этой схемы:

$$\omega^{2 \cdot 4} - a_1 \omega^{2 \cdot 3} + a_2 \omega^{2 \cdot 2} - a_3 \omega^2 + a_4 = 0,$$

где  $a_1 = \beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{45}^2$ ;

$$\begin{aligned} a_2 &= \left[ C_{12} C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} + \beta_{12}^2 (\beta_{34}^2 + \beta_{45}^2) \right] + \left[ C_{23} C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} + \beta_{23}^2 \beta_{45}^2 \right] + \\ &+ C_{34} C_{45} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \left[ \beta_{12}^2 C_{34} C_{45} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5} + C_{12} C_{23} C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + \right. \\ &\left. + C_{12} C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} \beta_{45}^2 \right] + \\ &+ C_{23} C_{34} C_{45} \frac{m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_2 m_3 m_4 m_5}; \end{aligned}$$

$$a_4 = C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5}.$$

**Пример 5.** Пятимассовая *разветвлённая* эквивалентная схема представлена на рис. 1.15.

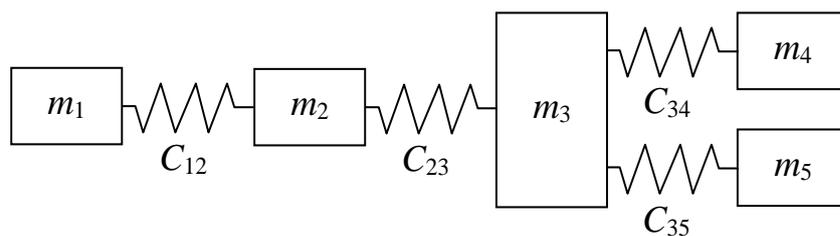


Рис. 1.15 – Пятимассовая *разветвлённая* эквивалентная схема

Имеем частотное уравнение четвёртой степени:

$$\omega^{2.4} - a_1 \omega^{2.3} + a_2 \omega^{2.2} - a_3 \omega^2 + a_4 = 0,$$

где  $a_1 = \beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{35}^2$ ;

$$a_2 = \left[ C_{12} C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} + \beta_{12}^2 (\beta_{34}^2 + \beta_{35}^2) \right] + C_{23} C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} +$$

$$+ C_{23} C_{35} \frac{m_2 + m_3 + m_5}{m_2 m_3 m_5} + C_{34} C_{35} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5};$$

$$a_3 = \left[ \beta_{12}^2 C_{34} C_{35} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5} + C_{12} C_{23} C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + \right. +$$

$$\left. + C_{12} C_{23} C_{35} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_5}{m_1 m_2 m_3 m_5} \right] +$$

$$+ C_{23} C_{34} C_{35} \frac{m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_2 m_3 m_4 m_5};$$

$$a_4 = C_{12} C_{23} C_{34} C_{35} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5}.$$

**Пример 6.** По аналогии с примерами 2 (рис. 1.12) и 4 (рис. 1.14) рассмотрим теперь шестимассовую цепную расчётную схему (рис. 1.16).

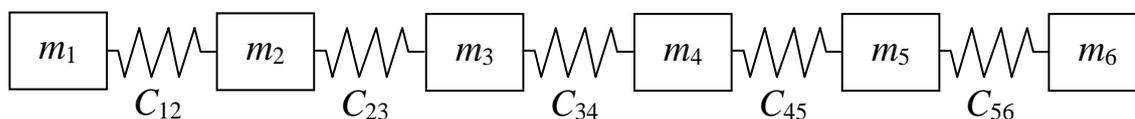


Рис. 1.16 – Шестимассовая система цепная расчётная схема

Запишем частотное уравнение для этой схемы:

$$\omega^{2.5} - a_1 \omega^{2.4} + a_2 \omega^{2.3} - a_3 \omega^{2.2} + a_4 \omega^{2.1} - a_5 = 0,$$

где  $a_1 = \beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{45}^2 + \beta_{56}^2$ ;

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left[ C_{12}C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} + \beta_{12}^2 (\beta_{34}^2 + \beta_{45}^2 + \beta_{56}^2) \right] + \\
&+ \left[ C_{23}C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} + \beta_{23}^2 (\beta_{45}^2 + \beta_{56}^2) \right] + \left[ C_{34}C_{45} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5} + \beta_{34}^2 \beta_{56}^2 \right] + \\
&+ C_{45}C_{56} \frac{m_4 + m_5 + m_6}{m_4 m_5 m_6}; \\
a_3 &= \left[ \beta_{12}^2 \left( C_{34}C_{45} \frac{m_3 + m_4 + m_5}{m_3 m_4 m_5} + C_{45}C_{56} \frac{m_4 + m_5 + m_6}{m_4 m_5 m_6} \right) + \right. \\
&+ C_{12}C_{23}C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} + C_{12}C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} (\beta_{45}^2 + \beta_{56}^2) + \left. + \right. \\
&+ \left. \beta_{12}^2 \beta_{34}^2 \beta_{56}^2 \right] + \\
&+ \left[ \beta_{23}^2 C_{45}C_{56} \frac{m_4 + m_5 + m_6}{m_4 m_5 m_6} + C_{23}C_{34}C_{45} \frac{m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_2 m_3 m_4 m_5} + \right. \\
&+ \left. C_{23}C_{34} \frac{m_2 + m_3 + m_4}{m_2 m_3 m_4} \beta_{56}^2 \right] + \\
&+ C_{34}C_{45}C_{56} \frac{m_3 + m_4 + m_5 + m_6}{m_3 m_4 m_5 m_6}; \\
a_4 &= \left[ \beta_{12}^2 C_{34}C_{45}C_{56} \frac{m_3 + m_4 + m_5 + m_6}{m_3 m_4 m_5 m_6} + C_{12}C_{23}C_{34}C_{45} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5} + \right. \\
&+ C_{12}C_{23}C_{34} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_1 m_2 m_3 m_4} \beta_{56}^2 + C_{12}C_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} C_{45}C_{56} \frac{m_4 + m_5 + m_6}{m_4 m_5 m_6} \left. + \right. \\
&+ \left. C_{23}C_{34}C_{45}C_{56} \frac{m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6}{m_2 m_3 m_4 m_5 m_6}; \right. \\
a_5 &= C_{12}C_{23}C_{34}C_{45}C_{56} \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6}{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6}.
\end{aligned}$$

Было показано, что представленные здесь методы М.И. Гриншпуна и А.В. Кармишина точного определения частот собственных колебаний эквивалентной расчётной схемы машины или механизма эквивалентны для цепных расчётных схем. Аналогичным образом можно находить точные значения частот собственных колебаний любых цепных или разветвлённых расчётных схем.

Далее мы ещё остановимся на эффективных методах определения частот собственных колебаний с использованием матричных определений. Теперь в отличие от вышерассмотренных методов рассмотрим приближённый метод определения *частот и форм* собственных колебаний, основанный применении принципа Релея.

## 2 Применение принципа Релея для решения прямой и обратной систем дифференциальных уравнений системы

При решении практических задач динамики машин зачастую необходимо знать величины собственных частот и форм колебаний. Как правило, вычисляют лишь главную и две-три следующие частоты, так как они определяют основной характер результирующего действия системы. Для решения поставленной задачи расчётную схему представляют в виде трёх-, четырёхмассной системы и непосредственным решением частотного уравнения находят эти частоты. Увеличение требуемой точности вычислений, знание величин большего числа собственных частот не позволяет проводить подобные упрощения расчётных схем, так как это приводит к значительным погрешностям. При большом числе масс раскрытие определителя и решение частотного уравнения более высоких степеней свободы возможно только при помощи ЭВМ.

По результатам выполненных расчётов строится *диаграмма собственных форм колебаний системы* (см. рис. 1.21, 1.27, 1.30, 1.35) и даётся заключение о степени работоспособности механической системы.

### 2.1 Составление дифференциальных уравнений

Рассмотрим применение принципа Релея к составлению уравнений угловых колебаний приведенного вала с пятью маховиками. Обозначим моменты инерции дисков относительно оси вала через  $J_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) и погонную жёсткость на кручение участков вала (1.3) между двумя последовательными дисками через  $C_i$  ( $i = 1 \dots n-1$ ). Расчётная схема эквивалентного вала приведена на рис. 1.17.

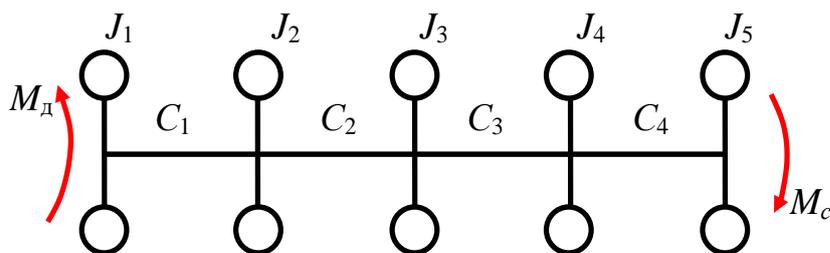


Рис. 1.17 – Эквивалентный вал с пятью дисками

Пренебрегая массой вала, получим систему с пятью степенями свободы. Деформированная конфигурация такой системы может быть определена *угловыми отклонениями  $\theta_i$  дисков от положения равновесия вала*, в котором участки вала между дисками не деформированы. Эти угловые отклонения обычно принимаются за обобщённые координаты системы. Из выражений кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2 + J_4 \dot{\theta}_4^2 + J_5 \dot{\theta}_5^2) \quad (1.35)$$

$$П = \frac{1}{2} \cdot [C_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2)^2 + C_2 \cdot (\theta_2 - \theta_3)^2 + C_3 \cdot (\theta_3 - \theta_4)^2 + C_4 \cdot (\theta_4 - \theta_5)^2] \quad (1.36)$$

получаем систему уравнений крутильных колебаний вала в угловых отклонениях дисков:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= -C_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= C_1 \cdot (\theta_1 - \theta_2) - C_2 \cdot (\theta_2 - \theta_3) \\ J_3 \ddot{\theta}_3 &= C_2 \cdot (\theta_2 - \theta_3) - C_3 \cdot (\theta_3 - \theta_4) \\ J_4 \ddot{\theta}_4 &= C_3 \cdot (\theta_3 - \theta_4) - C_4 \cdot (\theta_4 - \theta_5) \\ J_5 \ddot{\theta}_5 &= C_4 \cdot (\theta_4 - \theta_5) \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Принятая в этих уравнениях система координат не является ни единственной, ни самой удобной в данном случае. В угловых отклонениях дисков потенциальная энергия не является определенно-положительной формой, поэтому колебания системы, описываемые изменениями координат  $\theta_i$  происходят не около положения устойчивого равновесия системы, а около общего вращательного движения последней. Представляется целесообразным поэтому перейти к системе, в которой роль обобщенных координат выполняют *углы деформации участков вала между дисками*, определяемые относительными угловыми отклонениями дисков

$$\alpha_i = \theta_i - \theta_{i+1}, \quad i = 1 \dots (n-1). \quad (1.38)$$

В относительных угловых отклонениях дисков исключено общее вращение вала, одинаковое для всех дисков, а вместе с тем уменьшено на единицу число степеней свободы системы. Соответственно уменьшается и число уравнений колебаний вала. Следовательно, в результате решения такой системы получается на один корень системы меньше, причём *нулевой корень частоты* соответствует общему вращению вала.

Чтобы получить эти уравнения, умножим первое уравнение (1.37) на  $J_2$ , второе – на  $J_1$  и вычтем последнее из первого. Далее, третье уравнение, умноженное на  $J_2$ , вычтем из второго, умноженного на  $J_3$ , и так далее. Система уравнений угловых колебаний в относительных отклонениях дисков (углах кручения участков вала) примет вид

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{\alpha}_1 &= -\frac{C_1 \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \cdot \alpha_1 && + \frac{C_2}{J_2} \cdot \alpha_2 \\
\ddot{\alpha}_2 &= \frac{C_1}{J_2} \cdot \alpha_1 - \frac{C_2 \cdot (J_2 + J_3)}{J_2 J_3} \cdot \alpha_2 && + \frac{C_3}{J_3} \cdot \alpha_3 \\
\ddot{\alpha}_3 &= && \frac{C_2}{J_3} \cdot \alpha_2 - \frac{C_3 \cdot (J_3 + J_4)}{J_3 J_4} \cdot \alpha_3 && + \frac{C_4}{J_4} \cdot \alpha_4 \\
\ddot{\alpha}_4 &= && && \frac{C_3}{J_4} \cdot \alpha_3 - \frac{C_4 \cdot (J_4 + J_5)}{J_4 J_5} \cdot \alpha_4
\end{aligned} \right\} (1.39)$$

В координатах  $\alpha_i$  может быть составлена не только прямая, но и обратная система уравнений, чего нельзя сделать, пользуясь координатами  $\theta_i$ . Рассмотрим принцип преобразования кинетической и потенциальной энергий для новых обобщённых координат  $\alpha_i$ .

Применив закон сохранения момента количества движения, почленно сложим уравнения (1.37), откуда получим равенства

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 + J_3 \ddot{\theta}_3 + J_4 \ddot{\theta}_4 + J_5 \ddot{\theta}_5 = 0,$$

следовательно

$$J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4 + J_5 \dot{\theta}_5 = \text{const}. \quad (1.40)$$

Сумма, стоящая в левой части (1.40), представляет собой момент количества движения приведенного вала относительно его оси. Этот момент сохраняет постоянное значение, так как внешние силы, моменты которых могли бы вызвать изменение момента количества движения, здесь отсутствуют. Если предположить, что в начальный момент времени диски повернуты на углы  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) и затем без начальных скоростей предоставлены самим себе, то постоянная в правой части уравнения (1.40) будет равна нулю, следовательно

$$K = J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4 + J_5 \dot{\theta}_5 = 0. \quad (1.41)$$

С помощью уравнения (1.41) и осуществляется преобразование выражения кинетической энергии (1.35) к координатам  $\alpha_i$ . Удвоенную кинетическую энергию (1.35) разделим на сумму моментов инерции  $A$  и затем из числителя полученной дроби вычтем равное нулю выражение  $K^2$  (1.41)

$$\frac{2T - K^2}{A} = \frac{\left( J_1 \dot{\theta}_1^2 + J_2 \dot{\theta}_2^2 + J_3 \dot{\theta}_3^2 + J_4 \dot{\theta}_4^2 + J_5 \dot{\theta}_5^2 \right) - \left( J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2 + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4 + J_5 \dot{\theta}_5 \right)^2}{J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5}.$$

После несложных преобразований получим

$$T = \frac{1}{2A} \cdot \left[ \begin{aligned} & J_1 \cdot (J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_1^2 + (J_1 + J_2) \cdot (J_3 + J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_2^2 + \\ & + (J_1 + J_2 + J_3) \cdot (J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_3^2 + (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot J_5 \cdot \dot{\alpha}_4^2 + \\ & + 2J_1 \cdot (J_3 + J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2^2 + 2J_1 \cdot (J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_3^2 + 2J_1 J_5 \cdot \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_4^2 + \\ & + 2 \cdot (J_1 + J_2) \cdot (J_4 + J_5) \cdot \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_3^2 + 2 \cdot (J_1 + J_2) \cdot J_5 \cdot \dot{\alpha}_2 \dot{\alpha}_4^2 + \\ & + 2 \cdot (J_1 + J_2 + J_3) \cdot J_5 \cdot \dot{\alpha}_3 \dot{\alpha}_4^2 \end{aligned} \right] \quad (1.42)$$

Потенциальная энергия получается из (1.36) сразу

$$П = \frac{1}{2} \cdot (C_1 \alpha_1^2 + C_2 \alpha_2^2 + C_3 \alpha_3^2 + C_4 \alpha_4^2). \quad (1.43)$$

Подставив полученные выражения кинетической (1.42) и потенциальной (1.43) энергий в уравнения Лагранжа, получим симметричную систему уравнений крутильных колебаний в обратной форме

$$\left. \begin{aligned} C_1 \alpha_1 &= -\frac{1}{A} \cdot \left[ \begin{aligned} & J_1 \cdot (J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_1 + J_1 \cdot (J_3 + J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_2 + \\ & + J_1 \cdot (J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_3 + J_1 J_5 \cdot \ddot{\alpha}_4 \end{aligned} \right]; \\ C_2 \alpha_2 &= -\frac{1}{A} \cdot \left[ \begin{aligned} & J_1 \cdot (J_3 + J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2) \cdot (J_3 + J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_2 + \\ & + (J_1 + J_2) \cdot (J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_3 + (J_1 + J_2) \cdot J_5 \cdot \ddot{\alpha}_4 \end{aligned} \right]; \\ C_3 \alpha_3 &= -\frac{1}{A} \cdot \left[ \begin{aligned} & J_1 \cdot (J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2) \cdot (J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_2 + \\ & + (J_1 + J_2 + J_3) \cdot (J_4 + J_5) \cdot \ddot{\alpha}_3 + (J_1 + J_2 + J_3) \cdot J_5 \cdot \ddot{\alpha}_4 \end{aligned} \right]; \\ C_4 \alpha_4 &= -\frac{1}{A} \cdot \left[ \begin{aligned} & J_1 J_5 \cdot \ddot{\alpha}_1 + (J_1 + J_2) \cdot J_5 \cdot \ddot{\alpha}_2 + (J_1 + J_2 + J_3) \cdot J_5 \cdot \ddot{\alpha}_3 + \\ & + (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot J_5 \cdot \ddot{\alpha}_4 \end{aligned} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

где  $A$  – сумма моментов инерции,  $A = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$ .

Для приведения уравнений (1.39) к симметричной форме применим

$$\varphi_i = \alpha_i \cdot \sqrt{C_i} = (\theta_i - \theta_{i+1}) \cdot \sqrt{C_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

где  $\alpha_i$  – относительные угловые отклонения дисков, по формуле (1.38);

$\theta_i$  – угловые отклонения дисков от положения равновесия вала;

$C_i$  – жёсткость на кручение участков вала.

Уравнения прямой (1.39) системы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{C_1 \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \varphi_1 + \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{J_2} \varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{J_2} \varphi_1 - \frac{C_2 \cdot (J_2 + J_3)}{J_2 J_3} \varphi_2 + \frac{\sqrt{C_2 C_3}}{J_3} \varphi_3 \\ \ddot{\varphi}_3 &= \frac{\sqrt{C_2 C_3}}{J_3} \varphi_2 - \frac{C_3 \cdot (J_3 + J_4)}{J_3 J_4} \varphi_3 + \frac{\sqrt{C_3 C_4}}{J_4} \varphi_4 \\ \ddot{\varphi}_4 &= \frac{\sqrt{C_3 C_4}}{J_4} \varphi_3 - \frac{C_4 \cdot (J_4 + J_5)}{J_4 J_5} \varphi_4 \end{aligned} \right\}, \quad (1.45)$$

и также уравнения обратной (1.44) системы имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{J_1 \cdot J_2 + J_3 + J_4 + J_5}{A \cdot C_1} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{J_1 \cdot J_3 + J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2}} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad - \frac{J_1 \cdot J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_3}} \cdot \ddot{\varphi}_3 - \frac{J_1 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_4}} \cdot \ddot{\varphi}_4; \\ \varphi_2 &= -\frac{J_1 \cdot J_3 + J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_2 \cdot C_1}} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{J_1 + J_2 \cdot J_3 + J_4 + J_5}{A \cdot C_2} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad - \frac{J_1 + J_2 \cdot J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_2 \cdot C_3}} \cdot \ddot{\varphi}_3 - \frac{J_1 + J_2 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_2 \cdot C_4}} \cdot \ddot{\varphi}_4; \\ \varphi_3 &= -\frac{J_1 \cdot J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_3 \cdot C_1}} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{J_1 + J_2 \cdot J_4 + J_5}{A \cdot \sqrt{C_3 \cdot C_2}} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad - \frac{J_1 + J_2 + J_3 \cdot J_4 + J_5}{A \cdot C_3} \cdot \ddot{\varphi}_3 - \frac{J_1 + J_2 + J_3 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_3 \cdot C_4}} \cdot \ddot{\varphi}_4; \\ \varphi_4 &= -\frac{J_1 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_4 \cdot C_1}} \cdot \ddot{\varphi}_1 - \frac{J_1 + J_2 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_4 \cdot C_2}} \cdot \ddot{\varphi}_2 - \\ &\quad - \frac{J_1 + J_2 + J_3 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_4 \cdot C_3}} \cdot \ddot{\varphi}_3 - \frac{J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \cdot J_5}{A \cdot C_4} \cdot \ddot{\varphi}_4. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Для системы с  $n$  степенями свободы коэффициенты в данных уравнениях обозначим через  $B_{ij}$ , тогда значения коэффициентов системы (1.46), начиная с элементов главной диагонали матрицы, будут определены следующей зависимостью

$$B_{ij} = \frac{\sum_{\ell=1}^i J_\ell \cdot \sum_{\ell=j+1}^n J_\ell}{\sum_{\ell=1}^n J_\ell \cdot \sqrt{C_i \cdot C_j}} = B_{1j} \frac{B_{in}}{B_{1n}}, \quad (i = 2 \dots n-1; j = i \dots n-1) \quad (1.47)$$

где  $B_{ij}$  – гармонический коэффициент влияния частоты  $\omega$ ;  
 $J_l$  – моменты инерции;  
 $C_i, C_j$  – жёсткости связи.

Гармоническим коэффициентом влияния  $B_{ij}$  частоты  $\omega$  называется амплитудный угол кручения участка  $i$  от единичного гармонического крутящего момента той же частоты  $\omega$ , приложенного на участке  $j$ . В симметризованных уравнениях  $B_{ij}$  – это угол кручения участка  $i$ , умноженный на  $\sqrt{C_i}$ .

## 2.2 Определение значений основной частоты и формы колебаний

Для приближённого определения собственных частот систем с конечным числом степеней свободы используем *метод последовательных приближений формами колебаний*. Указанный метод является одним из наиболее распространённых приближённых методов определения основной (наименьшей) частоты систем с конечным числом степеней свободы. С помощью некоторых предварительных преобразований исходной системы уравнений метод позволяет найти и любую высшую частоту, причём с наперёд заданной точностью и без предварительного определения низших частот. Квадрат основной частоты  $\omega_i$  системы имеет нижнюю и верхнюю оценки

$$\min \left\{ \frac{\lambda_i^{(m-1)}}{\lambda_i^{(m)}} \right\} \leq \omega_1^2 \leq \max \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m-1)}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.48)$$

где  $\lambda_i^{(m)}$  – последовательные приближения к амплитуде исходной формы  $i$ -го колебания в приближении  $m$

$$\lambda_i^{(m)} = \sum_{k=1}^n (B_{ik} \cdot \lambda_k^{(m-1)}); \quad (1.49)$$

$\lambda_i^{(m-1)}$  – амплитуды исходной формы колебаний <sup>1</sup>

$$\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \dots = \lambda_{n-1}^{(0)} = 1.$$

Из условия ортогональности формы в  $m$  приближении к исходной форме, так и ко всем последующим, то есть

$$\sum_{k=1}^n u_{1k} \cdot \lambda_k^{(m-1)} = 0$$

<sup>1</sup> Расчёт можно сократить, если при выборе исходной формы учесть возможные соотношения углов кручения отдельных участков вала, обычно легко определяемые по расположению и относительной величине масс и жесткостей.

находим значения собственных форм колебаний основной частоты  $\omega_1$

$$u_{1i}^{(m)} = \frac{\lambda_i^{(m)}}{\lambda_1^{(m)}}, \quad (1.50)$$

где  $\lambda_i^{(m)}$  –  $i$ -я амплитуда колебания в  $m$  приближении;

$\lambda_1^{(m)}$  – первая амплитуда основной формы колебания.

*Собственная форма колебаний* – это отношение амплитуд колебаний механической системы в любой момент времени, задают числовыми значениями амплитуд или графически – ординатами определённой длины.

Верхняя и нижняя оценки сходятся при увеличении  $m$  приближения. Для практических надобностей точность второго приближения  $m$  более чем достаточна; при вычислении на ЭВМ в программе выполняется проверка сходимости оператором

$$|M_2 - M_1| < \varepsilon \cdot \frac{M_2 + M_1}{2}, \quad (1.51)$$

где  $M_1$  – минимальное значение основной частоты;

$M_2$  – максимальное значение основной частоты, определяемые выражением (1.48);

$\varepsilon$  – заданная точность итераций.

После нахождения первой частоты и её форм колебаний вычисляются высшие гармонические частоты. Для этого из исходной системы исключается найденная форма колебаний, матрица коэффициентов преобразуется для высшей гармоники и алгоритм повторяется.

### 2.3 Определение значений высших частот и форм колебаний

Для вычисления высших частот колебания механической системы используются *методы исключения первой формы и последовательных приближений формами колебаний*.

При вычислении высших (в частности, второй) частот исходная система уравнений приводится к новой с меньшим на единицу числом степеней свободы ( $n = n - 1$ ), причём основная частота полученной системы будет совпадать с искомой высшей частотой всей механической системы.

Для выполнения этого обозначим нормированные амплитуды первой собственной формы через  $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ . Искомая вторая форма ортогональна к первой, следовательно, амплитуды второй формы  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  удовлетворяют условию ортогональности

$$u_{11} \cdot \mu_1 + u_{12} \cdot \mu_2 + u_{13} \cdot \mu_3 + u_{14} \cdot \mu_4 = 0.$$

С помощью этого условия мы можем исключить из уравнений

$$\mu_i = \omega^2 \cdot \sum_{k=1}^n B_{ik} \cdot \mu_k \quad (i = 1 \dots n)$$

одну из амплитуд, например,  $\mu_1$ . После исключения первой амплитуды, уравнения примут вид

$$\mu_i = \omega^2 \cdot \sum_{k=i}^n \left( B_{ik} - B_{i1} \cdot \frac{u_{1k}}{u_{11}} \right) \cdot \mu_k \quad (i = 2 \dots n).$$

Таким образом, мы можем получить гармонические коэффициенты влияния для любой высшей частоты из полученной ранее системы

$$B_{ik}^* = B_{ik} - B_{i1} \cdot \frac{u_{1k}}{u_{11}} \quad (i = 2 \dots n; k = 2 \dots n), \quad (1.52)$$

где  $B_{ik}$ ,  $B_{i1}$  – гармонические коэффициенты влияния амплитуды  $i$ -ой низшей частоты соответственно для  $k$ -ой и низшей амплитуды, по (1.47);

$u_{1k}$ ,  $u_{11}$  – собственные формы колебания низшей частоты соответственно для  $k$ -ой и низшей амплитуды, по (1.50).

Для новой системы уравнений (1.52) по методике, описанной ранее, находятся значение  $i$ -ой высшей частоты (1.48) и приближения форм (1.50) собственных колебаний.

Так как собственная форма  $u_{1k}$ , соответствующая низшей частоте и найденная предварительным также приближённым расчётом, определена с некоторой погрешностью, то полученное  $m$  приближение искомой высшей формы  $\mu_i^{(m)}$  не будет точно ортогонально низшей форме. Подвергаем поэтому форму  $\mu_i^{(m)}$  исправлению, используя первый член разложения по собственным частотам, то есть составляя выражения

$$\bar{\mu}_1^{(m)} = - \sum_{i=2}^n \mu_i^{(m)} \cdot u_{1i}, \quad (1.53)$$

где  $\bar{\mu}_1^{(m)}$  – исправленная исходная форма высшего колебания высшей частоты в приближении  $m$ ;

$\mu_i^{(m)}$  – полученная в результате расчёта форма колебания  $i$ -ой амплитуды высшей второй частоты в приближении  $m$ ;

$u_{1i}$  – форма колебания низшей частоты для  $i$ -ой амплитуды.

Значения собственных форм колебаний всей системы для высшей частоты  $\omega_i$  определяются аналогичным образом, делением всех  $\mu_i^{(m)}$  на исправленную форму  $\bar{\mu}_1^{(m)}$

$$u_{2i}^{(m)} = \frac{\mu_i^{(m)}}{\bar{\mu}_1^{(m)}}. \quad (1.54)$$

Расчёт остальных высших частот осуществляется по циклу исключения низших частот с преобразованием гармонических коэффициентов влияния (1.52), расчётом основной частоты для высшей формы колебания (1.48), (1.49), (1.50) и преобразованием форм колебаний (1.53), (1.54).

## **2.4 Преобразование форм колебаний при стопорении рабочего органа механической системы**

В связи с тем, что алгоритм нахождения частот и форм колебаний по данной методике не предусматривает исследование механической системы на стопорение, то был предложен следующий алгоритм решения.

Жёсткая заделка принимается в качестве некоторой дополнительной инерционной массы  $J_5$ , имеющей бесконечную величину (см. рис. 1.6,а). После вычисления форм и колебаний механической системы эта инерционная масса, соответствующая жёсткой заделке, будет иметь некоторую амплитуду колебаний. В реальном же механизме в месте жёсткой заделки амплитуда колебаний отсутствует, значит необходимо скорректировать формы колебаний механической системы таким образом, чтобы в этом сечении амплитуда была равна нулю. Так как линейная жёсткость любого участка эквивалентного вала одинакова, то угловые перемещения (амплитуды колебаний) сечений эквивалентного вала согласно закону Гука, будут подчиняться линейной законности. Используя метод Релея, можно предположить, что при динамическом деформировании эквивалентного вала при стопорении системы зависимость угла поворота любого сечения от угла поворота воображаемого маховика бесконечной величины останется такой же, как и при статическом деформировании.

Это обстоятельство позволяет предложить формулу корректировки амплитудных значений форм колебаний каждой массы механической системы, которая предусматривает линейное уменьшение амплитуд в сторону от заделки к вращающему моменту

$$\bar{u}_i^{(m)} = u_i^{(m)} - u_n^{(m)} \cdot \frac{z}{l}; \quad i = 1 \dots n, \quad (1.55)$$

где  $\bar{u}_i^{(m)}$  – скорректированное амплитудное значение формы колебания для случая расчёта на стопорение механической системы;

$u_i^{(m)}$  – амплитудное значение формы колебания  $i$ -ой массы в приближении  $m$  для случая расчёта запуска механической системы (1.50), (1.54);

$u_n^{(m)}$  – вычисленное по формулам (1.50), (1.54) амплитудное значение формы колебания воображаемой маховой массы  $n$  бесконечной величины в приближении  $m$  для случая расчёта на запуск механической системы;

$z$  – текущая координата длины вала из точки приложения вращающего момента;

$l$  – общая длина эквивалентного вала.

## **2.5 Определение амплитуд собственных колебаний системы в переходных динамических режимах**

Амплитуды собственных колебаний всех масс ( $j = 1 \dots n$ ) и форм колебаний ( $i = 2 \dots n$ ) можно определить как

$$A_{ji} = \lambda_1^{(m)} \cdot u_{ji}, \quad (1.56)$$

где  $\lambda_1^{(m)}$  – первая амплитуда основной формы колебания (1.49);  
 $u_{ji}$  – собственные формы колебаний (1.50), (1.54);  
 $\bar{\mu}_1$  – исправленная форма основной формы колебания (1.53).

## 2.6 Описание алгоритма программы

Блок-схема алгоритма определения частот, форм и амплитуд собственных колебаний связанных масс представлена на рис. 1.18...1.20.

Сначала опишем глобальные переменные расчёта:  $k$  – номер рассчитываемой частоты;  $t$  – заданная максимальная продолжительность расчёта;  $n$  – количество степеней свободы механической системы;  $m$  – рассчитанное количество маховых масс;  $J_i$  – заданные моменты инерции маховых масс;  $C_i$  – заданные жёсткости связей;  $X$  – рассчитанная общая длина эквивалентного вала;  $B_{ij}$  – рассчитанные гармонические коэффициенты влияния системы уравнений;  $\lambda_i^{(0)}$  – исходная форма колебаний;  $\lambda_i^{(1)}$  – приближение к форме колебаний;  $MZ_i$  –  $i$ -ое значение частоты системы;  $M_1$  – минимальное значение частоты всей механической системы;  $M_2$  – максимальное среднеарифметическое значение частоты всей системы;  $U_{i,k}$  – значения форм колебаний  $k$ -ой частоты;  $\lambda_i^{(1)}$  – первый член разложения по собственным частотам, по формуле (1.53);  $Z$  – текущее сечение эквивалентного вала при расчёте стопорения системы;  $t_1$  – прошедшее время с момента начала расчёта; **Time** – компьютерное время.

Рассмотрим составляющие алгоритм блоки:

- 2** – инициализация основной частоты системы;
- 3** – ввод числа степеней свободы рассчитываемой механической системы;
- 4** – **6** – преобразование системы в относительные отклонения дисков;
- 8** – **9** – задание маховой массы бесконечной величины для жёсткой заделки при расчёте стопорения механической системы;
- 10** – задание исходных значений моментов инерции маховых масс;
- 11** – инициализация переменной общей длины эквивалентного вала;
- 13** – задание исходных значений жесткостей связей эквивалентного вала;
- 14** – **15** – вычисление общей длины эквивалентного вала для расчёта стопорения системы;
- 16** – **21** – цикл вычисления гармонических коэффициентов влияния обратной системы уравнений (1.47);
- 22** – печать результатов расчёта;
- 23** – инициализация номера рассчитываемой частоты;
- 24** – **25** – инициализация исходной формы колебаний  $\lambda_i^{(0)}$ ;
- 26** – **30** – цикл вычисления: приближений к форме колебаний  $\lambda_i^{(1)}$  (1.49);
- 31** – квадрата частоты  $i$ -ого колебания  $MZ_i$ ; суммы значений исходных форм колебаний  $S1$  и суммы значений приближения к форме колебаний  $S2$  (1.48);
- 32** – вычисление среднеарифметической частоты всей механической системы  $M_2$  и задание минимального значения  $M_1$  этой системы (1.48);

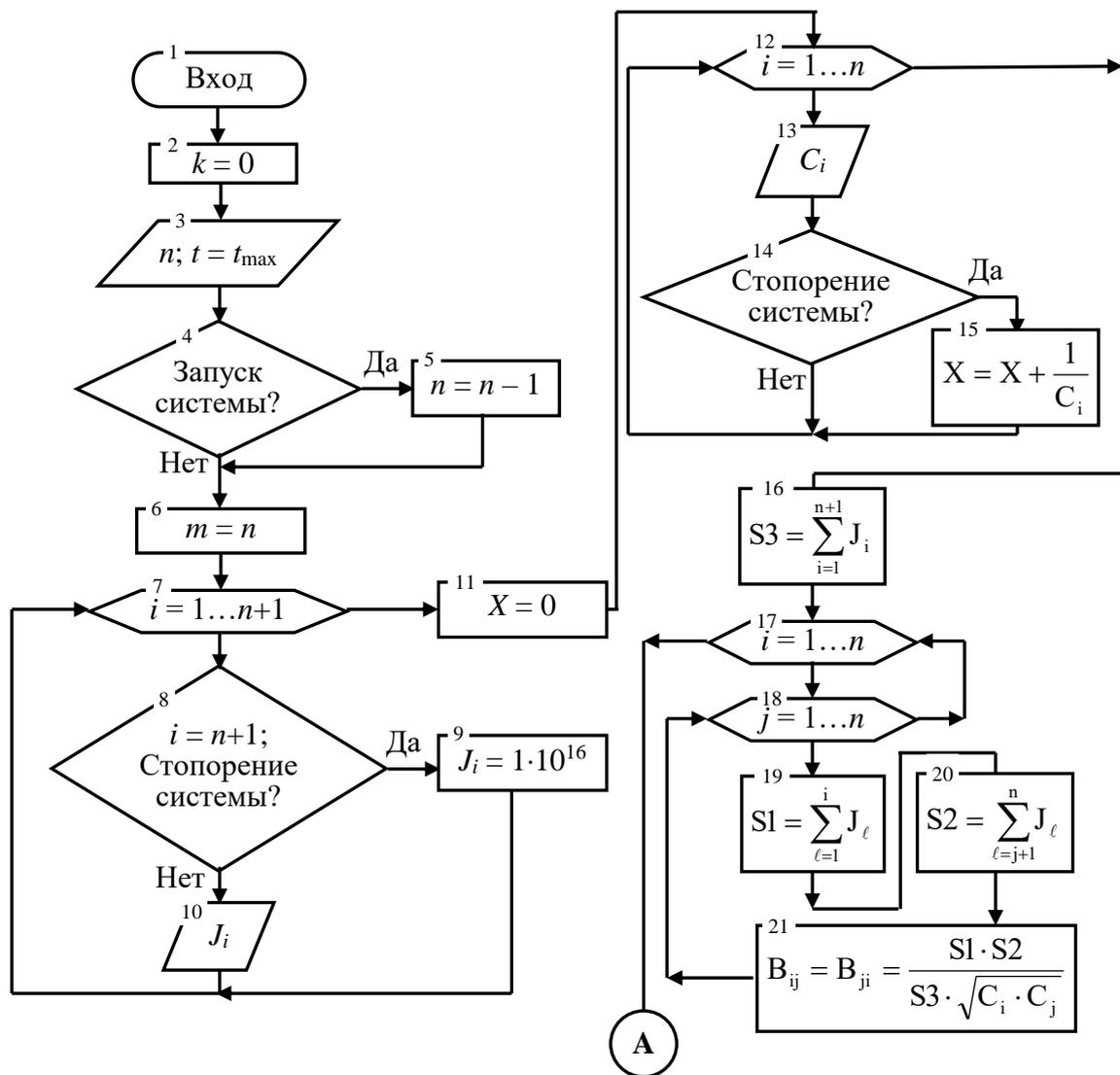


Рис. 1.18 – Блок-схема алгоритма решения задачи (ввод исходных данных и расчёт коэффициентов влияния)

**33 – 36** – нахождение минимальной частоты всей механической системы  $M_1$  (1.48) и форм колебания  $k$ -ой частоты  $U_{i+k-1,k}$  (1.50);

**37, 57, 66** – обращения к подпрограмме **72** проверки лимита времени на расчёт (при заикливание расчёта, если не обеспечивается требуемая точность расчёта, то выход из расчётов);

**38** – блок проверки отсутствия корня частоты (если итерационный процесс завершён, то есть разность частот  $M_2 - M_1 = 0$ , а сумма  $-M_1 + M_2 < 0$ , то есть значение частоты отрицательная величина, то переход к блоку **39**, иначе продолжение итераций – блок **40**);

**39** – печать результатов расчёта, если корень частоты отсутствует, с последующим переходом к расчёту следующей высшей частоты, блоку **67**;

**40** – проверка сходимости итерационного процесса нахождения основной частоты колебания  $\omega_i$  (1.51);

**41 – 42** – печать результатов расчёта;

**43 – 44** – сохранение первой амплитуды основной формы колебания  $\lambda_1^{(m)}$  в  $m$  приближении (1.49);

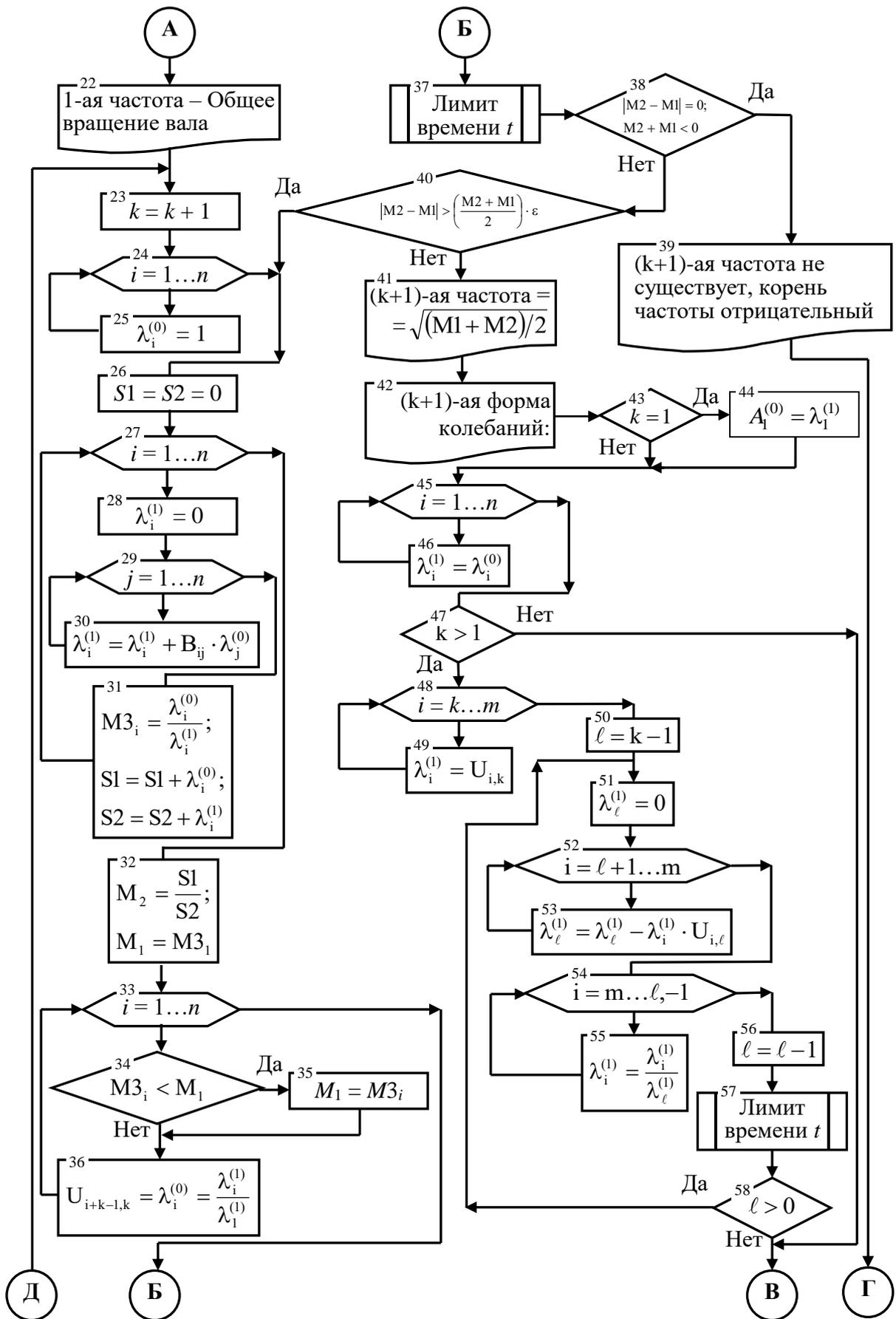


Рис. 1.19 – Продолжение блок-схемы алгоритма решения задачи (расчёт основной частоты и формы колебания, преобразование формы)

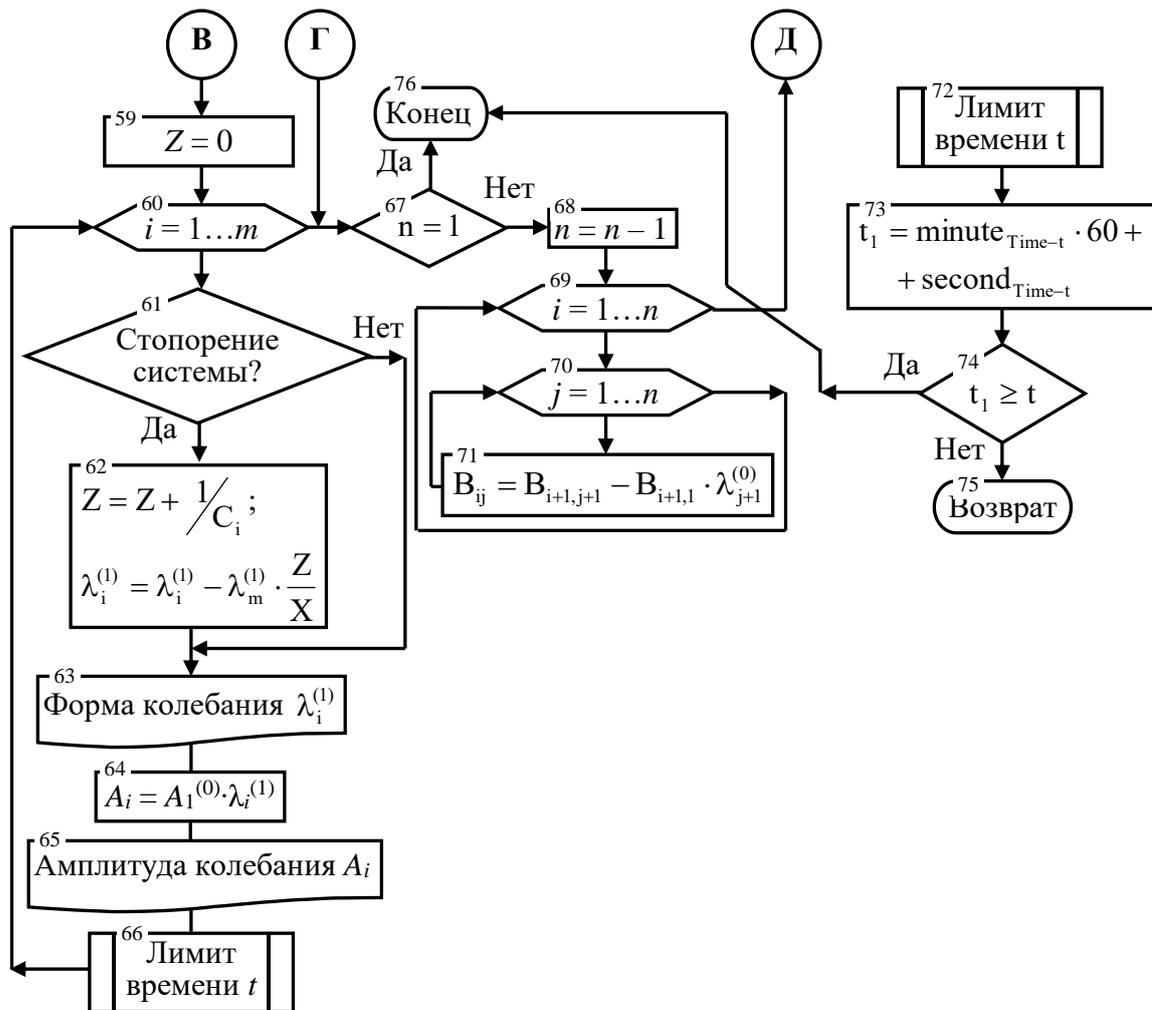


Рис. 1.20 – Окончание блок-схемы алгоритма решения задачи (корректирование формы колебания при стопорении системы и расчёт коэффициентов влияния высшей формы)

- 45 – 46 – вследствие ортогональности форм колебаний, полученное приближение формы колебания принимается за исходную форму;
- 47 – блок проверки условия; при определении первой основной частоты всей механической системы осуществляется переход к вычислению гармонических коэффициентов влияния для второй высшей частоты, без корректировки формы колебаний первой частоты, (блоку 59);
- 48 – 49 – вследствие ортогональности вычисленная форма колебания низшей частоты принимается за исходную для высшей частоты;
- 50 – инициализация числа высших форм колебаний;
- 51 – инициализация первого члена разложения по собственным частотам;
- 52 – 53 – вычисление первого члена разложения по собственным частотам (1.53);
- 54 – 55 – приведение формы колебаний всей системы для высшей частоты  $k$  (1.54);
- 56 – уменьшение числа приведенных форм высшей  $k$ -ой частоты;
- 58 – блок проверки условия количества приведённых форм колебаний;
- 59 – инициализация переменной текущей координаты длины вала;

- 61 – 62** – корректировка формы колебания при стопорении рабочего органа машины (1.55);  
**64** – вычисление амплитуды колебаний для  $i$ -й формы колебания (1.56)  
**63, 65** – распечатка формы и амплитуд собственных колебаний для  $k$ -й частоты;  
**67** – блок проверки завершения расчёта;  
**68** – исключение из расчёта низших частот;  
**69 – 71** – преобразование гармонических коэффициентов влияния для высшей частоты, после чего осуществляется переход к расчёту высшей частоты и её форм колебаний (**23** блоку);  
**72 – 75** – подпрограмма проверки лимита времени на расчёт;  
**73** – вычисление времени, затраченного на расчёт;  
**74** – блок проверки условия; если лимит времени израсходован, то завершение расчёта, переход к **76** блоку, иначе – возврат к следующему блоку вызывающим эту подпрограмму.

## **2.7 Численная реализация алгоритма решения дифференциальных уравнений**

Для механической системы (см. рис. 1.17) имеются следующие исходные значения моментов инерции дисков  $J_i$  и жёсткости  $C_i$  участков эквивалентного вала:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 10,78 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_1 &= 10,48 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_2 &= 82,82 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_2 &= 34,80 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_3 &= 14,27 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_3 &= 24,40 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_4 &= 29,56 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_4 &= 40,60 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_5 &= 21,66 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.
 \end{aligned}$$

Требуется определить частоты и формы колебаний участков эквивалентного вала. Рассмотрим аналитическое решение данной задачи.

### **1) Расчёт гармонических коэффициентов влияния**

Составим уравнения угловых колебаний приведенного вала с пятью маховыми массами (дисками) в прямой и обратной форме. Коэффициенты прямой системы дифференциальных уравнений вычислим по формулам для коэффициентов уравнений (1.45).

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{C_1 \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} = \frac{104800 \cdot (10,78 + 82,82)}{10,78 \cdot 82,82} \cong 10987; \\
 k_{12} = k_{21} &= \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}{J_2} = \frac{\sqrt{104800 \cdot 348000}}{82,82} \cong 2306; \\
 k_{22} &= \frac{C_2 \cdot (J_2 + J_3)}{J_2 \cdot J_3} = \frac{348000 \cdot (82,82 + 14,27)}{82,82 \cdot 14,27} \cong 28589;
 \end{aligned}$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{\sqrt{C_2 \cdot C_3}}{J_3} = \frac{\sqrt{348000 \cdot 244000}}{14,27} \cong 20420;$$

$$k_{33} = \frac{C_3 \cdot (J_3 + J_4)}{J_3 \cdot J_4} = \frac{244000 \cdot (14,27 + 29,56)}{14,27 \cdot 29,56} \cong 25353;$$

$$k_{34} = k_{43} = \frac{\sqrt{C_3 \cdot C_4}}{J_4} = \frac{\sqrt{244000 \cdot 406000}}{29,56} \cong 10648;$$

$$k_{44} = \frac{C_4 \cdot (J_4 + J_5)}{J_4 \cdot J_5} = \frac{406000 \cdot (29,56 + 21,66)}{29,56 \cdot 21,66} \cong 32479.$$

Положив  $\alpha = \omega^2$  ( $\omega$  – собственная частота колебаний), получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \lambda_1 &= 10987 \cdot \lambda_1 - 2306 \cdot \lambda_2; \\ \alpha \lambda_2 &= -2306 \cdot \lambda_1 + 28589 \cdot \lambda_2 - 2042 \cdot \lambda_3; \\ \alpha \lambda_3 &= -2042 \cdot \lambda_2 + 25353 \cdot \lambda_3 - 10648 \cdot \lambda_4; \\ \alpha \lambda_4 &= -10648 \cdot \lambda_3 + 32479 \cdot \lambda_4. \end{aligned} \right\}$$

В последующем, зная отношение амплитуд форм колебаний (1.50) или (1.54), например  $u_{12} = \lambda_2 / \lambda_1$ , можно будет определить значение квадрата частоты колебания любой частоты следующим образом.

Полученное далее отношение  $u_{12} = 3,029$  (табл. 1.1) подставим в первое уравнение системы и найдём значение основной частоты  $\omega_1$ :

$$\omega_1^2 = 10987 - 2306 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 10987 - 2306 \cdot 3,029 = 4002,1;$$

$$\omega_1 = 63,26 \text{ c}^{-1}.$$

Аналогично можно определить высшие частоты, зная отношение амплитуд форм высшей частоты. Например, для второй частоты по (1.54) будет далее определено отношение  $u_{22} = -0,08$  (1.61), тогда

$$\omega_2^2 = 10987 - 2306 \cdot \frac{\mu_{22}}{\mu_1} = 10987 - 2306 \cdot (-0,08) = 11171,5;$$

$$\omega_2 = 105,70 \text{ c}^{-1}.$$

Таким образом, прямая система дифференциальных уравнений позволяет найти любую частоту механической системы, зная отношение любых форм колебаний.

### **2.1) Расчёт коэффициентов влияния основной частоты системы**

Симметричную обратную систему дифференциальных уравнений (1.46) получим, вычислив сумму моментов инерции  $A$  и коэффициенты  $B_{ij}$  по формуле (1.47)

$$A = 10,78 + 82,82 + 14,27 + 29,56 + 21,66 = 159,09;$$

$$B_{11} = \frac{J_1 \cdot (J_2 + J_3 + J_4 + J_5)}{A \cdot C_1} = \frac{10,78 \cdot (82,82 + 14,27 + 29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot 104800} = 95,89 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{J_1 \cdot (J_3 + J_4 + J_5)}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2}} = \frac{10,78 \cdot (14,27 + 29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot \sqrt{104800 \cdot 348000}} = 23,24 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{13} = B_{31} = \frac{J_1 \cdot (J_4 + J_5)}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_3}} = \frac{10,78 \cdot (29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot \sqrt{104800 \cdot 244000}} = 21,70 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{14} = B_{41} = \frac{J_1 \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_4}} = \frac{10,78 \cdot 21,66}{159,09 \cdot \sqrt{104800 \cdot 406000}} = 7,12 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{22} = \frac{(J_1 + J_2) \cdot (J_3 + J_4 + J_5)}{A \cdot C_2} = \frac{(10,78 + 82,82) \cdot (14,27 + 29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot 348000} = 110,72 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{23} = B_{32} = \frac{(J_1 + J_2) \cdot (J_4 + J_5)}{A \cdot \sqrt{C_2 \cdot C_3}} = \frac{(10,78 + 82,82) \cdot (29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot \sqrt{348000 \cdot 244000}} = 103,42 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{24} = B_{42} = \frac{(J_1 + J_2) \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_2 \cdot C_4}} = \frac{(10,78 + 82,82) \cdot 21,66}{159,09 \cdot \sqrt{348000 \cdot 406000}} = 33,90 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{33} = \frac{(J_1 + J_2 + J_3) \cdot (J_4 + J_5)}{A \cdot C_3} = \frac{(10,78 + 82,82 + 14,27) \cdot (29,56 + 21,66)}{159,09 \cdot 244000} = 142,33 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{34} = B_{43} = \frac{(J_1 + J_2 + J_3) \cdot J_5}{A \cdot \sqrt{C_3 \cdot C_4}} = \frac{(10,78 + 82,82 + 14,27) \cdot 21,66}{159,09 \cdot \sqrt{244000 \cdot 406000}} = 46,66 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{44} = \frac{(J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot J_5}{A \cdot C_4} = \frac{(10,78 + 82,82 + 14,27 + 29,56) \cdot 21,66}{159,09 \cdot 406000} = 46,09 \cdot 10^{-6}.$$

Матрица коэффициентов (1.47) обратных уравнений всей механической системы будет иметь вид

$$\|B_{ik}\| = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 95,89 & 23,24 & 21,70 & 7,12 \\ 23,24 & 110,72 & 103,42 & 33,90 \\ 21,70 & 103,42 & 142,33 & 46,66 \\ 7,12 & 33,90 & 46,66 & 46,09 \end{vmatrix} \cdot 10^{-6}. \quad (1.57)$$

## 2.2) Расчёт границ основной частоты угловых колебаний вала

Приняв за исходную форму амплитуды  $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = \lambda_4^{(0)} = 1$  (табл. 1.2), в первом приближении получим амплитуды основной формы колебания по формуле (1.49)

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= B_{11} \cdot \lambda_1^{(0)} + B_{12} \cdot \lambda_2^{(0)} + B_{13} \cdot \lambda_3^{(0)} + B_{14} \cdot \lambda_4^{(0)} = \\ &= 95,89 \cdot 1 + 23,24 \cdot 1 + 21,7 \cdot 1 + 7,12 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 147,95 \cdot 10^{-6}; \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned}\lambda_2^{(1)} &= B_{21} \cdot \lambda_1^{(0)} + B_{22} \cdot \lambda_2^{(0)} + B_{23} \cdot \lambda_3^{(0)} + B_{24} \cdot \lambda_4^{(0)} = \\ &= 23,24 \cdot 1 + 110,72 \cdot 1 + 103,42 \cdot 1 + 33,9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 271,28 \cdot 10^{-6}; \\ \lambda_3^{(1)} &= B_{31} \cdot \lambda_1^{(0)} + B_{32} \cdot \lambda_2^{(0)} + B_{33} \cdot \lambda_3^{(0)} + B_{34} \cdot \lambda_4^{(0)} = \\ &= 21,70 \cdot 1 + 103,42 \cdot 1 + 142,33 \cdot 1 + 46,66 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 314,11 \cdot 10^{-6}; \\ \lambda_4^{(1)} &= B_{41} \cdot \lambda_1^{(0)} + B_{42} \cdot \lambda_2^{(0)} + B_{43} \cdot \lambda_3^{(0)} + B_{44} \cdot \lambda_4^{(0)} = \\ &= 7,12 \cdot 1 + 33,9 \cdot 1 + 46,66 \cdot 1 + 46,09 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 133,77 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Табл. 1.2 – Последовательные приближения формами колебаний

<i>m</i>	Наименование параметра	№ амплитуды, <i>i</i>			
		1	2	3	4
1	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	1	1	1
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	147,95	271,28	314,11	133,77
	Форма в приближении $u_{1i}^{(m)}$	<b>1</b>	<b>1,834</b>	<b>2,123</b>	<b>0,904</b>
2	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	1,834	2,123	0,904
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	191,02	476,51	555,72	210,02
	Форма в приближении $u_{1i}^{(m)}$	1	2,495	2,909	1,099
3	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,495	2,909	1,099
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	224,82	637,59	745,05	278,09
	Форма в приближении $u_{1i}^{(m)}$	1	2,836	3,314	1,237
4	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,836	3,314	1,237
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	242,52	721,91	844,40	314,91
	Форма в приближении $u_{1i}^{(m)}$	1	2,977	3,482	1,298
5	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,977	3,482	1,298
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	249,88	756,96	885,74	330,34
	Форма в приближении $u_{1i}^{(m)}$	<b>1</b>	<b>3,029</b>	<b>3,545</b>	<b>1,322</b>

Определив отношения соответственных амплитуд последовательных приближений, найдём минимальное и максимальное значения квадрата основной частоты, по формуле (1.48).

$$M_{11} = \frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{1}{147,95 \cdot 10^{-6}} \cong 6759,0 \text{ с}^{-2}; \quad M_{12} = \frac{\lambda_2^{(0)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{1}{271,28 \cdot 10^{-6}} \cong 3686,2 \text{ с}^{-2};$$

$$M_{13} = \frac{\lambda_3^{(0)}}{\lambda_3^{(1)}} = \frac{1}{314,11 \cdot 10^{-6}} \cong 3183,6 \text{ с}^{-2}; \quad M_{14} = \frac{\lambda_4^{(0)}}{\lambda_4^{(1)}} = \frac{1}{133,77 \cdot 10^{-6}} \cong 7475,5 \text{ с}^{-2};$$

$$M_2 = \frac{\lambda_1^{(0)} + \lambda_2^{(0)} + \lambda_3^{(0)} + \lambda_4^{(0)}}{\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(1)}} = \frac{1+1+1+1}{(147,95+271,28+314,11+133,77) \cdot 10^{-6}} \cong 4613,0 \text{ с}^{-2}.$$

Таким образом, в первом приближении мы получим следующие границы основной частоты в первом приближении (табл. 1.3)

$$\sqrt{3183,6} < \omega_1^{(1)} < \sqrt{4613,0}, \text{ или } 56,42 \text{ с}^{-1} < \omega_1^{(1)} < 67,92 \text{ с}^{-1}.$$

### 2.3) Расчёт исходной формы колебаний основной частоты

Определив амплитуды первого приближения, мы можем по формуле (1.50) получить основную (первую) форму колебаний в первом приближении (табл. 1.2), разделив все полученные амплитуды на первую  $\lambda_1^{(1)}$

$$u_{11} = \frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{147,95 \cdot 10^{-6}}{147,95 \cdot 10^{-6}} = 1; \quad u_{12} = \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{271,28 \cdot 10^{-6}}{147,95 \cdot 10^{-6}} = 1,834;$$

$$u_{13} = \frac{\lambda_3^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{314,11 \cdot 10^{-6}}{147,95 \cdot 10^{-6}} = 2,123; \quad u_{14} = \frac{\lambda_4^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{133,77 \cdot 10^{-6}}{147,95 \cdot 10^{-6}} = 0,904.$$

Приняв полученные значения формы в первом приближении за исходную форму, находим второе приближение и так далее до достижения требуемой точности расчёта  $\varepsilon$ .

### 2.4) Расчёт последующих приближений основной частоты

Расчёт выполняем аналогичным рассмотренному выше, принимая полученную форму колебаний масс механической системы  $u_{1i}^{(m)}$  за исходную  $\lambda_i^{(m-1)}$ . Результаты расчётов сведены в табл. 1.2 и 1.3.

Табл. 1.3 – Последовательные приближения границ основной частоты

№ приближения, $m$	Квадрат основной частоты $\omega_1$				min		max	Границы основной частоты, $c^{-1}$
	№ амплитуды, $i$							
	1	2	3	4				
1, $\lambda_i^{(0)} / \lambda_i^{(1)}$	6759,0	3686,2	3183,6	7475,5	3183,6	4613,0	56,42 < $\omega_1$ < 67,92	
2, $\lambda_i^{(1)} / \lambda_i^{(2)}$	5235,1	3848,8	3820,3	4304,4	3820,3	4089,3	61,81 < $\omega_1$ < 63,95	
3, $\lambda_i^{(2)} / \lambda_i^{(3)}$	4447,9	3913,2	3904,4	3952,0	3904,4	3979,2	62,49 < $\omega_1$ < 63,08	
4, $\lambda_i^{(3)} / \lambda_i^{(4)}$	4123,4	3928,5	3924,7	3928,2	3924,7	3949,2	62,65 < $\omega_1$ < 62,84	
5, $\lambda_i^{(4)} / \lambda_i^{(5)}$	4002,0	3932,8	3931,2	3929,3	3929,3	3939,4	62,68 < $\omega_1$ < 62,76	

### 2.5) Амплитуды колебаний основной частоты

Согласно формулы (1.56) амплитуды колебаний в пятом приближении не изменятся и соответствуют численным значениям, приведенным в табл. 1.2 (предпоследняя строчка):

$$\varphi_{11} = 249,88 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \quad \varphi_{12} = 756,96 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\varphi_{13} = 885,74 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \quad \varphi_{14} = 330,34 \cdot 10^{-6} \text{ рад}.$$

### 3.1) Расчёт коэффициентов влияния второй частоты системы

Из условия ортогональности второй формы первой, взяв амплитуды основной формы в пятом приближении (табл. 1.2)  $u_{11}^{(5)} = 1$ ;  $u_{12}^{(5)} = 3,029$ ;  $u_{13}^{(5)} = 3,545$ ;  $u_{14}^{(5)} = 1,322$  и исключив амплитуды первой формы (из матрицы коэффициентов (1.57) удаляется первая строка и первый столбец), по формуле (1.52) находим гармонические коэффициенты влияния второй частоты

$$B_{22}^* = B_{22} - B_{21} \cdot \frac{u_{12}}{u_{11}} = 110,72 \cdot 10^{-6} - 23,24 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,029}{1} = 40,33 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{23}^* = B_{23} - B_{21} \cdot \frac{u_{13}}{u_{11}} = 103,42 \cdot 10^{-6} - 23,24 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,545}{1} = 21,03 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{24}^* = B_{24} - B_{21} \cdot \frac{u_{14}}{u_{11}} = 33,90 \cdot 10^{-6} - 23,24 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,322}{1} = 3,18 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{32}^* = B_{32} - B_{31} \cdot \frac{u_{12}}{u_{11}} = 103,42 \cdot 10^{-6} - 21,70 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,029}{1} = 37,69 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{33}^* = B_{33} - B_{31} \cdot \frac{u_{13}}{u_{11}} = 142,33 \cdot 10^{-6} - 21,70 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,545}{1} = 65,40 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{34}^* = B_{34} - B_{31} \cdot \frac{u_{14}}{u_{11}} = 46,66 \cdot 10^{-6} - 21,70 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,322}{1} = 17,97 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{42}^* = B_{42} - B_{41} \cdot \frac{u_{12}}{u_{11}} = 33,90 \cdot 10^{-6} - 7,12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,029}{1} = 12,33 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{43}^* = B_{43} - B_{41} \cdot \frac{u_{13}}{u_{11}} = 46,66 \cdot 10^{-6} - 7,12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3,545}{1} = 21,42 \cdot 10^{-6};$$

$$B_{44}^* = B_{44} - B_{41} \cdot \frac{u_{14}}{u_{11}} = 46,09 \cdot 10^{-6} - 7,12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,322}{1} = 36,68 \cdot 10^{-6}.$$

Матрица коэффициентов обратных уравнений (1.47) для второй частоты будет иметь вид

$$\|B_{ik}\| = \begin{vmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40,33 & 21,03 & 3,18 \\ 37,69 & 65,40 & 17,97 \\ 12,33 & 21,42 & 36,68 \end{vmatrix} \cdot 10^{-6}. \quad (1.59)$$

### 3.2) Расчёт границ второй частоты и форм колебаний вала

Расчёт выполняется аналогично описанному выше, поэтому его сведём в табл. 1.4 и 1.5.

Табл. 1.4 – Последовательные приближения формами колебаний

m	Наименование параметра	№ амплитуды, i		
		2	3	4
1	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	1	1
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	64,54	121,06	70,43
	Форма в приближении $\mu_{2i}^{(m)}$	1	1,876	1,091
2	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	1,876	1,091
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	83,25	179,99	92,53
	Форма в приближении $\mu_{2i}^{(m)}$	1	2,162	1,111

$m$	Наименование параметра	№ амплитуды, $i$		
		2	3	4
3	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,162	1,111
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	89,33	199,05	99,39
	Форма в приближении $\mu_{2i}^{(m)}$	1	2,228	1,113
4	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,228	1,113
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	90,72	203,40	100,88
	Форма в приближении $\mu_{2i}^{(m)}$	1	2,242	1,112
5	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	2,242	1,112
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	91,02	204,30	101,14
	Форма в приближении $\mu_{2i}^{(m)}$	1	2,245	1,111

Табл. 1.5 – Последовательные приближения границ второй частоты

№ приближения, $m$	Квадрат основной частоты $\omega_2$				Границы второй частоты, $c^{-1}$	
	№ амплитуды, $i$			min		max
	2	3	4			
1, $\lambda_i^{(0)} / \lambda_i^{(1)}$	15494,3	8260,4	14198,5	8260,4	11717,4	$90,89 < \omega_2 < 108,25$
2, $\lambda_i^{(1)} / \lambda_i^{(2)}$	12011,8	10423,1	11790,5	10423,1	11150,5	$102,09 < \omega_2 < 105,60$
3, $\lambda_i^{(2)} / \lambda_i^{(3)}$	11194,5	10861,6	11178,0	10861,6	11019,4	$104,22 < \omega_2 < 104,97$
4, $\lambda_i^{(3)} / \lambda_i^{(4)}$	11022,4	10953,7	11033,1	10953,7	10989,8	$104,66 < \omega_2 < 104,83$
5, $\lambda_i^{(4)} / \lambda_i^{(5)}$	10987,2	10974,1	10994,5	10974,1	10982,3	$104,76 < \omega_2 < 104,80$

### 3.3) Корректировка формы второй частоты

Так как первая собственная форма  $u_{1k}$ , найденная предварительным также приближённым расчётом, определена с некоторой погрешностью, то полученное пятое приближение искомой второй формы  $\mu_{2i}^{(5)}$  не будет точно ортогонально первой форме. Подвергаем поэтому полученную форму (табл. 1.4 и табл. 1.2) исправлению, используя первый член разложения по собственным частотам (1.53)

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= -\sum_2^4 \mu_{2i} \cdot u_{1i} = -\mu_{22}^{(5)} \cdot u_{12} - \mu_{23}^{(5)} \cdot u_{13} - \mu_{24}^{(5)} \cdot u_{14} = \\ &= -1 \cdot 3,029 - 2,245 \cdot 3,545 - 1,111 \cdot 1,322 = -12,456. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Согласно выражению (1.54) и табл. 1.4 найдём вторую собственную форму всей системы в пятом приближении

$$u_{21} = \frac{\bar{\mu}_1}{\mu_1} = \frac{-12,456}{-12,456} = 1; \quad u_{22} = \frac{\mu_{22}^{(5)}}{\bar{\mu}_1} = \frac{1}{-12,456} = -0,080; \quad (1.61)$$

$$u_{23} = \frac{\mu_{23}^{(5)}}{\bar{\mu}_1} = \frac{2,245}{-12,456} = -0,180; \quad u_{24} = \frac{\mu_{24}^{(5)}}{\bar{\mu}_1} = \frac{1,111}{-12,456} = -0,089.$$

**3.4) Амплитуды собственных колебаний второй частоты** в пятом приближении (табл. 1.4) согласно формулы (1.56) необходимо скорректировать:

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{21} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 249,88 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{22} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{22} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,080) = -19,99 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{23} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{23} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,180) = -44,98 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{24} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{24} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,089) = -22,24 \cdot 10^{-6} \text{ рад}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_1^{(5)}$  – первая амплитуда основной формы колебания (1.58) в пятом приближении (табл. 1.2).

**4.1) Расчёт коэффициентов влияния третьей частоты системы.**

Из условия ортогональности третьей формы второй, взяв амплитуды второй формы в пятом приближении (табл. 1.4)  $\mu_{22}^{(5)} = 1$ ;  $\mu_{23}^{(5)} = 2,245$ ;  $\mu_{24}^{(5)} = 1,111$  и исключив амплитуды первой и второй форм (из матрицы коэффициентов (1.59) удаляется первая строка и первый столбец), по формуле (1.52) находим гармонические коэффициенты влияния

$$\begin{aligned} B_{33}^* &= B_{33} - B_{32} \cdot \frac{\mu_{23}}{\mu_{22}} = 65,40 \cdot 10^{-6} - 37,69 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2,245}{1} = -19,21 \cdot 10^{-6}; \\ B_{34}^* &= B_{34} - B_{32} \cdot \frac{\mu_{24}}{\mu_{22}} = 17,97 \cdot 10^{-6} - 37,69 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,111}{1} = -23,90 \cdot 10^{-6}; \\ B_{43}^* &= B_{43} - B_{42} \cdot \frac{\mu_{23}}{\mu_{22}} = 21,42 \cdot 10^{-6} - 12,33 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2,245}{1} = -6,26 \cdot 10^{-6}; \\ B_{44}^* &= B_{44} - B_{42} \cdot \frac{\mu_{24}}{\mu_{22}} = 36,68 \cdot 10^{-6} - 12,33 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,111}{1} = 22,98 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов обратных уравнений для третьей частоты будет иметь вид

$$\|B_{ik}\| = \begin{vmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -19,21 & -23,90 \\ -6,26 & 22,98 \end{vmatrix} \cdot 10^{-6}. \quad (1.62)$$

**4.2) Расчёт границ третьей частоты и форм угловых колебаний вала** также осуществляем последовательными приближениями формами колебаний. Результаты расчётов сведены в табл. 1.6 и 1.4.

Табл. 1.6 – Последовательные приближения формами третьей частоты

m	Наименование параметра	№ амплитуды, i	
		3	4
1	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	1
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	-43,11	16,72
	Форма в приближении $\mu_{3i}^{(m)}$	1	-0,388
2	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	-0,388
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	-9,94	-15,18
	Форма в приближении $\mu_{3i}^{(m)}$	1	1,527
⋮			
11	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	-6,969
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	147,35	-166,41
	Форма в приближении $\mu_{3i}^{(m)}$	1	-1,129
⋮			
53	Исходная форма $\lambda_i^{(m-1)}$	1	-1,902
	Амплитуда $\lambda_i^{(m)} \cdot 10^{-6}$	26,25	-49,97
	Форма в приближении $\mu_{3i}^{(m)}$	1	-1,903

Табл. 1.7 – Последовательные приближения границ третьей частоты

№ приближения, m	Квадрат основной частоты $\omega_3$				Границы третьей частоты, $c^{-1}$
	№ амплитуды, i		min	max	
	3	4			
1, $\lambda_i^{(0)} / \lambda_i^{(1)}$	-23196,5	59808,6	-23196,5	-75786,3	не существует
2, $\lambda_i^{(1)} / \lambda_i^{(2)}$	-100636,0	25566,3	-100636,0	-24369,8	не существует
⋮					
11, $\lambda_i^{(10)} / \lambda_i^{(11)}$	6786,6	41879,1	6786,6	313193,1	$82,38 < \omega_3 < 559,64$
⋮					
53, $\lambda_i^{(52)} / \lambda_i^{(53)}$	38098,4	38064,4	38064,4	38026,7	$195,00 < \omega_3 < 195,10$

#### 4.3) *Корректировка формы третьей частоты.*

Так как первая и вторая собственные формы  $u_{1k}$  и  $u_{2k}$ , найденные предварительным также приближённым расчётом, определены с некоторой погрешностью, то полученные приближения искомой третьей формы в 53-ем приближении  $\mu_{3i}^{(53)}$  не будут точно ортогональны первой и второй формам. Подвергаем поэтому полученную форму исправлению, используя первый член разложения по собственным частотам (1.53). Сначала приводим третью форму ко второй коэффициентом, используя полученные формы при вычислении соответственно третьей  $\mu_{3i}^{(53)}$  и второй  $\mu_{2i}^{(5)}$  частоты

$$\bar{\mu}_2 = -\sum_3^4 \mu_{3i} \cdot \mu_{2i} = -\mu_{33} \cdot \mu_{23} - \mu_{34} \cdot \mu_{24} = -1 \cdot 2,245 + 1,903 \cdot 1,111 = -0,131.$$

Согласно выражению (1.54) найдём скорректированную вторую, третью и четвертую амплитуду третьей формы

$$\mu_{32} = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2} = \frac{-0,131}{-0,131} = 1; \quad \mu_{33} = \frac{\mu_{33}^{(53)}}{\bar{\mu}_2} = \frac{1}{-0,131} = -7,634;$$

$$\mu_{34} = \frac{\mu_{34}^{(53)}}{\bar{\mu}_2} = \frac{-1,903}{-0,131} = 14,527.$$

Приведя третью форму ко второй, теперь мы можем определить первый член разложения по собственным частотам (1.53) всей системы

$$\bar{\mu}_1 = -\sum_2^4 \mu_{3i} \cdot u_{1i} = -\mu_{32} \cdot u_{12} - \mu_{33} \cdot u_{13} - \mu_{34} \cdot u_{14} =$$

$$= -1 \cdot 3,029 + 7,634 \cdot 3,545 - 14,527 \cdot 1,322 = 4,829. \quad (1.63)$$

В соответствии с (1.54) имеем третью собственную форму

$$u_{31} = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1} = \frac{4,829}{4,829} = 1; \quad u_{32} = \frac{\mu_{32}}{\bar{\mu}_1} = \frac{1}{4,829} = 0,207;$$

$$u_{33} = \frac{\mu_{33}}{\bar{\mu}_1} = \frac{-7,634}{4,829} = -1,581; \quad u_{34} = \frac{\mu_{34}}{\bar{\mu}_1} = \frac{14,527}{4,829} = 3,008.$$

**4.4) Амплитуды собственных колебаний третьей частоты** в 53 приближении (табл. 1.6) согласно формулы (1.56):

$$\varphi_{31} = \lambda_1^{(5)} \cdot u_{31} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 249,88 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\varphi_{32} = \lambda_1^{(5)} \cdot u_{32} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 0,207 = 51,73 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\varphi_{33} = \lambda_1^{(5)} \cdot u_{33} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot (-1,581) = -395,06 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\varphi_{34} = \lambda_1^{(5)} \cdot u_{34} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 3,008 = 751,64 \cdot 10^{-6} \text{ рад},$$

где  $\lambda_1^{(5)}$  – первая амплитуда основной формы колебания (1.58) в пятом приближении (табл. 1.2).

#### **5.1) Расчёт коэффициентов влияния четвертой частоты.**

Из условия ортогональности четвертой формы третьей, взяв амплитуды третьей формы  $\mu_{33}^{(53)} = 1$ ;  $\mu_{34}^{(53)} = -1,903$  и исключив амплитуды низших форм (из матрицы коэффициентов (1.62) удаляется первая строка и первый столбец), по формуле (1.52) находим гармонические коэффициенты влияния четвертой частоты

$$B_{44}^* = B_{44} - B_{43} \cdot \frac{\mu_{34}}{\mu_{33}} = 22,98 \cdot 10^{-6} - 6,26 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,903}{1} = 11,07 \cdot 10^{-6}.$$

Матрица коэффициентов обратных уравнений для четвертой частоты

$$\|B_{ik}\| = \|B_{44}\| = \|11,07\| \cdot 10^{-6}.$$

### 5.2) Расчёт границ четвертой частоты угловых колебаний вала.

Приняв за исходную форму амплитуды  $\lambda_1^{(0)} = 1$ , в первом приближении получим амплитуду четвертой формы колебания по формуле (1.49)

$$\lambda_1^{(1)} = B_{44} \cdot \lambda_1^{(0)} = 11,07 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 11,07 \cdot 10^{-6}.$$

Определив отношения соответственных амплитуд последовательных приближений, найдём минимальное и максимальное значения квадрата основной частоты

$$M_1 = M_2 = \frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{1}{11,07 \cdot 10^{-6}} \cong 90334,2 \text{ с}^{-2},$$

откуда получим значение четвертой частоты в первом приближении

$$\omega_4^{(1)} = \sqrt{90334,2} = 300,56 \text{ с}^{-1}.$$

### 5.3) Расчёт исходной формы колебаний четвертой частоты.

Определив амплитуды первого приближения, мы можем по формуле (1.50) получить форму колебаний в первом приближении, разделив все полученные амплитуды на первую  $\lambda_1^{(1)}$

$$\mu_{44}^{(1)} = \frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \frac{11,07 \cdot 10^{-6}}{11,07 \cdot 10^{-6}} = 1.$$

### 5.4) Корректировка формы четвертой частоты.

Так как первая, вторая и третья собственные формы  $u_{1k}$ ,  $u_{2k}$  и  $u_{3k}$ , найденные предварительным также приближенным расчётом, определены с некоторой погрешностью, то полученные приближения искомой четвертой формы  $\mu_{44}^{(1)}$  не будет точно ортогонально предыдущим формам. Подвергаем поэтому полученную форму исправлению, используя первый член разложения по собственным частотам (1.53). Сначала приводим четвертую форму к третьей

$$\bar{\mu}_3 = -\sum_4^4 \mu_{4i} \cdot \mu_{3i} = -\mu_{44} \cdot \mu_{34} = -1 \cdot (-1,903) = 1,903.$$

Согласно выражению (1.54) найдём скорректированные третью и четвертую формы колебаний

$$\mu_{43} = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\mu}_3} = \frac{1,903}{1,903} = 1; \quad \mu_{44} = \frac{\mu_4^{(1)}}{\bar{\mu}_3} = \frac{1}{1,903} = 0,525.$$

Приведя четвертую форму к третьей, теперь мы можем привести третью форму ко второй

$$\bar{\mu}_2 = -\sum_3^4 \mu_{4i} \cdot \mu_{2i} = -\mu_{43} \cdot \mu_{23} - \mu_{44} \cdot \mu_{24} = -1 \cdot 2,245 - 0,525 \cdot 1,111 = -2,828.$$

В соответствии с (1.54) имеем скорректированные вторую, третью и четвёртую амплитуды четвёртой формы

$$\begin{aligned}\mu_{42} &= \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2} = \frac{-2,828}{-2,828} = 1; & \mu_{43} &= \frac{\mu_{43}}{\bar{\mu}_2} = \frac{1}{-2,828} = -0,354; \\ \mu_{44} &= \frac{\mu_{44}}{\bar{\mu}_2} = \frac{0,525}{-2,828} = -0,186.\end{aligned}$$

Наконец, для получения четвёртой формы всей механической системы определим коэффициент перехода со второй формы на первую

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= -\sum_2^4 \mu_{4i} \cdot u_{1i} = -\mu_{42} \cdot u_{12} - \mu_{43} \cdot u_{13} - \mu_{44} \cdot u_{14} = \\ &= -1 \cdot 3,029 + 0,354 \cdot 3,545 + 0,186 \cdot 1,322 = -1,528.\end{aligned}$$

В соответствии с (1.54) имеем четвёртую собственную форму

$$\begin{aligned}u_{41} &= \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1} = \frac{-1,528}{-1,528} = 1; & u_{42} &= \frac{\mu_{42}}{\bar{\mu}_1} = \frac{1}{-1,528} = -0,654; \\ u_{43} &= \frac{\mu_{43}}{\bar{\mu}_1} = \frac{-0,354}{-1,528} = 0,232; & u_{44} &= \frac{\mu_{44}}{\bar{\mu}_1} = \frac{-0,186}{-1,528} = 0,122.\end{aligned}$$

**5.5) Амплитуды собственных колебаний четвёртой частоты** согласно формулы (1.56):

$$\begin{aligned}\varphi_{41} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{41} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 249,88 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{42} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{42} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,654) = -163,42 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{43} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{43} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 0,232 = 57,97 \cdot 10^{-6} \text{ рад}; \\ \varphi_{44} &= \lambda_1^{(5)} \cdot u_{44} = 249,88 \cdot 10^{-6} \cdot 0,122 = 30,49 \cdot 10^{-6} \text{ рад},\end{aligned}$$

где  $\lambda_1^{(5)}$  – первая амплитуда основной формы колебания (1.58) в пятом приближении (табл. 1.2).

**б) Анализ результатов расчёта.**

Выполним графический анализ полученных форм колебаний механической системы, представив его на рис. 1.21.

По результатам выполненных расчётов сделаем заключение о степени работоспособности механической системы, выявляя частоты колебаний, которые необходимо избегать при работе механизма. Мы имеем пять степеней свободы системы и, соответственно, пятичастотное колебательное движение, которое можно рассматривать как *сумму пяти движений*.

- 1) Общему вращению эквивалентного вала соответствует нулевой корень частоты, равный постоянной частоте вращения двигателя  $\omega_d$ .
- 2) Первая амплитуда деформации связи  $\varphi_2 - \varphi_1$  постоянна и не зависит от формы колебаний и составляет  $249,88 \cdot 10^{-6}$  рад; зная жёсткость данной связи  $C_1$  можно определить значение упругой силы, возникающей в ней

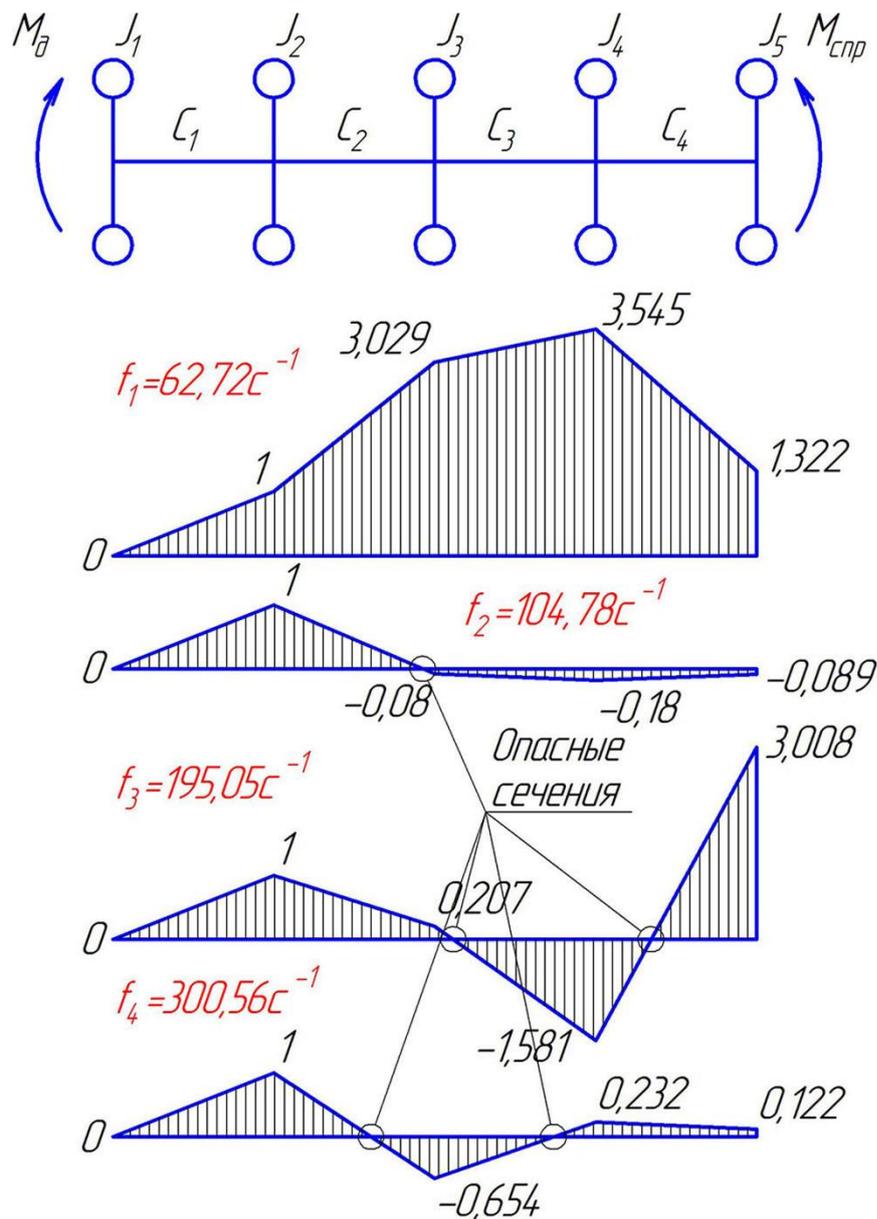


Рис. 1.21 – Геометрическая интерпретация результатов расчёта

$$F = C_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = 10,48 \cdot 10^4 \cdot (249,88 \cdot 10^{-6} - 0) = 26,2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

- 3) В основном движении пять масс колеблются с одинаковой частотой  $62,72 \text{ с}^{-1}$  и в любой момент времени амплитуды углов деформации участков эквивалентного вала, соответствующих жёсткости  $C_i$  от единичного гармонического крутящего момента указанной частоты постоянны и соответственно равны следующим значениям

$$u_2^{(1)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1; u_3^{(1)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 3,029; u_4^{(1)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 3,545 \text{ и } u_5^{(1)} = \frac{\lambda_5}{\lambda_2} = 1,322,$$

где  $\lambda_i$  – амплитуды углов кручения участка вала под  $i$ -ой маховой массой.

Это движение называют *первой собственной (основной) формой колебаний* и заключается в деформации вала между маховыми массами. Возможна нормальная работа механической системы без ограничений.

- 4) В другом движении массы колеблются с частотой  $104,78 \text{ с}^{-1}$  при амплитудах углов кручения участков вала под массами в любой момент времени

$$u_2^{(2)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1; u_3^{(2)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -0,080; u_4^{(2)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = -0,180 \text{ и } u_5^{(2)} = \frac{\lambda_5}{\lambda_2} = -0,089.$$

Это движение называют второй собственной формой колебаний и заключается в деформации вала между маховыми массами  $J_1 - J_2$  и  $J_3 - J_5$ , а между массами  $J_2 - J_3$  возможен концентратор напряжений, связанный со сменой знака деформации упругих связей.

- 5) В третьем движении системы массы колеблются с частотой  $195,05 \text{ с}^{-1}$  при амплитудах углов кручения участков вала в любой момент времени

$$u_2^{(3)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1; u_3^{(3)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = 0,207; u_4^{(3)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = -1,581 \text{ и } u_5^{(3)} = \frac{\lambda_5}{\lambda_2} = 3,008.$$

Это движение называют третьей собственной формой колебаний и заключается в деформации вала между массами  $J_1 - J_3$ , а между маховыми массами  $J_3 - J_4$  и  $J_4 - J_5$  возможны концентраторы напряжений, следствием которых может быть понижение усталостной прочности упругих связей. Это двухузловая собственная форма колебаний<sup>2</sup>, здесь дважды напряжения деформированных волокон вала меняют свой знак.

- б) Последнее движение механической системы осуществляется с четвёртой собственной частотой  $300,56 \text{ с}^{-1}$  при амплитудах углов кручения участков вала в любой момент времени

$$u_2^{(4)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1; u_3^{(4)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -0,654; u_4^{(4)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 0,232 \text{ и } u_5^{(4)} = \frac{\lambda_5}{\lambda_2} = 0,122.$$

Это движение называют четвёртой собственной формой колебаний и заключается в деформации вала между массами  $J_1 - J_2$  и  $J_4 - J_5$ , а между маховыми массами  $J_2 - J_3$  и  $J_3 - J_4$  возможны концентраторы напряжений, следствием которых может быть понижение усталостной прочности упругих связей. Это также двухузловая собственная форма колебаний.

Таким образом, выполненный расчёт позволил выявить вынужденные частоты работы механической системы (вторая, третья и четвёртая частоты), при совпадении которых с собственными, рассчитанными по приведённой выше методике, возможно снижение надёжности механизма, может наступить отказ или полный выход механизма из строя.

<sup>2</sup> Следует отметить, что в многомассных системах высшим частотам соответствуют всё более сложные (в отношении числа узлов) собственные формы колебаний.

Сформулируем основные понятия, вынесенные из описанного выше раздела.

Первую собственную форму колебаний с меньшей частотой называют *главным колебанием системы*.

Вторую, третью и так далее собственные формы колебаний, с более высокими частотами, называют *гармоническими колебаниями системы*.

Меньшую собственную частоту называют *основной частотой*.

Колебание с меньшей частотой является *основным колебанием* в результирующем движении системы.

Амплитуды собственных колебаний зависят от того, каким образом эта система выведена из состояния покоя или какими начальными условиями можно охарактеризовать поведение системы.

Следовательно, знание частот и форм собственных колебаний позволяет выявить резонансные частоты и предотвратить возможное их совпадение с вынужденными частотами.

### 3 Примеры составления и упрощения эквивалентных расчётных схем, расчёта частот и форм колебаний

В данном разделе приведены примеры представления кинематических схем механизмов в виде эквивалентных расчётных схем, динамические характеристики которых эквивалентны характеристикам натуральных механизмов. Для решения приведенных далее задач выполняется условие динамической эквивалентности исходной и приведенной систем, то есть равенство кинетической и потенциальной энергий до и после приведения.

#### 3.1 Исследование поступательно движущихся масс

Рассмотрим в качестве примера приведение механической системы поступательно движущихся масс с тремя степенями свободы к механической системе с двумя степенями свободы, если известно, что внешняя нагрузка воздействует на массу  $m_1$ , а численное значение массы  $m_3$  значительно меньше других масс. Расчётная схема исходной системы приведена на рис. 1.22.

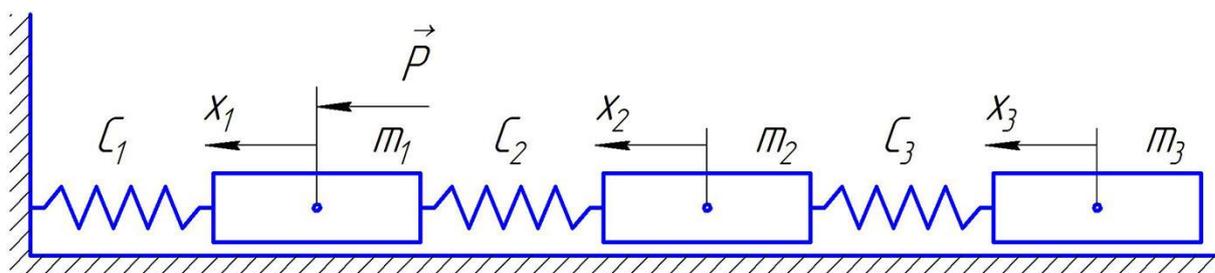


Рис. 1.22 – Расчётная схема исходной механической системы поступательно движущихся масс

Исходные данные для расчёта схемы:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2,0 \cdot 10^4 \text{ кг}; \\ m_2 &= 1,0 \cdot 10^4 \text{ кг}; \\ m_3 &= 0,2 \cdot 10^4 \text{ кг}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1,0 \cdot 10^3 \text{ кН/м}; \\ C_2 &= 2,0 \cdot 10^3 \text{ кН/м}; \\ C_3 &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}. \end{aligned}$$

Так как  $m_3 \ll m_1$ ,  $m_3 \ll m_2$  и нагрузка  $P$  приложена к массе  $m_1$ , то упростим данную схему до двухмассной, получив численные значения эквивалентной схемы (рис. 1.23)

$$m_n = m_2 + m_3; \quad \frac{1}{C_n} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}; \quad C_n = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3},$$

$$m_n = 1 \cdot 10^4 + 0,2 \cdot 10^4 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг},$$

$$C_n = \frac{2 \cdot 10^3 \times 2,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 2,5 \cdot 10^3} = 1,11 \cdot 10^3 \text{ кН/м}.$$

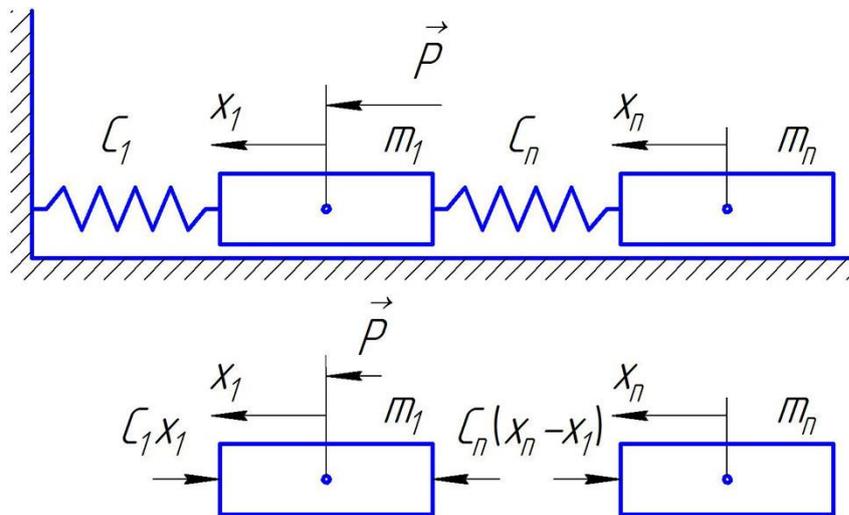


Рис. 1.23 – Приведённая расчётная схема механической системы поступательно движущихся масс (а) и силы, действующие в ней (б)

Систему дифференциальных уравнений эквивалентной расчётной системы составим с использованием метода Даламбера или уравнения Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_1 x_1 - C_n (x_n - x_1) = P; \\ m_n \ddot{x}_n + C_n (x_n - x_1) = 0. \end{cases}$$

Как было сказано ранее, решение этой системы состоит из общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения. При  $P = 0$  получим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_1 x_1 - C_n (x_n - x_1) = 0; \\ m_n \ddot{x}_n + C_n (x_n - x_1) = 0, \end{cases} \quad (1.64)$$

решением которой являются функции

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi); \\ x_n = a_n \sin(\omega t + \varphi), \end{cases} \quad (1.65)$$

где  $a_1$  и  $a_n$  – неизвестные амплитуды колебаний масс;

$\omega$  – частота колебаний,  $\text{с}^{-1}$ ;

$t$  – время,  $\text{с}$ ;

$\varphi$  – сдвиг фаз.

После подстановки функций в уравнения (1.64) получим

$$\begin{cases} [-m_1 a_1 \omega^2 + C_1 a_1 - C_n a_n - a_1] \cdot \sin \omega t + \varphi = 0; \\ [-m_n a_n \omega^2 + C_n a_n - a_1] \cdot \sin \omega t + \varphi = 0, \end{cases} \quad (1.66)$$

Равенства (1.66) справедливы, если: во-первых  $\sin(\omega t + \varphi) = 0$  и, во-вторых слагаемые в скобках также равны нулю. После группировки слагаемых в квадратных скобках имеем:

$$\begin{cases} C_n a_n = -m_1 \omega^2 + C_1 + C_n a_1; \\ C_n a_1 = -m_n \omega^2 + C_n a_n, \end{cases} \quad (1.67)$$

Несмотря на то, что в уравнениях (1.67) три неизвестных величины: амплитуды колебаний  $a_1$ ,  $a_n$  и частота  $\omega$ , неизвестные величины частот собственных колебаний можно вычислить следующим образом. Находим из первого уравнения отношение

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{-m_1 \omega^2 + C_1 + C_n}{C_n}$$

и такое же отношение из второго уравнения

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{C_n}{-m_n \omega^2 + C_n}. \quad (1.68)$$

Совместимость полученных выражений приводит к уравнению, в котором одна неизвестная величина – частота  $\omega$ :

$$\frac{C_1 + C_n - m_1 \omega^2}{C_n} = \frac{C_n}{C_n - m_n \omega^2}$$

или

$$(C_1 + C_n - m_1 \omega^2) \cdot (C_n - m_n \omega^2) = C_n^2.$$

После преобразований получим биквадратное частотное уравнение

$$\omega^4 - \left( \frac{C_1 + C_n}{m_1} + \frac{C_n}{m_n} \right) \omega^2 + \frac{C_1 C_n}{m_1 m_n} = 0, \quad (1.69)$$

решением которого являются следующие выражения собственных частот колебаний

$$\omega_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_1 + C_n}{m_1} + \frac{C_n}{m_n} \right)} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_1 + C_n}{m_1} + \frac{C_n}{m_n} \right)^2 - \frac{C_1 C_n}{m_1 m_n}}.$$

После подстановки значений масс и жесткостей связей имеем

$$\omega_{1-4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1 \cdot 10^6 + 1,11 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} + \frac{1,11 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 10^4} \right)} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1 \cdot 10^6 + 1,11 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} + \frac{1,11 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 10^4} \right)^2 - \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 1,11 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 1,2 \cdot 10^4}},$$

откуда получим значения частот собственных колебаний  $\omega_{1,2} = \pm 5,2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_{3,4} = \pm 13,08 \text{ с}^{-1}$ .

Частотное уравнение (1.69) можно определить также иным путём. Систему уравнений (1.67) перепишем в виде однородной системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (-m_1 \omega^2 + C_1 + C_n) a_1 - C_n a_n = 0; \\ -C_n a_1 + (-m_n \omega^2 + C_n) a_n = 0, \end{cases}$$

которая удовлетворяется нулевыми корнями  $a_1 = a_n = 0$ , что соответствует в данном случае отсутствию колебаний. Однако, система будет удовлетворяться и при  $a_1 \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$ , если определитель системы, составленный из коэффициентов при  $a_1$  и  $a_n$ , равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + C_1 + C_n & -C_n \\ -C_n & -m_n \omega^2 + C_n \end{vmatrix} = 0.$$

Развёртывая определитель, получим аналогичное (1.69) алгебраическое уравнение четвёртой степени относительно частоты  $\omega$ .

Так как в данном примере затухание колебаний отсутствует, то на комплексной плоскости найденные значения частот соответствуют незатухающим периодическим колебаниям и корням  $s_{i,j} = \pm i\omega$ , расположенным на мнимой оси.

Система (1.66) не позволяет найти значения амплитуд колебаний, но возможно установить соотношение между ними. Для этого примем относительную деформацию  $a_{11} = a_{12} = 1$ , а в равенство (1.68) подставим значения найденных собственных частот

$$\chi_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} = \frac{1,11 \cdot 10^6}{-1,2 \cdot 10^4 \cdot 5,2^2 + 1,11 \cdot 10^6} = 1,41;$$

$$\chi_{n2} = \frac{a_{n2}}{a_{12}} = \frac{1,11 \cdot 10^6}{-1,2 \cdot 10^4 \cdot 13,08^2 + 1,11 \cdot 10^6} = -1,18.$$

Соответствующие уравнениям (1.64) формы собственных колебаний представлены на рис. 1.24.

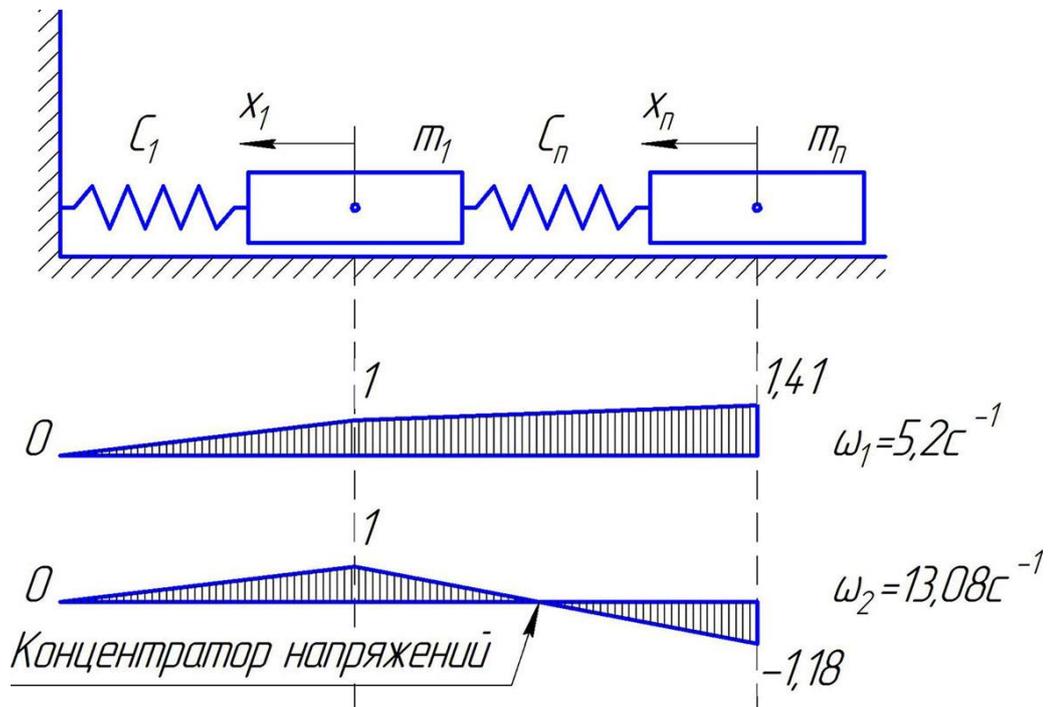


Рис. 1.24 – Приведённая расчётная схема механической системы поступательно движущихся масс (а) и формы, частоты собственных колебаний (б)

Колебания, соответствующие первой собственной частоте, происходят с деформацией растяжения упругих связей и в любой момент времени отношение амплитуд масс постоянно и равно  $\chi_{n1}$ . В другом движении обе массы колеблются с частотой  $13,08 \text{ с}^{-1}$ , а отношение амплитуд масс в любой момент времени равно  $\chi_{n2}$ . Этой частоте соответствует одноузловая собственная форма колебаний с деформациями как растяжения упругих связей, так и их сжатия.

Существование двух частот указывает на неполноту записи принятых обозначений  $x_1$  и  $x_n$  (1.65). Чтобы отразить в общем решении обе гармоники, запишем его в виде ряда Фурье с нечётными гармониками

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ x_n = a_{n1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_{n2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Здесь первый индекс у амплитуды  $a_{ik}$  означает номер массы (координаты), а второй – номер частоты, с которой эта масса колеблется (с которой меняется эта координата).

Амплитуды собственных колебаний зависят от того, каким образом система выведена из состояния покоя или какими начальными условиями можно охарактеризовать поведение системы.

Если в рассматриваемом нами случае (см. рис. 1.23,а) движение системы вызвано мгновенным ударом по массе  $m_n$ , что сообщило этой массе начальную скорость  $\dot{x}_n = v_0$ , то начальные условия запишутся как:

$$\begin{cases} x_1 = 0; & x_n = 0; \\ \dot{x}_1 = 0; & \dot{x}_n = v_0. \end{cases}$$

Используя эти начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \sin(\varphi_1) + a_{12} \sin(\varphi_2) = 0; \\ a_{n1} \sin(\varphi_1) + a_{n2} \sin(\varphi_2) = 0; \\ a_{11} \omega_1 \cos(\varphi_1) + a_{12} \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0; \\ a_{n1} \omega_1 \cos(\varphi_1) + a_{n2} \omega_2 \cos(\varphi_2) = V_0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получим  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

Так как  $a_{n1}/a_{11} = \chi_{n1}$  и  $a_{n2}/a_{12} = \chi_{n2}$ , то

$$\begin{cases} a_{11} \omega_1 + a_{12} \omega_2 = 0; \\ a_{n1} \chi_{n1} \omega_1 + a_{n2} \chi_{n2} \omega_2 = v_0, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\chi_{n1} - \chi_{n2}}; & a_{n1} = \chi_{n1} \cdot a_{11}; \\ a_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\chi_{n2} - \chi_{n1}}; & a_{n2} = \chi_{n2} \cdot a_{12}. \end{cases}$$

Аналогичным образом возможно определять амплитуды вынужденных колебаний масс механической системы при других начальных условиях.

### 3.2 Исследование процессов запуска механической системы

Динамические процессы, происходящие в большинстве механизмов при их запуске, неразрывно связаны со свойствами входящих в него механических систем. Особенности получения динамических моделей механизмов с линейными функциями положения и линейными характеристиками упругих звеньев можно рассмотреть на примере механической системы, представленной на рис. 1.25.

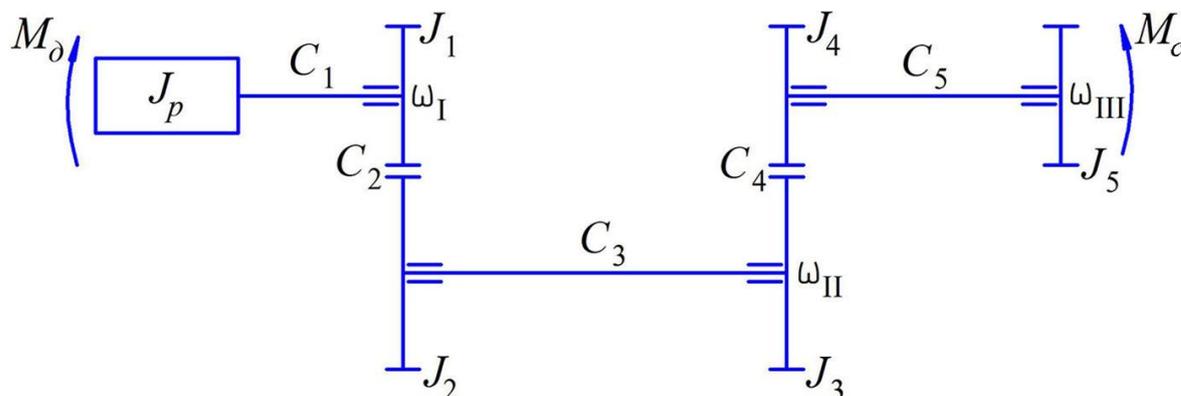


Рис. 1.25 – Кинематическая схема механической системы

Исходные данные для расчёта схемы:

$$\begin{array}{lll}
 J_p=1,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & C_1=1,0 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}; & M_\delta=2,0 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 J_1=2,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & C_2=1,0 \cdot 10^6 \text{ Н/м}; & M_c=1,5 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 J_2=1,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & C_3=2,0 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}; & \omega_1=80 \text{ с}^{-1}; \\
 J_3=2,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & C_4=2,0 \cdot 10^6 \text{ Н/м}; & \omega_2=40 \text{ с}^{-1}; \\
 J_4=1,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; & C_5=4,0 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}; & \omega_3=20 \text{ с}^{-1}; \\
 J_5=2,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. & & 
 \end{array}$$

Здесь моменты инерции ротора двигателя  $J_p$  и исполнительного звена  $J_5$  связаны передаточным механизмом, состоящим из шестерней и колёс зубчатых передач  $J_1$ – $J_4$ , образующих двухступенчатый редуктор. Моменты инерции на рис. 1.25 изображены в виде маховиков с заданным значением момента инерции. Вал двигателя, промежуточный и ведомый валы, связывающие элементы механизма, обозначены индексами *I*, *II*, *III* и имеют круговую жёсткость  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_5$  соответственно. Зубчатые передачи  $J_1$ – $J_2$  и  $J_3$ – $J_4$  имеют в контакте линейную жёсткость  $C_2$  и  $C_4$  соответственно. К механической системе приложены: вращающий момент  $M_\delta$  двигателя, а со стороны исполнительного звена – вращающий момент сопротивления  $M_c$ .

В большинстве случаев упругие элементы передаточного механизма обладают диссипативными свойствами, то есть способностью рассеивать механическую энергию. Зависимость силы сопротивления от скорости может быть достаточно сложной функцией. Коэффициент сопротивления, характеризующий диссипативные свойства, может быть непостоянным. Решение таких задач выходит за рамки данной задачи. Будем рассматривать механическую систему, в которых отсутствуют силы вязкого трения, пропорциональные скорости движения элементов механизма.

За центр приведения принимаем вал двигателя. Рассматриваемая система имеет шесть степеней свободы. В качестве обобщенных координат удобно принять углы поворота ротора двигателя  $\varphi_p$ , зубчатых колёс  $\varphi_1$ – $\varphi_4$  и исполнительного звена  $\varphi_5$ , приведенные к ротору двигателя. Это означает, что эквивалентный вал имеет угловую скорость, равную скорости вала двигателя, то есть  $\omega_I$ .

1. Определим передаточные отношения (1.7) схемы

$$i_{12} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{80}{40} = 2; \quad i_{34} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = \frac{40}{20} = 2,$$

где  $\omega_I$ ,  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{III}$  – угловые скорости соответствующих валов.

2. Найдём крутящий момент на каждом из валов:

- ведущего вала (вала приведения),  $M_I = M_\delta = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;
- промежуточного вала  $M_{II} = M_I \cdot i_{12} = 200 \cdot 2 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;
- ведомого вала  $M_{III} = M_{II} \cdot i_{34} = 400 \cdot 2 = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. По формуле (1.2) определим значения требуемых диаметров валов, округлив полученные значения до ближайшего большего по ГОСТ 2590-88

- ведущего вала  $d_I = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_I}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 200}{20 \cdot 10^6}} = 0,0368 \approx 0,037$  м;
- промежуточного вала  $d_{II} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{II}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 400}{20 \cdot 10^6}} = 0,0464 \approx 0,047$  м;
- ведомого вала  $d_{III} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{III}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 800}{20 \cdot 10^6}} = 0,0585 \approx 0,06$  м.

**4.** Из формулы (1.3) найдём длины соответствующих валов с заданной по заданию круговой жёсткостью  $C_i$  и полярным моментом инерции вала (1.4)

- ведущего вала  $l_I = \frac{\pi \cdot d_I^4 \cdot G}{32 \cdot C_1} = \frac{3,14 \cdot 0,037^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 1 \cdot 10^4} = 1,534$  м;
- промежуточного вала  $l_{II} = \frac{\pi \cdot d_{II}^4 \cdot G}{32 \cdot C_3} = \frac{3,14 \cdot 0,047^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 2 \cdot 10^4} = 1,998$  м;
- ведомого вала  $l_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^4 \cdot G}{32 \cdot C_5} = \frac{3,14 \cdot 0,06^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 4 \cdot 10^4} = 2,653$  м.

**5.** По формуле (1.5) определяем массу:

- ведущего вала

$$m_I = \frac{\pi \cdot d_I^2}{4} \cdot \rho \cdot l_I = \frac{3,14 \cdot 0,037^2}{4} \cdot 7850 \cdot 1,534 = 12,95 \text{ кг};$$

- промежуточного вала

$$m_{II} = \frac{\pi \cdot d_{II}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{II} = \frac{3,14 \cdot 0,047^2}{4} \cdot 7850 \cdot 1,998 = 27,21 \text{ кг};$$

- ведомого вала

$$m_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{III} = \frac{3,14 \cdot 0,06^2}{4} \cdot 7850 \cdot 2,653 = 58,88 \text{ кг}.$$

**6.** Подставляя полученные данные в (1.1), найдём моменты инерции

- ведущего вала  $J_I = \frac{m_I \cdot d_I^2}{K} = \frac{12,95 \cdot 0,037^2}{8} = 2,216 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;
- промежуточного вала  $J_{II} = \frac{m_{II} \cdot d_{II}^2}{K} = \frac{27,21 \cdot 0,047^2}{8} = 7,514 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;
- ведомого вала  $J_{III} = \frac{m_{III} \cdot d_{III}^2}{K} = \frac{58,88 \cdot 0,06^2}{8} = 26,498 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

**7.** Приведение инерционных параметров эквивалентной расчётной схемы осуществляется делением момента инерции приводимой детали на квадрат передаточного отношения между центром приведения и деталью.

При равенстве кинетической энергии до и после приведения согласно выражениям (1.6) имеем

- для моментов инерции ротора двигателя, шестерней редуктора и исполнительного звена:

$$J_p^* = J_p = 0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_1^* = J_1 = 0,02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_2^* = \frac{J_2}{i_{12}^2} = \frac{0,01}{2^2} = 0,0025 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_3^* = \frac{J_3}{i_{12}^2} = \frac{0,02}{2^2} = 0,005 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_4^* = \frac{J_4}{i_{12}^2 \cdot i_{34}^2} = \frac{0,01}{2^2 \cdot 2^2} = 0,000625 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_5^* = \frac{J_5}{i_{12}^2 \cdot i_{34}^2} = \frac{0,02}{2^2 \cdot 2^2} = 0,00125 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

- для валов:

$$J_I^* = J_I = 2,216 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_{II}^* = \frac{J_{II}}{i_{12}^2} = \frac{7,514 \cdot 10^{-3}}{2^2} = 1,879 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_{III}^* = \frac{J_{III}}{i_{12}^2 \cdot i_{34}^2} = \frac{26,498 \cdot 10^{-3}}{2^2 \cdot 2^2} = 1,656 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

**8.** Приведение жесткостей упругих связей сводится к приведению линейных значений жёсткости зубчатых зацеплений  $C_2$  и  $C_4$  к круговой жёсткости вала одной из шестерён данного зубчатого зацепления по формуле (1.11); полученная эквивалентная жёсткость (1.13) приводится к центру приведения по общему правилу (1.9).

**8.1.** Принимаем, что жёсткость  $C_2$  приводится к валу шестерни  $J_1$ , а  $C_4$  – к валу шестерни  $J_3$ , тогда согласно (1.12) определим  $r_1$  – радиус начальной окружности шестерни  $J_1$ , и  $r_3$  – радиус окружности шестерни  $J_3$ .

$$r_1 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_I \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{12} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{12}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot (2 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 2}}}{2} = 0,0451 \text{ м};$$

$$r_3 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{II} \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{34} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{34}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot (2 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 2}}}{2} = 0,0568 \text{ м}.$$

**8.2.** Полученные значения радиуса начальной окружности шестерни подставим в формулу (1.11) для нахождения приведенной к валу круговой жёсткости зубчатого зацепления

$$C_{np1} = C_2 \cdot r_1^2 = 1 \cdot 10^6 \cdot 0,0451^2 = 2,03 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад};$$

$$C_{np2} = C_4 \cdot r_3^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,0568^2 = 6,44 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}.$$

**8.3.** Найдём эквивалентную круговую жёсткость (1.13) связей между моментами инерции  $J_p$  и  $J_1$  с учётом приведённой линейной жёсткости  $C_2$  зубчатого зацепления

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{np1}}; \quad C_1' = \frac{C_1 \cdot C_{np1}}{C_1 + C_{np1}} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 2,03 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^4 + 2,03 \cdot 10^3} = 1,687 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад};$$

то же самое между  $J_2$  и  $J_3$  с учётом линейной жёсткости  $C_4$

$$\frac{1}{C_3'} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{np2}}; \quad C_3' = \frac{C_3 \cdot C_{np2}}{C_3 + C_{np2}} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 6,44 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^4 + 6,44 \cdot 10^3} = 4,873 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}.$$

**8.4.** Приведение жёсткостей связей эквивалентной расчётной схемы осуществляется делением жёсткости приводимого звена на квадрат передаточного отношения между центром приведения и данным звеном (1.9):

$$C_1^* = C_1' = 1,687 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад};$$

$$C_3^* = \frac{C_3'}{i_{12}^2} = \frac{4,873 \cdot 10^3}{2^2} = 1,218 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад};$$

$$C_5^* = \frac{C_5}{i_{12}^2 \cdot i_{34}^2} = \frac{4 \cdot 10^4}{2^2 \cdot 2^2} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}.$$

**9.** Приведение сил. Так как за вал приведения принят вал двигателя, то момент сопротивления на исполнительном звене  $M_c$ , приведенный к валу двигателя, рассчитывается по формуле (1.14)

$$M_c^* = \frac{M_c}{i_{12} \cdot i_{23} \cdot \eta_{mp}} = \frac{150}{2 \cdot 2 \cdot 0,8158} = 46 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где  $\eta_{тр}$  – КПД трансмиссии от массы, к которой приложена сила, до центра приведения, по формуле (1.15)

$$\eta_{mp} = 0,95^2 \cdot 0,98^5 = 0,8158.$$

**10.** Построение эквивалентной расчётной схемы выполним в произвольном масштабе жесткостей упругих связей  $\mu_c = 1 \cdot 10^4 \text{ см}\cdot\text{Н}\cdot\text{м/рад}$ , выбор которого связан с рациональным её размещением на листе бумаги. Приведённые жёсткости связей отложим на эквивалентном валу в виде горизонтальных отрезков расчётной длины

$$l_1^* = \frac{\mu_c}{C_1^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{1,687 \cdot 10^3} = 5,93 \text{ см};$$

$$l_3^* = \frac{\mu_c}{C_2^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{1,218 \cdot 10^3} = 8,21 \text{ см};$$

$$l_5^* = \frac{\mu_c}{C_3^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{2,5 \cdot 10^3} = 4 \text{ см}.$$

Аналогично выберем произвольный масштаб диаграммы масс  $\mu_m = 5 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{кг} \cdot \text{м}^2$  и отложим на отрезке эквивалентного вала соответствующей жёсткости прямоугольник, площадь которого составит

$$S_I^* = J_I^* \cdot \mu_m = 2,216 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 11,08 \text{ см}^2;$$

$$S_{II}^* = J_{II}^* \cdot \mu_m = 1,879 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 9,395 \text{ см}^2;$$

$$S_{III}^* = J_{III}^* \cdot \mu_m = 1,656 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 8,28 \text{ см}^2,$$

откуда найдём высоту каждого из прямоугольников, поделив полученные значения площади масштаба масс на длину соответствующего участка вала, равную

$$h_1^{(J)} = \frac{S_I^*}{l_1^*} = \frac{11,08}{5,93} = 1,87 \text{ см};$$

$$h_3^{(J)} = \frac{S_{II}^*}{l_3^*} = \frac{9,395}{8,21} = 1,14 \text{ см};$$

$$h_5^{(J)} = \frac{S_{III}^*}{l_5^*} = \frac{8,28}{4} = 2,07 \text{ см}.$$

На рис. 1.26 изобразим эквивалентную расчётную схему в принятом масштабе жесткостей упругих связей и моментов инерции.

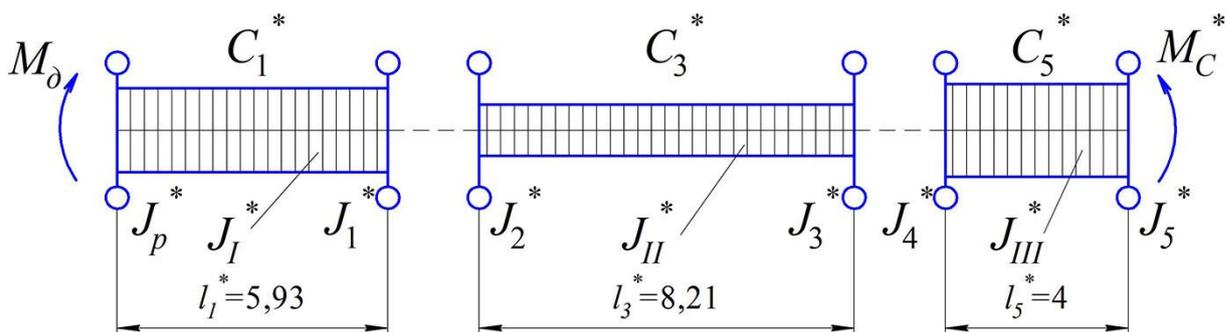


Рис. 1.26 – Эквивалентная расчётная схема при исследовании процесса запуска механической системы

Моменты инерции шестерен показаны на эквивалентном валу в виде маховиков  $J_p, J_{I_{np}}, \dots, J_{5_{np}}$ , моменты инерции валов – в виде прямоугольников  $J_{I_{np}}, J_{II_{np}}, J_{III_{np}}$ . Такое изображение эквивалентной расчетной схемы в виде цепной динамической модели механизма даёт наглядное представле-

ние о распределении масс системы, о соотношении приведенных жесткостей, облегчает решение задачи дальнейшего упрощения.

**11.** Для вычисления частот и форм собственных колебаний необходимо полученную на рис. 1.26 эквивалентную механическую систему преобразовать. Так как линейные жёсткости упругих связей зубчатого зацепления  $C_2$  и  $C_4$  приведены к круговой жёсткости валов  $C_1$  и  $C_3$ , то моменты инерции зубчатых колёс  $J_1$ – $J_2$  и  $J_3$ – $J_4$  можно объединить. Получим четырёхмассную механическую систему с тремя приведёнными жесткостями, исходными данными которой являются следующие значения:

$$\begin{aligned} J_1^{**} = J_p^* &= 0,01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_1^* &= 1687 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\ J_2^{**} = J_1^* + J_2^* &= 0,02 + 0,0025 = 0,0225 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_2^* &= 1218 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\ J_3^{**} = J_3^* + J_4^* &= 0,005 + 0,000625 = 0,005625 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_3^* &= 2500 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\ J_4^{**} = J_5^* &= 0,00125 \text{ кг}\cdot\text{м}^2. \end{aligned}$$

В результате выполнения расчёта по алгоритму (рис. 1.18 – рис. 1.20) получим следующее решение механической системы

1-я частота - Общее вращение вала	2-я частота=414,517 1/с (65,972 Гц)	Формы колебаний:		Амплитуда:	
		Ноль	Ноль		
		+1,0000	+5,819E-06		
		+1,1276	+6,562E-06		
		+0,1539	+8,957E-07		
3-я частота=546,860 1/с (87,035 Гц)	4-я частота=1581,057 1/с (251,633 Гц)	Формы колебаний:		Амплитуда:	
Формы колебаний:	Амплитуда:	Ноль	Ноль	Ноль	Ноль
		+1,0000	+5,819E-06	+1,0000	+5,819E-06
		-0,8697	-5,061E-06	-15,8367	-9,216E-05
		-0,1258	-7,318E-07	+109,5198	+6,373E-04

Выполним графический анализ полученных форм колебаний механической системы, представив его на рис. 1.27.

По результатам выполненных расчётов сделаем заключение о степени работоспособности исследуемой механической системы. Итак, мы получили четырёхчастотное колебательное движение, которое можно рассматривать как сумму четырёх движений.

1. Общему вращению эквивалентного вала соответствует нулевой корень частоты, равный частоте вращения двигателя.
2. В одном движении четыре массы колеблются с одинаковой частотой  $414,5 \text{ с}^{-1}$  (65,97 Гц) и в любой момент времени амплитуды углов кручения участков эквивалентного вала, соответствующих жёсткости  $C_i$  от единичного гармонического крутящего момента указанной частоты постоянны и соответственно равны (1.50) следующим значениям

$$u_1^{(1)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1; \quad u_3^{(1)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 1,1276 \quad \text{и} \quad u_5^{(1)} = \frac{\lambda_5}{\lambda_1} = 0,1539,$$

где  $\lambda_i$  – угол деформации участка вала в данный момент времени  $t$  (1.49).

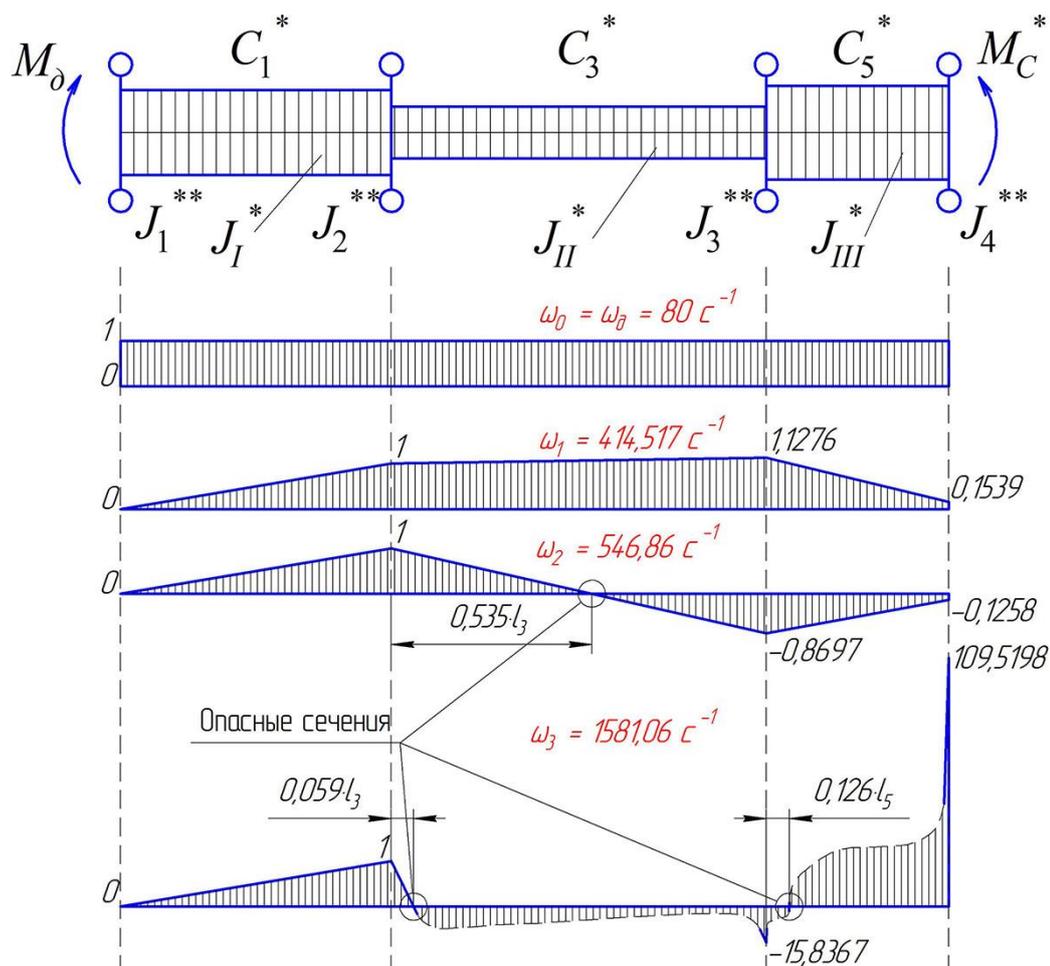


Рис. 1.27 – Графическая интерпретация расчёта частот и форм собственных колебаний исследуемой механической системы

Это движение называют *первой собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала между маховыми массами. Возможна нормальная работа механической системы без ограничений.

3. В другом движении массы колеблются с частотой  $546,86 \text{ c}^{-1}$  (87,04 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала под моментами инерции в любой момент времени  $u_1^{(2)} = 1$ ;  $u_3^{(2)} = -0,8697$  и  $u_5^{(2)} = -0,1258$ . Это движение называют *второй собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала между моментами инерции  $J_p^* - J_1^*$ ; в скручивании вала между массами  $J_2^* - J_3^*$  и деформации вала между массами  $J_4^* - J_5^*$ . При совпадении вынужденной частоты со второй собственной в сечении, расположенном на расстоянии  $0,535l_3^*$  справа от маховой массы  $J_2^*$  происходит смена знака напряжений деформации.
4. Последнее четвёртое движение системы массы осуществляется с *третьей собственной частотой*  $1581,06 \text{ c}^{-1}$  (251,63 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала в любой момент времени  $u_2^{(3)} = 1$ ;  $u_3^{(3)} = -15,8367$  и  $u_5^{(3)} = 109,5198$ . Это движение заключается в деформации вала между моментами инерции  $J_p^* - J_1^*$  и скручивании вала между моментами инерции  $J_2^* - J_3^*$  и  $J_4^* - J_5^*$  на расстоянии соответственно  $0,059l_3^*$  и  $0,126l_5^*$ . Это двухузловая соб-

ственная форма колебаний, здесь дважды напряжения деформированных волокон вала меняют свой знак, причём относительные амплитуды  $u_3^{(3)}$  и  $u_5^{(3)}$  имеют значительную величину. На данной частоте не допускается совпадения вынужденных частот, так как при совпадении этих частот возможен отказ механизма вследствие резонанса, неограниченного увеличения амплитуд колебаний.

### 3.3 Исследование процессов стопорения рабочего органа

Для расчёта на стопорение системы схему задания представим в виде рис. 1.28, она отличается от схемы рис. 1.25 тем, что кинематическая схема механической системы имеет рабочий орган, например, ковш экскаватора. При встрече ковша экскаватора с твёрдым включением (непреодолимым препятствием) начинается процесс деформации ковша, передачи, трансмиссии, а также и препятствия.

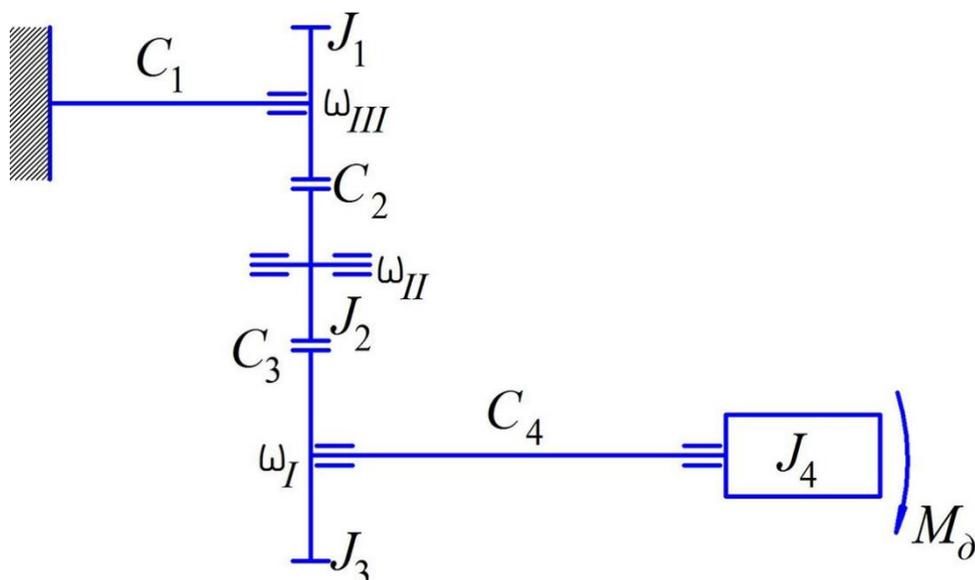


Рис. 1.28 – Кинематическая схема при исследовании процесса стопорения механической системы

Согласно формулы (1.55) препятствие представим участком с определённой приведенной к эквивалентному валу жёсткостью  $C_1$ ; один конец этого участка соединён с сосредоточенной массой  $J_1$  (в данном случае колесом зубчатой передачи) с угловой частотой  $\omega_{III}$ , а другой конец этого же участка изобразим в виде жёсткой заделки. Исходные данные для расчёта схемы:

$J_1=1,3 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_1=0,8 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$M_\delta=2,2 \cdot 10^2$ Н·м;
$J_2=1,8 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_2=1,5 \cdot 10^6$ Н/м;	$\omega_I=90$ с <sup>-1</sup> ;
$J_3=2,2 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_3=1,2 \cdot 10^6$ Н/м;	$\omega_{II}=60$ с <sup>-1</sup> ;
$J_4=2,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_4=1,5 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$\omega_{III}=20$ с <sup>-1</sup> .

1. Определим передаточные отношения (1.7) схемы

$$i_{32} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{90}{60} = 1,5; \quad i_{21} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = \frac{60}{20} = 3,$$

где  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$  – угловые скорости соответствующих валов.

**2.** Найдём крутящий момент на каждом из валов:

- ведущего вала (вала привода),  $M_I = M_0 = 220 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;
- промежуточного вала  $M_{II} = M_I \cdot i_{32} = 220 \cdot 1,5 = 330 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;
- ведомого вала  $M_{III} = M_{II} \cdot i_{21} = 330 \cdot 3 = 990 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

**3.** По формуле (1.2) определим значения требуемых диаметров валов, округлив полученные значения до ближайшего большего по ГОСТ 2590-88

- ведущего вала  $d_I = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_I}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 220}{20 \cdot 10^6}} = 0,03803 \approx 0,039 \text{ м}$ ;
- промежуточного вала  $d_{II} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{II}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 330}{20 \cdot 10^6}} = 0,0435 \approx 0,044 \text{ м}$ ;
- ведомого вала  $d_{III} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{III}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 990}{20 \cdot 10^6}} = 0,0628 \approx 0,063 \text{ м}$ .

**4.** Из формулы (1.3) найдём длины соответствующих валов с заданной по заданию круговой жёсткостью  $C_i$  и полярным моментом инерции вала (1.4). В связи с тем, что вал II представляет собой ось вращения, то его длина  $l_{II} = 0 \text{ м}$ , тогда

- ведущего вала  $l_I = \frac{\pi \cdot d_I^4 \cdot G}{32 \cdot C_4} = \frac{3,14 \cdot 0,039^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 1,5 \cdot 10^4} = 1,263 \text{ м}$ ;
- ведомого вала  $l_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^4 \cdot G}{32 \cdot C_1} = \frac{3,14 \cdot 0,063^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 0,8 \cdot 10^4} = 16,123 \text{ м}$ .

**5.** По формуле (1.5) определяем массу каждого из валов

- ведущего вала

$$m_I = \frac{\pi \cdot d_I^2}{4} \cdot \rho \cdot l_I = \frac{3,14 \cdot 0,039^2}{4} \cdot 7850 \cdot 1,263 = 11,84 \text{ кг};$$

- ведомого вала

$$m_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{III} = \frac{3,14 \cdot 0,063^2}{4} \cdot 7850 \cdot 16,123 = 394,54 \text{ кг}.$$

**6.** Подставляя полученные данные в (1.1), выведем значение моментов инерции соответствующего вала

- ведущего вала  $J_I = \frac{m_I \cdot d_I^2}{K} = \frac{11,84 \cdot 0,039^2}{8} = 2,251 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;

– ведомого вала  $J_{III} = \frac{m_{III} \cdot d_{III}^2}{K} = \frac{394,54 \cdot 0,063^2}{8} = 195,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

**7.** В результате расчёта получим следующие значения приведенных к валу двигателя моментов инерции

– для моментов инерции ротора двигателя, шестерней редуктора и исполнительного звена:

$$J_4^* = J_4 = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_3^* = J_3 = 0,022 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_2^* = \frac{J_2}{i_{32}^2} = \frac{0,018}{1,5^2} = 0,008 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_1^* = \frac{J_1}{i_{32}^2 \cdot i_{21}^2} = \frac{0,013}{1,5^2 \cdot 3^2} = 0,000642 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

– для валов:

$$J_I^* = J_I = 2,251 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{III}^* = \frac{J_{III}}{i_{32}^2 \cdot i_{21}^2} = \frac{195,7 \cdot 10^{-3}}{1,5^2 \cdot 3^2} = 9,664 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

**8.** Приведение жесткостей упругих связей сводится к приведению линейных значений жёсткости зубчатых зацеплений  $C_2$  и  $C_3$  к круговой жёсткости вала одной из шестерён данного зубчатого зацепления по формуле (1.11); полученная эквивалентная жёсткость (1.13) приводится к центру приведения по общему правилу (1.9).

**8.1.** Принимаем, что жёсткость  $C_2$  приводится к валу шестерни  $J_1$ , а  $C_3$  – к валу шестерни  $J_3$ , тогда согласно (1.12) определим  $r_1$  – радиус начальной окружности шестерни  $J_1$ , и  $r_3$  – радиус начальной окружности шестерни  $J_3$ .

$$r_1 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{III} \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{21} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{21}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{990 \cdot 1 \cdot (3 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 3}}}{2} = 0,0738 \text{ м};$$

$$r_3 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_I \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{32} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{32}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{220 \cdot 1 \cdot (1,5 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 1,5}}}{2} = 0,0482 \text{ м}.$$

**8.2.** Полученные значения радиуса начальной окружности шестерни подставим в формулу (1.11) для нахождения приведенной к валу круговой жёсткости зубчатого зацепления

$$C_{np1} = C_2 \cdot r_1^2 = 1,5 \cdot 10^6 \cdot 0,0738^2 = 8,17 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад};$$

$$C_{np2} = C_3 \cdot r_3^2 = 1,2 \cdot 10^6 \cdot 0,0482^2 = 2,78 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}.$$

**8.3.** Найдём эквивалентную круговую жёсткость (1.13) связей между жёсткой заделкой и моментом инерции  $J_1$  с учётом приведённой линейной жёсткости  $C_2$  зубчатого зацепления

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{np1}}; \quad C_1' = \frac{C_1 \cdot C_{np1}}{C_1 + C_{np1}} = \frac{0,8 \cdot 10^4 \cdot 8,17 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^4 + 8,17 \cdot 10^3} = 4,043 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад};$$

то же самое между  $J_3$  и  $J_4$  с учётом линейной жёсткости  $C_3$

$$\frac{1}{C_4'} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{np2}}; \quad C_4' = \frac{C_4 \cdot C_{np2}}{C_4 + C_{np2}} = \frac{1,5 \cdot 10^4 \cdot 2,78 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^4 + 2,78 \cdot 10^3} = 2,349 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}.$$

**8.4.** Приведение жесткостей связей (1.9) эквивалентной расчётной схемы осуществляется делением жёсткости приводимого звена на квадрат передаточного отношения между центром приведения и данным звеном:

$$C_4^* = C_4 = 2,349 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад};$$

$$C_1^* = \frac{C_1'}{i_{21}^2 \cdot i_{32}^2} = \frac{4,043 \cdot 10^3}{3^2 \cdot 1,5^2} = 0,1997 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}.$$

**9.** Приведение сил. Так как за вал приведения принят вал двигателя, а в качестве момента сопротивления на рабочем органе  $M_c$  является жёсткая заделка, то приведения сил не требуется, так как  $M_c = \infty$ .

**10.** Построение эквивалентной расчётной схемы выполним в произвольном масштабе жесткостей упругих связей  $\mu_c = 1 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{Н} \cdot \text{м/рад}$ , выбор которого связан с рациональным размещением расчётной схемы на листе бумаги. Приведённые жёсткости связей отложим на эквивалентном валу в виде горизонтальных отрезков расчётной длины

$$l_4^* = \frac{\mu_c}{C_4^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{2,349 \cdot 10^3} = 4,26 \text{ см};$$

$$l_1^* = \frac{\mu_c}{C_1^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{0,1997 \cdot 10^3} = 50,08 \text{ см}.$$

Аналогично выберем произвольный масштаб диаграммы масс  $\mu_m = 5 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{кг} \cdot \text{м}^2$  и отложим на отрезке эквивалентного вала соответствующей жёсткости прямоугольник, площадь которого составит

$$S_I^* = J_I^* \cdot \mu_m = 2,251 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 11,26 \text{ см}^2;$$

$$S_{III}^* = J_{III}^* \cdot \mu_m = 9,664 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 48,32 \text{ см}^2,$$

откуда найдём высоту каждого из прямоугольников, поделив полученные значения площади масштаба масс на длину соответствующего участка вала

$$h_1^{(J)} = \frac{S_I^*}{l_4^*} = \frac{11,26}{4,26} = 2,64 \text{ см};$$

$$h_3^{(J)} = \frac{S_{III}^*}{l_1^*} = \frac{48,32}{50,08} = 0,96 \text{ см}.$$

На рис. 1.29 изобразим эквивалентную расчётную схему в принятом масштабе жесткостей упругих связей и моментов инерции. Моменты инерции шестерней покажем на эквивалентном валу в виде маховиков  $J_1^*$ , ...,  $J_4^*$ , моменты инерции валов – в виде прямоугольников  $J_{III}^*$ ,  $J_I^*$ .

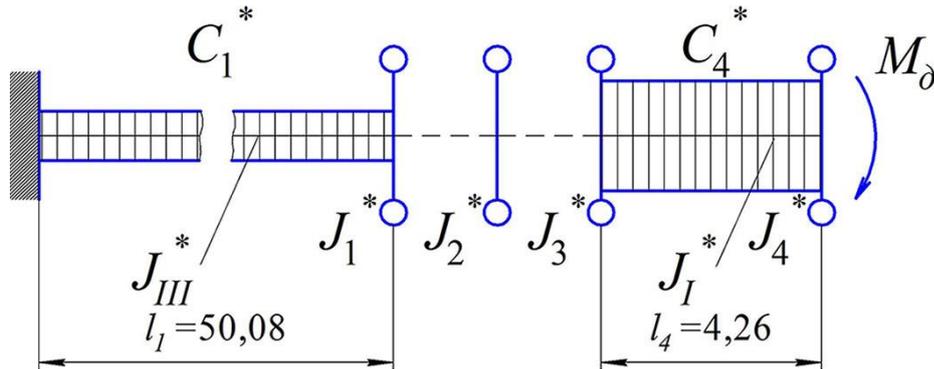


Рис. 1.29 – Эквивалентная расчётная схема при исследовании процесса стопорения рабочего органа механической системы

**11.** Для вычисления частот и форм собственных колебаний полученную на рис. 1.29 эквивалентную механическую систему преобразуем. Так как линейные жёсткости упругих связей зубчатого зацепления  $C_2$  и  $C_3$  приведены к круговой жёсткости валов  $C_1$  и  $C_4$ , то моменты инерции зубчатых колёс  $J_1$ – $J_3$  можно объединить. Получим двухмассную механическую систему с двумя приведёнными жесткостями, исходными данными которой являются следующие значения:

$$J_1^{**} = J_4^* = 0,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$C_4^* = 2349 \text{ Н} \cdot \text{м/рад};$$

$$J_2^{**} = J_1^* + J_2^* + J_3^* =$$

$$C_1^* = 199,7 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}.$$

$$= 0,000642 + 0,008 + 0,022 = 0,030642 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

В результате вычислений получим решение

1-я частота - Общее вращение вала

2-я частота=62,376 1/с (9,927 Гц)

Формы колебаний:

Амплитуда:

Ноль	Ноль
+0,3332	+8,563E-05
Ноль	Ноль

3-я частота=443,538 1/с (70,591 Гц)

Формы колебаний:

Амплитуда:

Ноль	Ноль
+1,0092	+2,594E-04
Ноль	Ноль

Выполним графический анализ полученных форм колебаний механической системы, представив его на рис. 1.30.

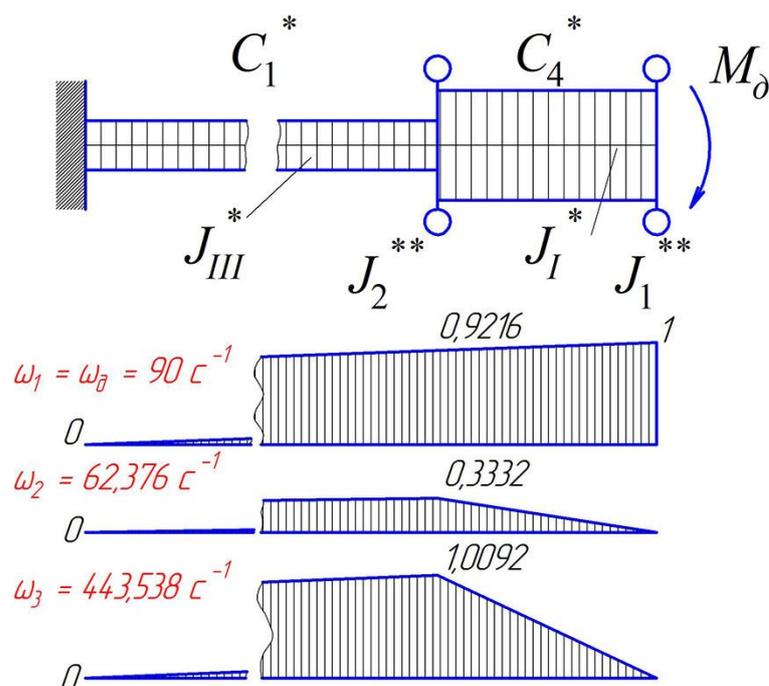


Рис. 1.30 – Графическая интерпретация расчёта частот и форм собственных колебаний исследуемой механической системы

По результатам выполненных расчётов сделаем заключение о степени работоспособности исследуемой механической системы. Итак, мы получили трёхчастотное колебательное движение, которое можно рассматривать как сумму трёх движений.

1. Общему вращению эквивалентного вала соответствует нулевой корень частоты, равный частоте вращения двигателя; так как рассматривается случай стопорения рабочего органа, то согласно закону Гука амплитуды относительных колебаний линейно убывают от точки приложения крутящего момента  $M_d$  к точке стопорения рабочего органа.
2. В одном движении две массы колеблются с частотой  $62,4 \text{ с}^{-1}$  (9,93 Гц) и в любой момент времени амплитуды углов кручения участков эквивалентного вала, соответствующих жёсткости  $C_i$  от единичного гармонического крутящего момента указанной частоты постоянны и соответственно равны (1.50)  $u_3^{(1)} = 0,3332$ . Это движение называют *первой собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала между маховыми массами. Возможна нормальная работа механической системы без ограничений.
3. В другом движении массы колеблются с частотой  $443,5 \text{ с}^{-1}$  (70,6 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала под моментами инерции в любой момент времени  $u_3^{(2)} = 1,0092$ . Это движение называют *второй собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала.

Таким образом при встрече рабочего органа с непреодолимым препятствием данной механической системы на обоих частотных режимах значительных перегрузок трансмиссии не будет.

### 3.4 Исследование процессов грузоподъёмного механизма

Составление эквивалентного вала при расчёте грузоподъёмного механизма, схема задания которого представлена на рис. 1.31, выполняется аналогично ранее рассмотренным схемам. Отличие лишь в том, что дополнительно требуется поступательно движущуюся массу груза  $m$  и линейную жёсткость каната  $E_k$  привести к вращающемуся валу, принятому за центр приведения. Исходные данные для расчёта схемы:

$J_p=2,5 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_1=1,0 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$M_\delta=3,0 \cdot 10^2$ Н·м;
$J_1=2,5 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_2=2,0 \cdot 10^6$ Н/м;	$m=4,0 \cdot 10^3$ кг;
$J_2=3,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_3=1,5 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$E_k=1,0 \cdot 10^6$ Н;
$J_3=2,2 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_4=1,0 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$l_k=4,5$ м;
$J_4=2,0 \cdot 10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup> ;	$C_5=1,9 \cdot 10^6$ Н/м;	$\omega_1=80$ рад/с;
$J_5=1,5 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с <sup>2</sup> ;	$C_6=2,4 \cdot 10^4$ Н·м/рад;	$\omega_2=140$ рад/с;
$J_6=2,0 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с <sup>2</sup> ;		$\omega_3=30$ рад/с;

Режим работы грузоподъёмного механизма – М5.

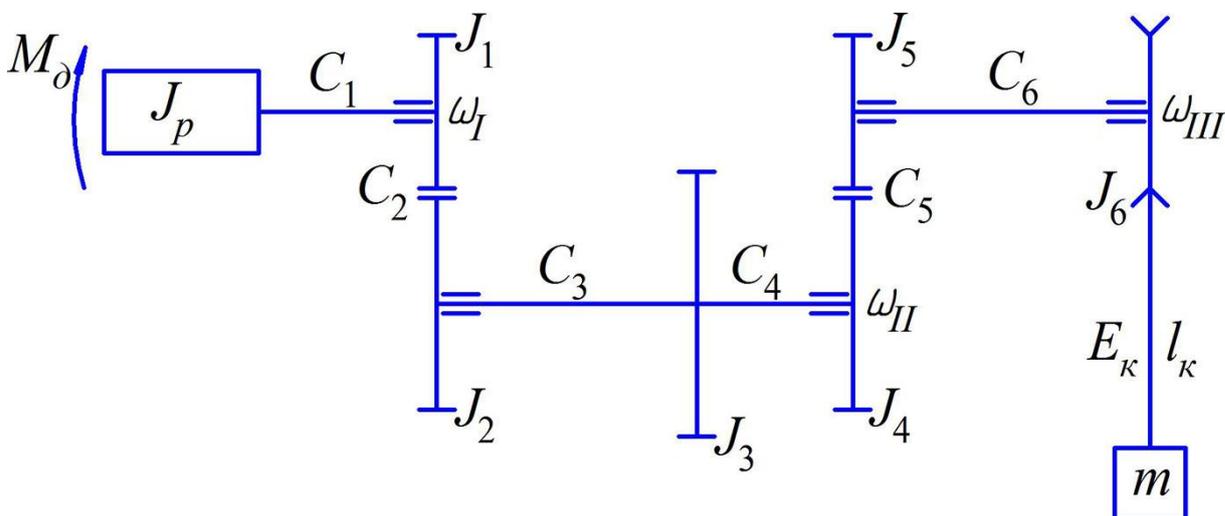


Рис. 1.31 – Кинематическая схема при исследовании запуска грузоподъёмного механизма

Сначала для заданной по заданию массы поднимаемого груза  $m$  подберём подходящий грузоподъёмный механизм, а затем приведём кинематическую схему к расчётной схеме эквивалентного вала и определим его частоты и формы собственных колебаний.

#### 1. Выбор крюковой подвески.

Для заданных значений грузоподъёмности крюковой подвески 4 тонны и режима работы М5 по ОСТ 24.191.08–81 [5] выбираем подвеску крюковую крановую типоразмера 1–5–406 (табл. 1.8, рис. 1.32), имеющую следующие параметры:

- грузоподъёмность  $Q_n = 5$  т,
- режим работы М1...М6,
- число блоков  $Z_n = 1$ ,
- диаметр блоков по дну канавок  $D_{\delta, n0} = 406$  мм,
- масса подвески  $m_n = 70,6$  кг.

Табл. 1.8 – Подвески крюковые крановые ОСТ 24.191.08–81

Типоразмер по стандарту	Размеры, мм														$m_n$ , кг	$Q$ , т	Режим	Диаметр каната $d_k$ , мм
	$D$	$d$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$B$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$H$	$H_1$	$H_2$	$L$	$L_1$				
1-3, 2-336	336	55	100	M33	28	138	90	8		666	106	285	110	440	36,4	3,2	M1-M6	11-14
1-3, 2-406	406			M36	32					772	114	330		520	47,8		M7	
1-3, 2-500	500			M36	32					872		380		620	61,8		M8	
1-5-406	406			M42						840	143	355		520	70,6		M1-M6	14-17
1-5-500	500	90	140	M48	70	148	96			987	162	420	180	620	90,2		M7	
1-5-610	610			M48						1117		485		750	120,0		M8	14-18
2-5-336	336			M42						766	143	320		440	61,3	5,0	M1-M6	11-14
2-5-406	406	55	100	M48	55	170	118	56		887	162	370	110	520	84,9		M7	
2-5-500	500									987		420		620	107		M8	
2-8-406	406			M52						940	182	390		520	116		M1-M6	14-17
2-8-500	500				70					1079		440		620	157	8,0	M7	
2-8-610	610	90	140	M56		190	130	126	62	1207	202	505	180	750	213		M8	14-18
2-10-406	406									977		390		520	129		M1-M6	14-17
2-10-500	500									1172	242	475		620	180	10	M7	
2-10-610	610			M64	90					1302		540		750	285		M8	14-18

## 2. Выбор каната.

В конструкции грузоподъемного механизма используем, например, *подвижный блок для выигрыша в силе*, максимальное статическое усилие  $S_{max}$  в канате которого определяют по формуле:

$$S_{max} = \frac{Q}{z \cdot \eta}, \quad (1.70)$$

где  $Q$  – вес номинального груза и крюковой подвески, Н

$$Q = (m_{cp} + m_n) \cdot g; \quad (1.71)$$

$m_{cp}$  – масса поднимаемого груза, кг;

$m_n$  – масса выбранной подвески, кг;

$g$  – ускорение свободного падения груза, м/с<sup>2</sup>;

$z$  – количество несущих ветвей,  $z = 2$ ;

$\eta$  – коэффициент полезного действия, для подвижного блока в выигрыше в силе

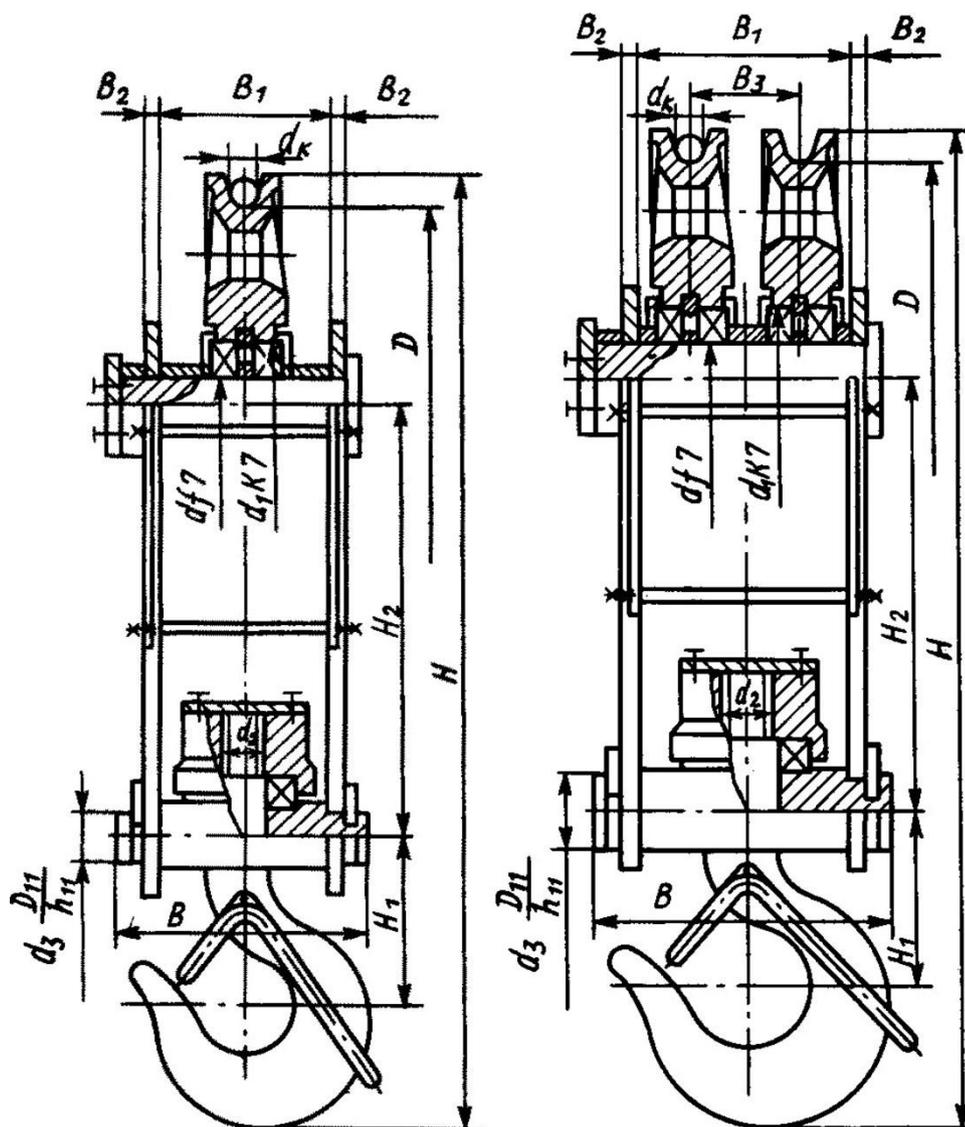


Рис. 1.32 – Подвеска крюковая крановая для грузоподъёмности 3,2...10 т (ОСТ 24.191.08–81): 1 – с одним блоком; 2 – с двумя блоками

$$\eta = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon};$$

$\varepsilon$  – коэффициент сопротивления блока вращению, для подшипников качения  $\varepsilon=1,02$ .

Считая, что на крюке максимальный вес, согласно (1.71) определим вес номинального груза и крюковой подвески

$$Q = (4,0 \cdot 10^3 + 70,6) \cdot 9,81 = 39933 \text{ Н}$$

и максимальное статическое усилие в канате по формуле (1.70)

$$S_{\max} = \frac{39933 \cdot 2 \cdot 1,02}{2 \cdot (1,02 + 1)} = 20164 \text{ Н.}$$

По найденному максимальному натяжению в канате  $S_{\max}$ , поступающему на барабан, выбираем канат по условию разрыва каната в целом

$$S_{\max} \cdot K \leq S_{\text{разр}}, \quad (1.72)$$

где  $S_{\text{разр}}$  – разрывное усилие каната в целом, Н;

$K$  – коэффициент использования, обеспечивающий безопасность эксплуатации в период предусмотренного срока работы.

Так как в настоящее время действует стандарт ИСО 4301/1, регламентирующий режимы работы грузоподъемных механизмов, Правила Госгортехнадзора и ГОСТ 25835-83, то для их сопоставления и нахождения значения коэффициента использования каната используют табл. 1.9.

Табл. 1.9 – Коэффициент использования каната  $K$

Режим работы по Правилам ГТН		Р			Л		С	Т	ВТ
Группа режима работы механизма	ГОСТ 25835-83	1М			2М, 3М		4М	5М	6М
	ИСО 4301/1	М1	М2	М3	М4	М5	М6	М7	М8
Коэффициент использования каната $K$	ГОСТ 25835-83	4,0			5,0		5,5	6,0	
	ИСО 4301/1	3,15	3,35	3,55	4,0	4,5	5,6	7,1	9,0

Определяем разрывное усилие каната

$$S_{\text{разр}} = 20164 \cdot 4,5 = 90738 \text{ Н.}$$

На грузоподъемных машинах общего назначения при однослойной навивке на барабан по табл. 1.10 принимаем следующий тип шестипрядных стальных канатов двойной свивки (рис. 1.33) с одним органическим сердечником: ЛК-Р6х19(1+6+6/6)+1о.с. ГОСТ 2688-80.

Табл. 1.10 – Канат двойной свивки типа ЛК – Р конструкции 6 х 19 (1 + 6 + 6/6) + 1 о.с. ГОСТ 2688-80

Диаметр каната, мм	Расчетная площадь проволоки, мм	Ориентировочная масса 1000м смазанного каната, кг	Маркировочная группа, МПа						
			1372	1470	1578	1666	1764	1862	1960
			Разрывное усилие каната в целом, кН, не менее						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9,9	36,66	358,6	—	—	48,85	51,85	53,45	55,95	58,85
11,0	47,19	461,6	—	—	62,85	66,75	68,80	72,00	75,15
12,0	53,87	527,0	—	—	71,75	76,20	78,55	81,90	85,75
13,0	61,00	596,6	71,05	76,19	81,25	86,30	89,00	92,80	97,00
14,0	74,40	728,0	86,70	92,85	98,95	105,00	108,00	112,50	118,00
15,0	86,28	844,0	100,00	107,00	114,50	122,00	125,50	131,00	137,00
16,5	104,61	1025,0	121,50	130,00	139,00	147,50	152,00	159,00	166,00
18,0	124,73	1220,0	145,00	155,00	166,00	176,00	181,50	189,50	198,00
19,5	143,61	1405,0	167,00	179,50	191,00	203,00	209,00	218,50	228,00
21,0	167,03	1635,0	194,50	208,00	222,00	236,00			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22,5	188,78	1850,1	220,00	235,50	251,00	267,00			
24,0	215,49	2110,0	250,50	269,00	287,00	304,50			
25,5	244,00	2390,0	284,00	304,50	324,50	345,00			
27,0	274,31	2685,0	319,00	342,00	365,00	388,00			
28,0	297,63	2910,0	346,50	371,00	396,00	421,00			
30,5	356,72	3490,0	415,50	445,50					
32,0	393,06	3845,0	458,00	490,50					
33,5	431,18	4220,0	502,50	538,50					
37,0	512,79	5015,0	597,50	640,50					

По условию (1.72) выбираем типоразмер каната двойной свивки

Канат 14,0-Г-В-Л-О-Н-1470 ГОСТ 2688-80,

где  $S_k = 92,85$  кН;  $d_k = 14,0$  мм;  $F_k = 74,4$  мм<sup>2</sup>; назначение каната – грузо-  
вое; маркировка проволоки – высшая; маркировочная группа – 1470 МПа;  
режим работы – М4-М5; вид покрытия проволоки – оцинкованная для  
среднеагрессивных условий работы; сочетание направлений свивки эле-  
ментов – одностороннее; способ свивки каната – нераскручивающийся;  
направление свивки каната для одной половины полиспаста – правое, для  
другой – левое.

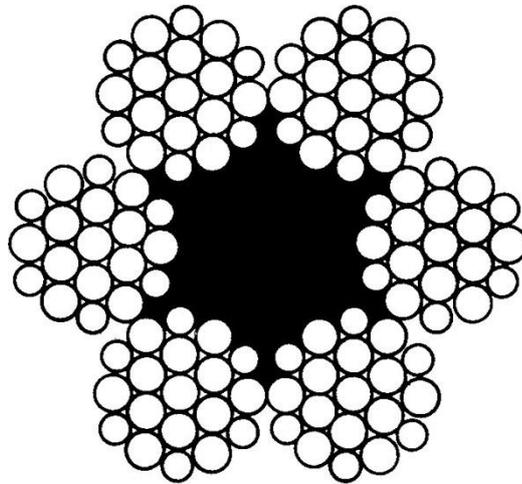


Рис. 1.33 – Канат двойной свивки типа ЛК-Р

Определяем фактический запас прочности каната

$$k_{зан} = \frac{S_k}{S_{max}} = \frac{92,85 \cdot 10^3}{20164} = 4,605 > [K] = 4,5.$$

**3. Проверка перегиба каната на блоках подвески [5].**

Выбранный тип каната должен удовлетворять следующему условию соотношения между диаметром выбранного каната и диаметром блока крюковой подвески

$$D_{бл} = D_{бл0} + d_k \geq d_k \cdot h_{рб}, \quad (1.73)$$

где  $D_{бл}$  – диаметр блока, измеряемый по средней линии навитого каната;

$D_{\text{бл}0}$  – диаметр блока по дну канавки;

$d_k$  – диаметр каната;

$h_{\text{рб}}$  – коэффициент отношения диаметра рабочего блока к диаметру каната, регламентируемый нормами ИСО 4301/1-86 [4] и зависящий от группы режима работы (табл. 1.11).

Табл. 1.11 – Коэффициент отношения диаметров рабочего блока  $h_{\text{рб}}$ , уравнительного блока  $h_{\text{уб}}$  и барабана  $h_{\text{б}}$  к диаметру каната

Режим работы по правилам госгортехнадзора	ГОСТ 25835		ИСО 4301/1			
	Группа режима работы	Коэффициент выбора диаметра $h$	Группа режима работы	Коэффициент выбора диаметра		
				$h_{\text{рб}}$	$h_{\text{уб}}$	$h_{\text{б}}$
Ручной	1М	18,0	М1	12,5	11,2	11,2
			М2	14,0	12,5	12,5
			М3	16,0	12,5	14,0
Лёгкий	2М	20,0	М4	18,0	14,0	16,0
	3М		М5	20,0	14,0	18,0
Средний	4М	25,0	М6	22,4	16,0	20,0
Тяжёлый	5М	30,0	М7	25,0	16,0	22,4
Весьма тяжёлый	6М	35,0	М8	28,0	18,0	25,0

По табл. 1.11 для группы режима работы М5 найдём значение  $h_{\text{рб}} = 20$  и определим значение  $d_k \cdot h_{\text{рб}} = 14,0 \cdot 20 = 280$  мм. Найдём по формуле (1.73) диаметр блока, измеряемый по средней линии навитого каната, который составит  $D_{\text{бл}} = D_{\text{бл}0} + d_k = 406 + 14 = 420$  мм. Тогда получим  $D_{\text{бл}} > d_k \cdot h_{\text{рб}}$ , следовательно, условие проверки выполняется.

Если соотношение (1.73) не выполняется, то нужно выбрать канат другого диаметра с соблюдением условия (1.72). При этом можно изменить маркировочную группу или принять другой тип каната. Если условие (1.72) продолжает не выполняться, можно принять крюковую подвеску с большим числом блоков, что приведёт к изменению кратности полиспаста, уменьшению усилия и диаметра каната. Можно не изменять число блоков в крюковой подвеске, а увеличивать их диаметр, но при этом потребуется спроектировать специальную подвеску.

#### 4. Определение радиуса барабана грузоподъёмного механизма.

Согласно рекомендациям ИСО 4301/1 [4] диаметр барабана определяется исходя из его соотношения к диаметру каната по табл. 1.11, следовательно

$$D_{\text{б}} = d_k \cdot h_{\text{б}} = 14 \cdot 18 = 252 \text{ мм},$$

откуда  $r_{\text{б}} = 0,126$  м.

**5.** Вычисление приведенного момента инерции поступательно движущейся массы.

Зная радиус барабана грузоподъемного механизма, теперь мы можем по формуле (1.8) определить значение приведенное к валу барабана значение момента инерции

$$J_m = m \cdot r_o^2 = (4,0 \cdot 10^3 + 70,6) \cdot 0,126^2 = 64,625 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

где  $m$  – масса поднимаемого груза и крюковой подвески, кг;

$r_o$  – радиус барабана грузоподъемного механизма, м.

**6.** Согласно формулы (1.10) определим приведение линейной жёсткости каната к валу барабана

$$C_\kappa = \frac{E_\kappa \cdot r_o^2}{l_\kappa} = \frac{1,0 \cdot 10^6 \cdot 0,126^2}{4,5} = 3528 \text{ Н} \cdot \text{м/рад},$$

где  $E_\kappa$  – погонная жёсткость каната, Н;

$r_o$  – радиус барабана грузоподъемного механизма, м;

$l_\kappa$  – длина каната, м.

**7.** Определим передаточные отношения (1.7) схемы.

$$i_{12} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{80}{140} = 0,5714; \quad i_{45} = \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = \frac{140}{30} = 4,6667,$$

где  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$  – угловые скорости соответствующих валов.

**8.** Найдём крутящий момент на каждом из валов:

– ведущего вала (вала приведения),  $M_I = M_o = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– промежуточного вала  $M_{II} = M_I \cdot i_{12} = 300 \cdot 0,5714 = 171,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– ведомого вала  $M_{III} = M_{II} \cdot i_{34} = 171,4 \cdot 4,6667 = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**9.** По формуле (1.2) определим значения требуемых диаметров валов, округлив полученные значения до ближайшего большего по ГОСТ 2590-88

– ведущего вала  $d_I = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_I}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 300}{20 \cdot 10^6}} = 0,0422 \approx 0,043 \text{ м}$ ;

– промежуточного вала  $d_{II} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{II}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 171,4}{20 \cdot 10^6}} = 0,0349 \approx 0,035 \text{ м}$ ;

– ведомого вала  $d_{III} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_{III}}{[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 800}{20 \cdot 10^6}} = 0,0585 \approx 0,06 \text{ м}$ .

**10.** Из формулы (1.3) найдём длины соответствующих валов с заданной по заданию круговой жёсткостью  $C_i$  и полярным моментом инерции вала (1.4)

- ведущего вала  $l_I = \frac{\pi \cdot d_I^4 \cdot G}{32 \cdot C_1} = \frac{3,14 \cdot 0,043^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 1 \cdot 10^4} = 2,799 \text{ м};$
- промежуточного вала  $l_{II-3} = \frac{\pi \cdot d_{II}^4 \cdot G}{32 \cdot C_3} = \frac{3,14 \cdot 0,035^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 1,5 \cdot 10^4} = 0,819 \text{ м};$
- $l_{II-4} = \frac{\pi \cdot d_{II}^4 \cdot G}{32 \cdot C_4} = \frac{3,14 \cdot 0,035^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 1,0 \cdot 10^4} = 1,229 \text{ м};$
- ведомого вала  $l_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^4 \cdot G}{32 \cdot C_6} = \frac{3,14 \cdot 0,06^4 \cdot 8,34 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 2,4 \cdot 10^4} = 4,421 \text{ м}.$

**11.** По формуле (1.5) определяем массу

- ведущего вала

$$m_I = \frac{\pi \cdot d_I^2}{4} \cdot \rho \cdot l_I = \frac{3,14 \cdot 0,043^2}{4} \cdot 7850 \cdot 2,799 = 31,91 \text{ кг};$$

- промежуточных валов

$$m_{II-3} = \frac{\pi \cdot d_{II}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{II-3} = \frac{3,14 \cdot 0,035^2}{4} \cdot 7850 \cdot 0,819 = 6,19 \text{ кг};$$

$$m_{II-4} = \frac{\pi \cdot d_{II}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{II-4} = \frac{3,14 \cdot 0,035^2}{4} \cdot 7850 \cdot 2,229 = 9,28 \text{ кг};$$

- ведомого вала

$$m_{III} = \frac{\pi \cdot d_{III}^2}{4} \cdot \rho \cdot l_{III} = \frac{3,14 \cdot 0,06^2}{4} \cdot 7850 \cdot 4,421 = 98,13 \text{ кг}.$$

**12.** Подставляя полученные данные в (1.1), выведем значение моментов инерции соответствующего вала

- ведущего вала  $J_I = \frac{m_I \cdot d_I^2}{K} = \frac{31,91 \cdot 0,043^2}{8} = 7,375 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$
- промежуточного вала  $J_{II-3} = \frac{m_{II-3} \cdot d_{II}^2}{K} = \frac{6,19 \cdot 0,035^2}{8} = 0,947 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$
- $J_{II-4} = \frac{m_{II-4} \cdot d_{II}^2}{K} = \frac{9,28 \cdot 0,035^2}{8} = 1,421 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$
- ведомого вала  $J_{III} = \frac{m_{III} \cdot d_{III}^2}{K} = \frac{98,13 \cdot 0,06^2}{8} = 44,156 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$

**13.** Приведение масс эквивалентной расчётной схемы осуществляется делением момента инерции приводимой детали на квадрат передаточного отношения между центром приведения и деталью. При равенстве кинетической энергии до и после приведения согласно выражениям (1.6) имеем

- для моментов инерции ротора двигателя, шестерней редуктора и исполнительного звена:

$$J_p^* = J_p = 0,025 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_1^* = J_1 = 0,025 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_2^* = \frac{J_2}{i_{12}^2} = \frac{0,03}{0,5714^2} = 0,09188 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_3^* = \frac{J_3}{i_{12}^2} = \frac{0,022}{0,5714^2} = 0,06738 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_4^* = \frac{J_4}{i_{12}^2} = \frac{0,02}{0,5714^2} = 0,06126 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_5^* = \frac{J_5}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{0,015}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 0,00211 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_6^* = \frac{J_6}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{0,02}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 0,00281 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_m^* = \frac{J_m}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{64,625}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 9,0887 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

- для валов:

$$J_I^* = J_I = 7,375 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_{II-3}^* = \frac{J_{II-3}}{i_{12}^2} = \frac{0,947 \cdot 10^{-3}}{0,5714^2} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_{II-4}^* = \frac{J_{II-4}}{i_{12}^2} = \frac{1,421 \cdot 10^{-3}}{0,5714^2} = 4,352 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_{III}^* = \frac{J_{III}}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{44,156 \cdot 10^{-3}}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 6,21 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

**14.** Приведение жесткостей упругих связей сводится к приведению линейных значений жёсткости зубчатых зацеплений  $C_2$  и  $C_5$  к круговой жёсткости вала одной из шестерён данного зубчатого зацепления по формуле (1.11); полученная эквивалентная жёсткость (1.13) приводится к центру приведения по общему правилу (1.9).

**14.1.** Принимаем, что жёсткость  $C_2$  приводится к валу шестерни  $J_1$ , а  $C_5$  – к валу шестерни  $J_4$ , тогда согласно (1.12) определим  $r_1$  – радиус начальной окружности шестерни  $J_1$ , и  $r_4$  – радиус начальной окружности шестерни  $J_4$ .

$$r_1 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_I \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{12} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{12}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{200 \cdot 1 \cdot (0,5714 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 0,5714}}}{2} = 0,0631 \text{ м};$$

$$r_4 = \frac{K_d \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{II} \cdot K_{H\beta} \cdot (i_{45} + 1)}{\Psi_{bd} \cdot [\sigma_H]^2 \cdot i_{45}}}}{2} = \frac{0,77 \cdot \sqrt[3]{\frac{171,4 \cdot 1 \cdot (4,6667 + 1)}{0,3 \cdot 790^2 \cdot 4,6667}}}{2} = 0,0399 \text{ м.}$$

**14.2.** Полученные значения радиуса начальной окружности шестерни подставим в формулу (1.11) для нахождения приведенной к валу круговой жёсткости зубчатого зацепления

$$C_{np1} = C_2 \cdot r_1^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,0631^2 = 7963 \text{ Н·м/рад};$$

$$C_{np2} = C_5 \cdot r_4^2 = 1,9 \cdot 10^6 \cdot 0,0399^2 = 3025 \text{ Н·м/рад.}$$

**14.3.** Найдём эквивалентную круговую жёсткость (1.13) связей между моментами инерции  $J_p$  и  $J_1$  с учётом приведённой линейной жёсткости  $C_2$  зубчатого зацепления

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{np1}}; \quad C_1' = \frac{C_1 \cdot C_{np1}}{C_1 + C_{np1}} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 7963}{1 \cdot 10^4 + 7963} = 4433 \text{ Н·м/рад};$$

то же самое между  $J_4$  и  $J_5$  с учётом линейной жёсткости  $C_5$

$$\frac{1}{C_4'} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{np2}}; \quad C_4' = \frac{C_4 \cdot C_{np2}}{C_4 + C_{np2}} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 3025}{1 \cdot 10^4 + 3025} = 2322 \text{ Н·м/рад.}$$

**14.4.** Приведение жесткостей связей эквивалентной расчётной схемы осуществляется делением жёсткости приводимого звена на квадрат передаточного отношения между центром приведения и данным звеном (1.9):

$$C_1^* = C_1' = 4433 \text{ Н·м/рад};$$

$$C_3^* = \frac{C_3}{i_{12}^2} = \frac{1,5 \cdot 10^4}{0,5714^2} = 45942 \text{ Н·м/рад};$$

$$C_4^* = \frac{C_4'}{i_{12}^2} = \frac{2322}{0,5714^2} = 7112 \text{ Н·м/рад};$$

$$C_6^* = \frac{C_6}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{2,4 \cdot 10^4}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 3375 \text{ Н·м/рад};$$

$$C_\kappa^* = \frac{C_\kappa}{i_{12}^2 \cdot i_{45}^2} = \frac{3528}{0,5714^2 \cdot 4,6667^2} = 496 \text{ Н·м/рад.}$$

**15.** Приведение сил. Так как в расчётной схеме рис. 1.31 при исследовании процесса запуска грузоподъёмного механизма задаётся только движущий момент  $M_\delta$ , то необходимо определить момент сил сопротивления  $M_c$  и привести его к вращающемуся центру приведения согласно выражению (1.16)

$$M_c^* = \frac{Q \cdot r_0^2}{i_{12} \cdot i_{45} \cdot \eta_{mp}} = \frac{39933 \cdot 0,126^2}{0,5714 \cdot 4,6667 \cdot 0,8158} = 291 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где  $\eta_{тр}$  – КПД трансмиссии от массы, к которой приложена сила, до центра приведения, по формуле (1.15)

$$\eta_{mp} = 0,95^2 \cdot 0,98^5 = 0,8158;$$

$Q$  – вес номинального груза и крюковой подвески, Н, по (1.71).

**16.** Построение эквивалентной расчётной схемы для кинематической схемы, изображённой на рис. 1.31, выполним в произвольном масштабе жесткостей упругих связей  $\mu_c = 5 \cdot 10^4$  см·Н·м/рад, выбор которого связан с рациональным её размещением на листе бумаги. Приведённые жёсткости связей отложим на эквивалентном валу в виде горизонтальных отрезков расчётной длины

$$l_1^* = \frac{\mu_c}{C_1^*} = \frac{5 \cdot 10^4}{4433} = 11,28 \text{ см};$$

$$l_3^* = \frac{\mu_c}{C_3^*} = \frac{5 \cdot 10^4}{45942} = 1,09 \text{ см};$$

$$l_4^* = \frac{\mu_c}{C_4^*} = \frac{5 \cdot 10^4}{7112} = 7,03 \text{ см};$$

$$l_6^* = \frac{\mu_c}{C_6^*} = \frac{5 \cdot 10^4}{3375} = 14,82 \text{ см};$$

$$l_k^* = \frac{\mu_c}{C_k^*} = \frac{1 \cdot 10^4}{496} = 100,81 \text{ см}.$$

Аналогично выберем произвольный масштаб диаграммы масс  $\mu_m = 2,5 \cdot 10^3$  см<sup>2</sup>/кг·м<sup>2</sup> и отложим на отрезке эквивалентного вала соответствующей жёсткости прямоугольник, площадь которого составит

$$S_I^* = J_I^* \cdot \mu_m = 7,375 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 18,44 \text{ см}^2;$$

$$S_{II-3}^* = J_{II-3}^* \cdot \mu_m = 2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 7,25 \text{ см}^2;$$

$$S_{II-4}^* = J_{II-4}^* \cdot \mu_m = 4,352 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 10,88 \text{ см}^2;$$

$$S_{III}^* = J_{III}^* \cdot \mu_m = 6,21 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 15,52 \text{ см}^2,$$

откуда найдём высоту каждого из прямоугольников, поделив полученные значения площади масштаба масс на длину соответствующего участка вала

$$h_1^{(J)} = \frac{S_I^*}{l_1^*} = \frac{18,44}{11,28} = 1,63 \text{ см}; \quad h_3^{(J)} = \frac{S_{II-3}^*}{l_3^*} = \frac{7,25}{1,09} = 6,65 \text{ см};$$

$$h_4^{(J)} = \frac{S_{II-4}^*}{l_4^*} = \frac{10,88}{7,03} = 1,55 \text{ см}; \quad h_6^{(J)} = \frac{S_{III}^*}{l_6^*} = \frac{15,52}{14,82} = 1,05 \text{ см}.$$

На рис. 1.34 изобразим эквивалентную расчётную схему в принятом масштабе жесткостей упругих связей и моментов инерции.

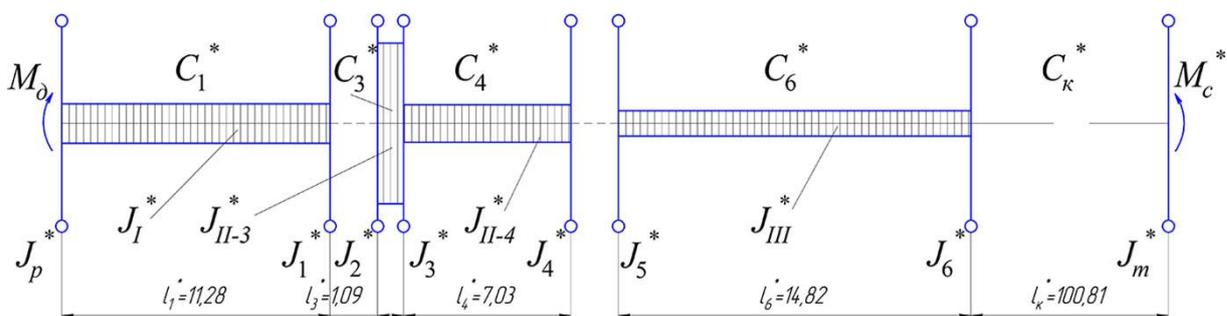


Рис. 1.34 – Эквивалентная расчётная схема при исследовании процесса запуска грузоподъёмного механизма

17. Для вычисления частот и форм собственных колебаний необходимо полученную на рис. 1.34 эквивалентную механическую систему преобразовать. Так как линейные жёсткости упругих связей зубчатого зацепления  $C_2$  и  $C_5$  приведены к круговой жёсткости валов  $C_1$  и  $C_4$ , то моменты инерции зубчатых колёс  $J_1-J_2$  и  $J_4-J_5$  можно объединить. Получим шестимассную механическую систему с пятью приведёнными жесткостями, исходными данными которой являются следующие значения:

$$\begin{aligned}
 J_1^{**} &= J_p^* = 0,025 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_1^* &= 4433 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_2^{**} &= J_1^* + J_2^* = 0,025 + 0,09188 = 0,11688 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_3^* &= 45942 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_3^{**} &= J_3^* = 0,06738 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_4^* &= 7112 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_4^{**} &= J_4^* + J_5^* = 0,06126 + 0,00211 = 0,06337 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_6^* &= 3375 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_5^{**} &= J_6^* = 0,00281 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; & C_k^* &= 496 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \\
 J_6^{**} &= J_m^* = 9,0887 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.
 \end{aligned}$$

В результате выполнения расчёта по алгоритму (рис. 1.18 – рис. 1.20) получим следующее решение системы

1-я частота - Общее вращение вала	2-я частота=39,504 1/с (6,287 Гц)
	Формы колебаний: Амплитуда:
	Ноль Ноль
	+1,0000 +6,408E-04
	+1,7501 +1,121E-03
	+6,5470 +4,195E-03
	+12,2374 +7,841E-03
	+32,1963 +2,063E-02
3-я частота=356,608 1/с (56,756 Гц)	4-я частота=288,832 1/с (45,969 Гц)
Формы колебаний: Амплитуда:	Формы колебаний: Амплитуда:
Ноль Ноль	Ноль Ноль
+1,0000 +6,408E-04	+1,0000 +6,408E-04
+0,7194 +4,610E-04	-0,2868 -1,838E-04
+2,0865 +1,337E-03	+0,0915 +5,865E-05
-0,0510 -3,265E-05	-0,0064 -4,102E-06
-0,4751 -3,044E-04	-0,0316 -2,028E-05
5-я частота=273,574 1/с (43,541 Гц)	6-я частота не существует,
Формы колебаний: Амплитуда:	корень частоты отрицательный
Ноль Ноль	
+1,0000 +6,408E-04	

+0,0102	+6,504E-06
-0,0099	-6,322E-06
-0,0060	-3,866E-06
-0,0273	-1,750E-05

Выполним графический анализ полученных форм колебаний механической системы, представив его на рис. 1.35.

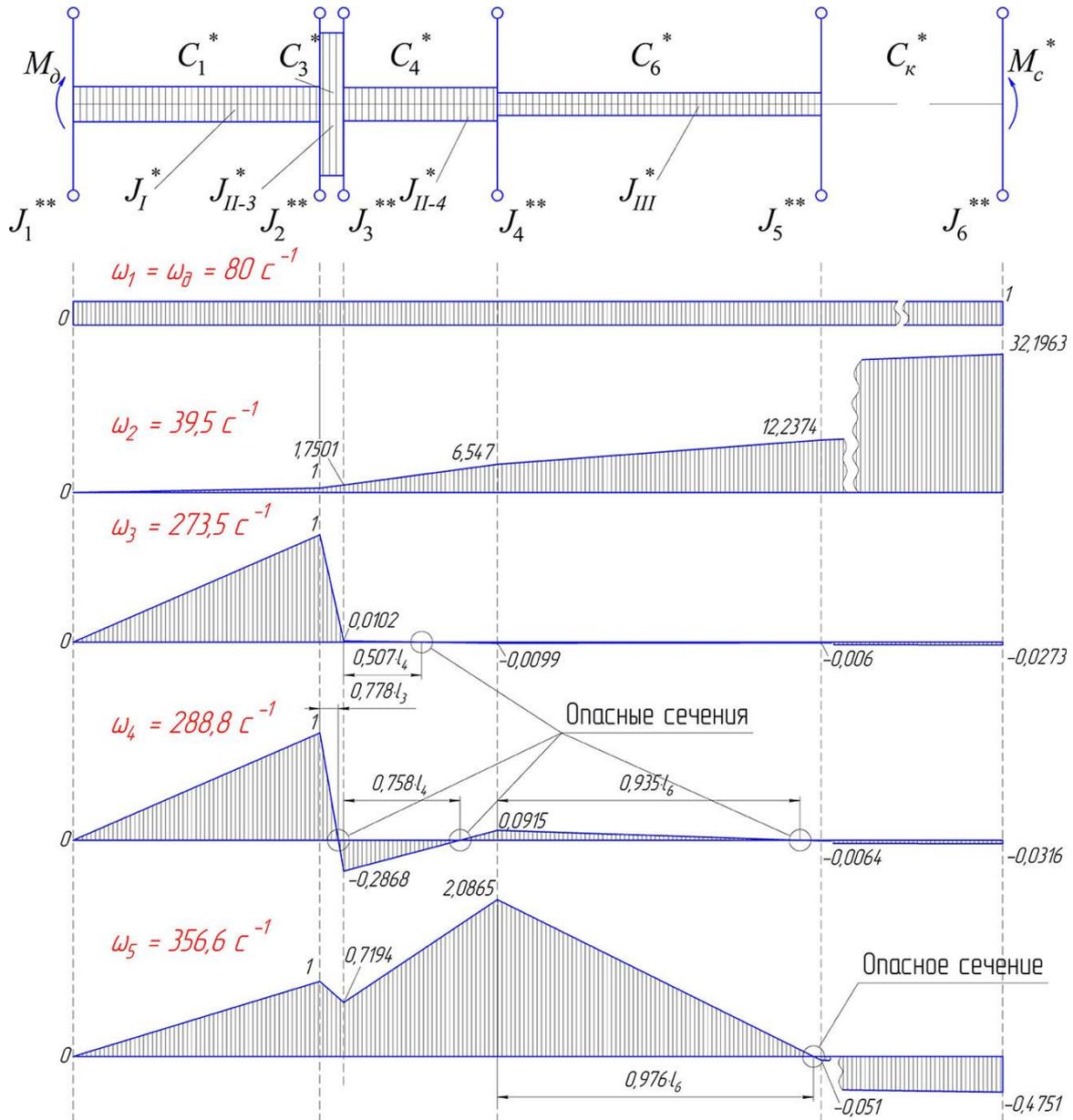


Рис. 1.35 – Графическая интерпретация расчёта частот и форм собственных колебаний исследуемой механической системы

По результатам выполненных расчётов сделаем заключение о степени работоспособности исследуемой механической системы. Итак, мы получили шестичастотное колебательное движение, которое можно рассматривать как сумму шести движений.

1. Общему вращению эквивалентного вала соответствует нулевой корень частоты, равный частоте вращения двигателя.
2. В одном движении шесть масс колеблются с одинаковой частотой  $39,5 \text{ с}^{-1}$  (6,3 Гц) и в любой момент времени амплитуды углов кручения

участков эквивалентного вала, соответствующих жёсткости  $C_i$  от единичного гармонического крутящего момента указанной частоты постоянны и соответственно равны (1.50) следующим значениям

$$u_1^{(1)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1; u_3^{(1)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 1,7501; u_4^{(1)} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} = 6,547;$$

$$u_6^{(1)} = \frac{\lambda_6}{\lambda_1} = 12,2374 \text{ и } u_m^{(1)} = \frac{\lambda_m}{\lambda_1} = 32,1963,$$

где  $\lambda_i$  – угол деформации участка вала в данный момент времени  $t$  (1.49). Это движение называют *первой собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала между маховыми массами. Возможна нормальная работа механической системы без ограничений.

3. В другом движении массы колеблются с частотой  $273,5 \text{ с}^{-1}$  (43,5 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала под моментами инерции в любой момент времени  $u_1^{(2)} = 1; u_3^{(2)} = 0,0102; u_4^{(2)} = -0,0099; u_6^{(2)} = -0,006$  и  $u_m^{(2)} = -0,0273$ . Это движение называют *второй собственной формой колебаний* и заключается в деформации вала между моментами инерции  $J_p^* - J_3^*$  и  $J_4^* - J_m^*$ , а также в скручивании вала между моментами инерции  $J_3^* - J_4^*$ . При совпадении вынужденной частоты со второй собственной в сечении, расположенном на расстоянии  $0,507l_4^*$  справа от момента инерции  $J_3^*$  происходит смена знака напряжений деформации.
3. Четвёртому движению системы соответствует трёхузловая собственная форма колебаний с частотой  $288,8 \text{ с}^{-1}$  (45,9 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала под моментами инерции в любой момент времени  $u_1^{(3)} = 1; u_3^{(3)} = -0,2868; u_4^{(3)} = 0,0915; u_6^{(3)} = -0,0064$  и  $u_m^{(3)} = -0,0316$ . Это движение заключается в деформации вала между моментами инерции  $J_p^* - J_1^*$  и  $J_6^* - J_m^*$ , а также в скручивании вала между моментами инерции  $J_2^* - J_3^*; J_3^* - J_4^*; J_5^* - J_6^*$ . При совпадении вынужденной частоты с третьей собственной в сечениях, расположенных на расстоянии  $0,778l_3^*$  справа от момента инерции  $J_2^*$ ;  $0,758l_4^*$  справа от момента инерции  $J_3^*$  и  $0,935l_6^*$  справа от момента инерции  $J_5^*$  происходит смена знака напряжений деформации.
4. Пятая собственная форма колебаний осуществляется с собственной частотой  $356,6 \text{ с}^{-1}$  (56,7 Гц) при относительных амплитудах углов кручения участков вала под моментами инерции в любой момент времени  $u_1^{(4)} = 1; u_3^{(4)} = 0,7194; u_4^{(4)} = 2,0865; u_6^{(4)} = -0,051$  и  $u_m^{(4)} = -0,4751$ . Это движение заключается в деформации вала между моментами инерции  $J_p^* - J_4^*$  и  $J_6^* - J_m^*$ ; в скручивании вала между массами  $J_5^* - J_6^*$  на расстоянии  $0,976l_6$  справа от  $J_5^*$ , где напряжения меняют знак своего действия.
5. Последней, шестой собственной форме колебаний соответствует отрицательный корень частоты, что означает возможный резонанс механической системы, неограниченное увеличение амплитуд колебаний.

## Список использованных источников

- 1) **Бабаков, И.М.** Теория колебаний, изд. 3-е. – М.: Наука, – 1968. – 559 с.
- 2) Динамика путевых и строительных машин. Ч. 1 / В.В. Шаповалов. – Ростов н/Д: РИИЖТ, 1982. – 32 с.
- 3) **Евдокимов, Ю.А., Шаповалов, В.В., Щербак, П.Н.** Динамика путевых и строительных машин. Ч. 2. – Ростов н/Д: РИИЖТ, 1983. – 32 с.
- 4) ИСО 4301/1-86 Краны и подъемные устройства. Классификация. Ч. 1. Общие положения.
- 5) Курсовое проектирование грузоподъемных машин: Учеб. Пособие для студентов машиностр. спец. вузов / С.А. Казак, В.Е. Дусье, Е.С. Кузнецов [и др.]; Под ред. С.А. Казака. – М.: Высш. шк., 1989. – 319 с.
- 6) Методы классической и современной теории автоматического управления: Учеб. в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.
- 7) Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. 1: Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова [и др.]; под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
- 8) Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов – М.: Наука. – 1978. – 768 с.
- 9) Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
- 10) **Шаповалов, В.В.** Наземные транспортно-технологические средства : учеб. пособие / В.В. Шаповалов, И.В. Колесников. – Ростов н/Д : РГУПС, 2012. – 571 с.
- 11) **Шаповалов, В.В.** Определение устойчивого состояния фрикционной системы путь – тяговый подвижной состав / В.В. Шаповалов, В.Л. Заковоротный, А.Л. Озябкин : энциклопедия в 40 т. ; под ред. П.С. Анисимова. – М., 2008. – Раздел IV. Расчёт и конструирование машин. – Т. IV–23. Подвижной состав железных дорог. – 656 с.

## Варианты заданий для самоподготовки

**Задание 1.** По первой букве фамилии и последним цифрам студенческого студент выбирает свой вариант расчёта механической системы поступательно движущихся масс. Для схемы задания по рис. 1.36 численные значения следует выбрать согласно табл. 1.12 в соответствии со знаком "+". Для выбранного варианта необходимо:

- 1) упростить механическую систему до расчётной с двумя степенями свободы;
- 2) составить систему дифференциальных уравнений движения; обосновать своё решение;

- 3) определить частоты и формы собственных колебаний;
- 4) сделать выводы по работе.

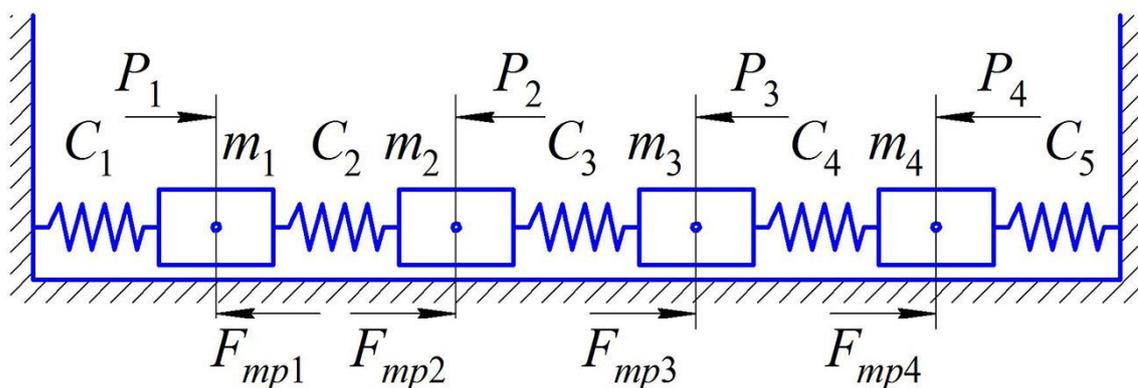


Рис. 1.36 – Схема задания поступательно движущихся масс

Табл. 1.12 – Вариант схемы задания

Вариант (по первой букве фамилии)	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
А	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
Б	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-
В	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-
Г	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-
Д	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+
Е	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-
Ж	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+
З	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+
И	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+
К	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+
Л	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-
М	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	+
Н	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+
О	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-
П	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Р	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+
С	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-
Т	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-	+
У	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-
Ф	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-
Х	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-
Ц	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	+	+
Ч	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-
Ш	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-
Щ	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
Э	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+
Ю	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-
Я	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	-

Окончание табл. 1.12

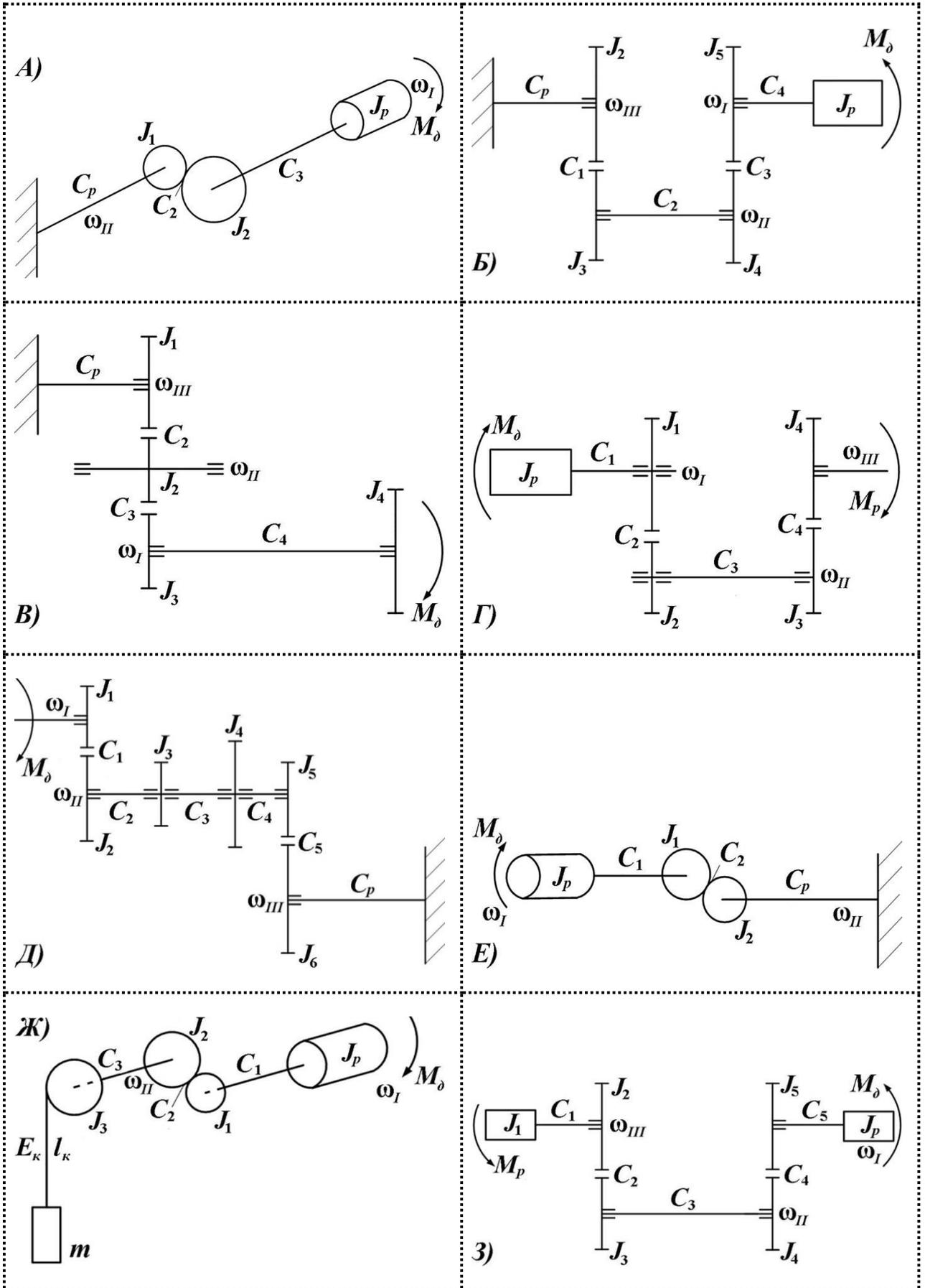
Вариант (по предпоследней цифре зачётки)	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$f$	$\lambda$					
	$\times 10^4$ кг				$\times 10^6$ Н/м					—	—					
0	2,0	2,5	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	2,0	0,15	1,1					
1	1,5	2,0	1,2	1,3	1,2	1,1	1,0	1,5	1,5	0,16	1,12					
2	1,8	2,0	1,0	1,5	2,0	1,0	1,0	1,1	1,6	0,17	1,14					
3	1,5	1,8	1,0	1,2	1,0	1,0	1,2	1,5	1,5	0,18	1,16					
4	1,6	2,2	2,0	1,5	2,0	1,5	1,5	1,0	1,0	0,19	1,18					
5	1,5	1,4	1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0	1,5	0,20	1,20					
6	2,5	2,0	1,1	1,3	1,0	1,5	1,5	2,0	1,2	0,21	1,22					
7	2,0	1,6	1,0	1,0	2,0	1,8	1,5	1,0	1,0	0,22	1,24					
8	1,9	1,5	1,0	1,2	1,0	1,0	1,3	2,0	1,5	0,23	1,26					
9	2,0	1,5	1,5	1,0	1,0	1,2	1,5	1,8	1,0	0,24	1,28					
Вариант (по последней цифре зачётки)	$P_1$				$P_2$				$P_3$				$P_4$			
	$10^6 \cdot [a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(k\omega t)]$															
	$a_1$	$b_1$	$\omega$	$k$	$a_1$	$b_1$	$\omega$	$k$	$a_1$	$b_1$	$\omega$	$k$	$a_1$	$b_1$	$\omega$	$k$
0	5,0	2,0	0,2	2	2,5	0,5	0,1	3	1,2	0,5	2,5	2	9,0	4,0	0,1	2
1	4,0	1,5	0,4	3	2,0	0,4	0,2	5	0,9	0,4	2,2	4	8,0	3,0	0,2	3
2	3,0	1,0	0,6	2	1,5	0,3	0,3	3	0,6	0,2	1,9	2	7,0	2,0	0,3	2
3	2,0	0,5	0,8	3	1,0	0,2	0,4	5	0,3	0,1	1,6	4	6,0	1,0	0,4	3
4	1,0	0,1	1,0	2	0,5	0,1	0,5	3	0,1	0,05	1,3	2	5,0	1,5	0,5	2
5	9,0	5,0	1,5	3	5,0	1,0	0,3	5	4,5	0,5	5,0	4	4,0	1,2	1,0	3
6	8,0	4,0	2,0	2	4,0	0,8	0,6	3	4,0	1,0	4,0	2	3,0	0,9	1,2	2
7	7,0	3,0	2,5	3	3,0	0,6	0,9	5	3,0	1,5	3,0	4	2,0	0,6	1,4	3
8	6,0	2,0	3,0	2	2,0	0,4	1,2	3	2,0	0,6	2,0	2	1,0	0,3	1,6	2
9	5,0	1,0	3,5	3	1,0	0,2	1,5	5	1,0	0,2	1,0	4	0,5	0,1	1,8	3

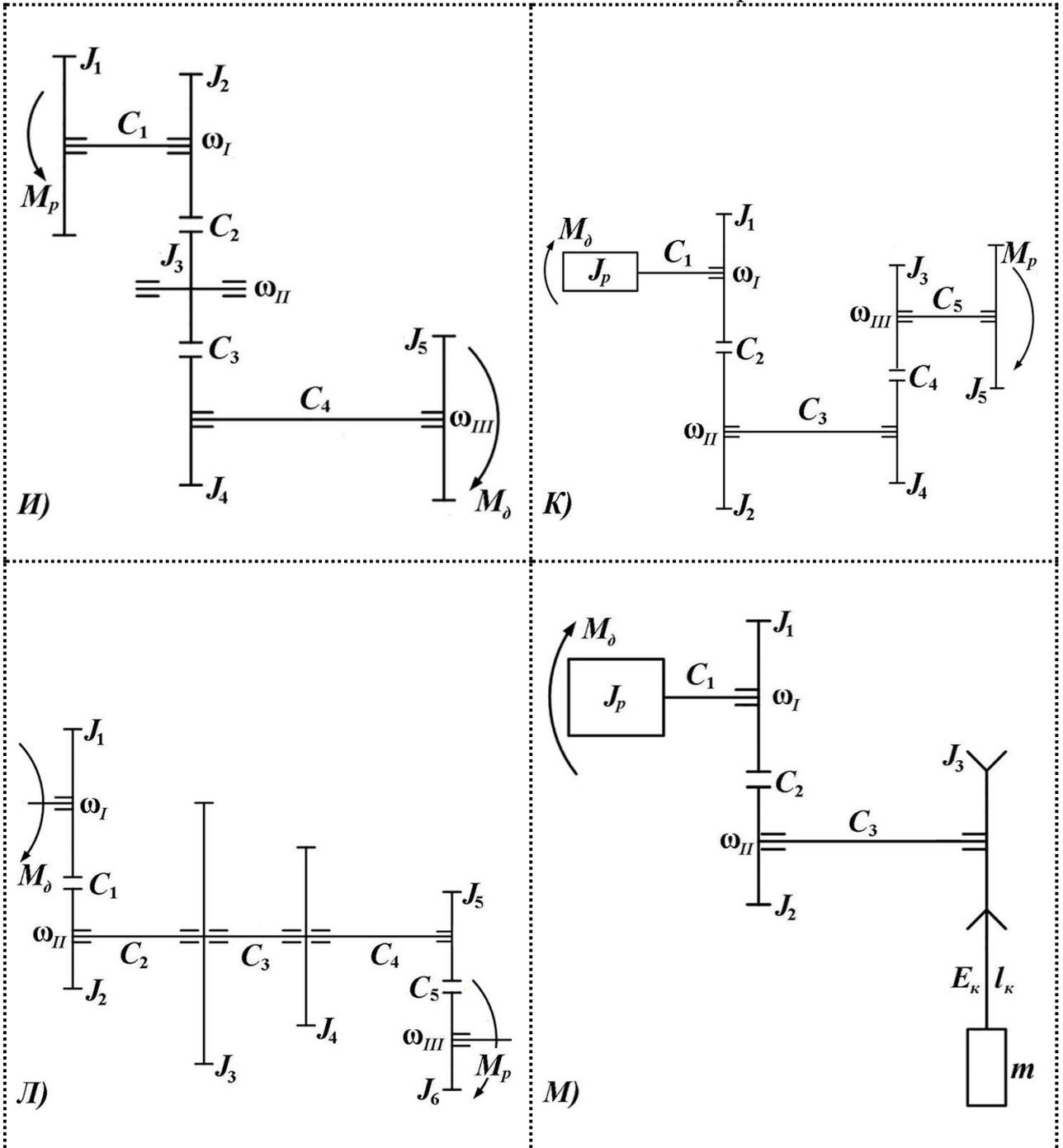
**Задание 2.** Студент выполняет расчёт кинематической схемы по одной из схем табл. 1.13 в соответствии с начальной буквой фамилии. Численные значения величин, обозначенных на схеме задания, выбираются по варианту задания, который соответствует последней цифре шифра студенческого билета.

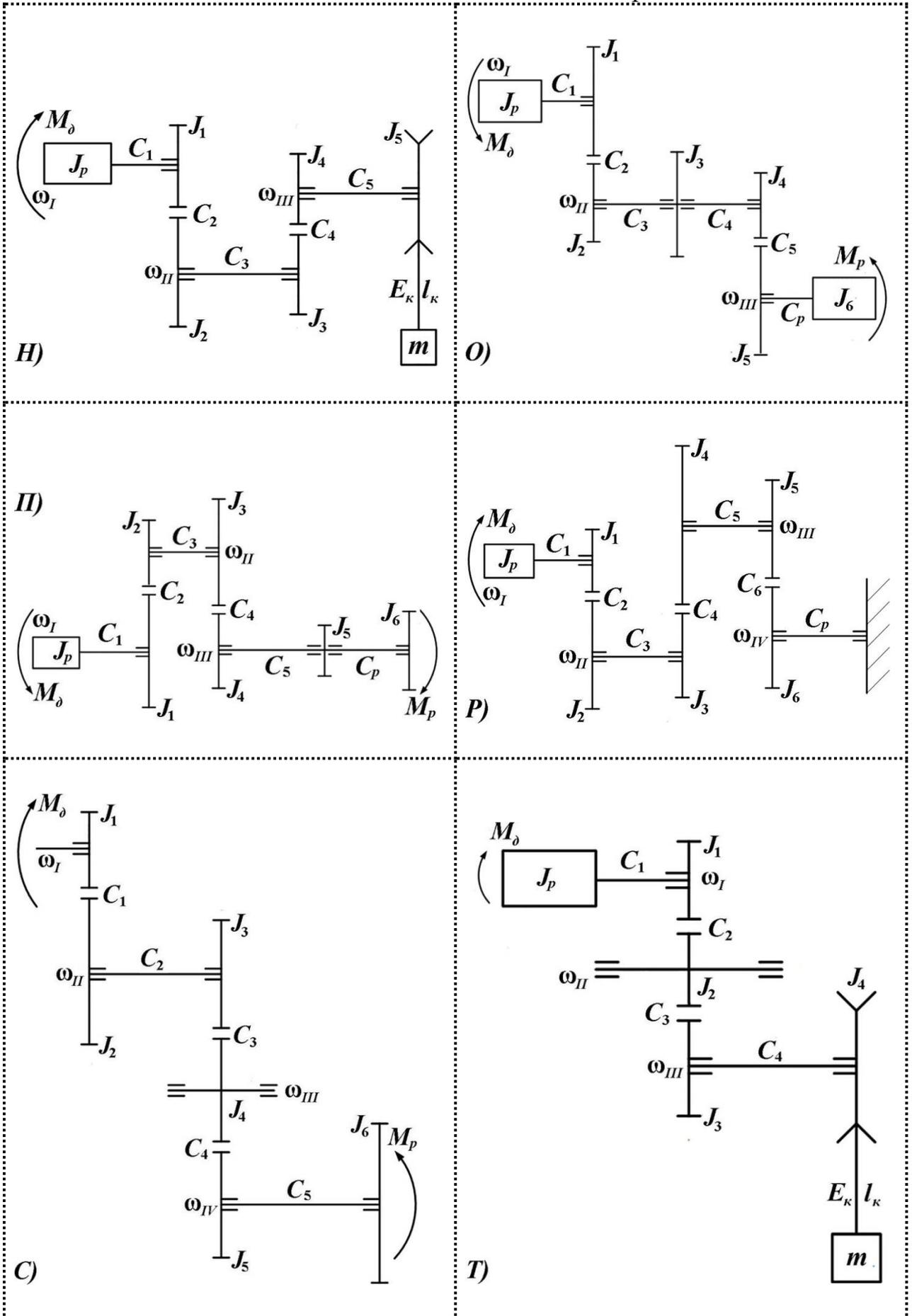
В предложенной (по варианту) кинематической схеме задания необходимо:

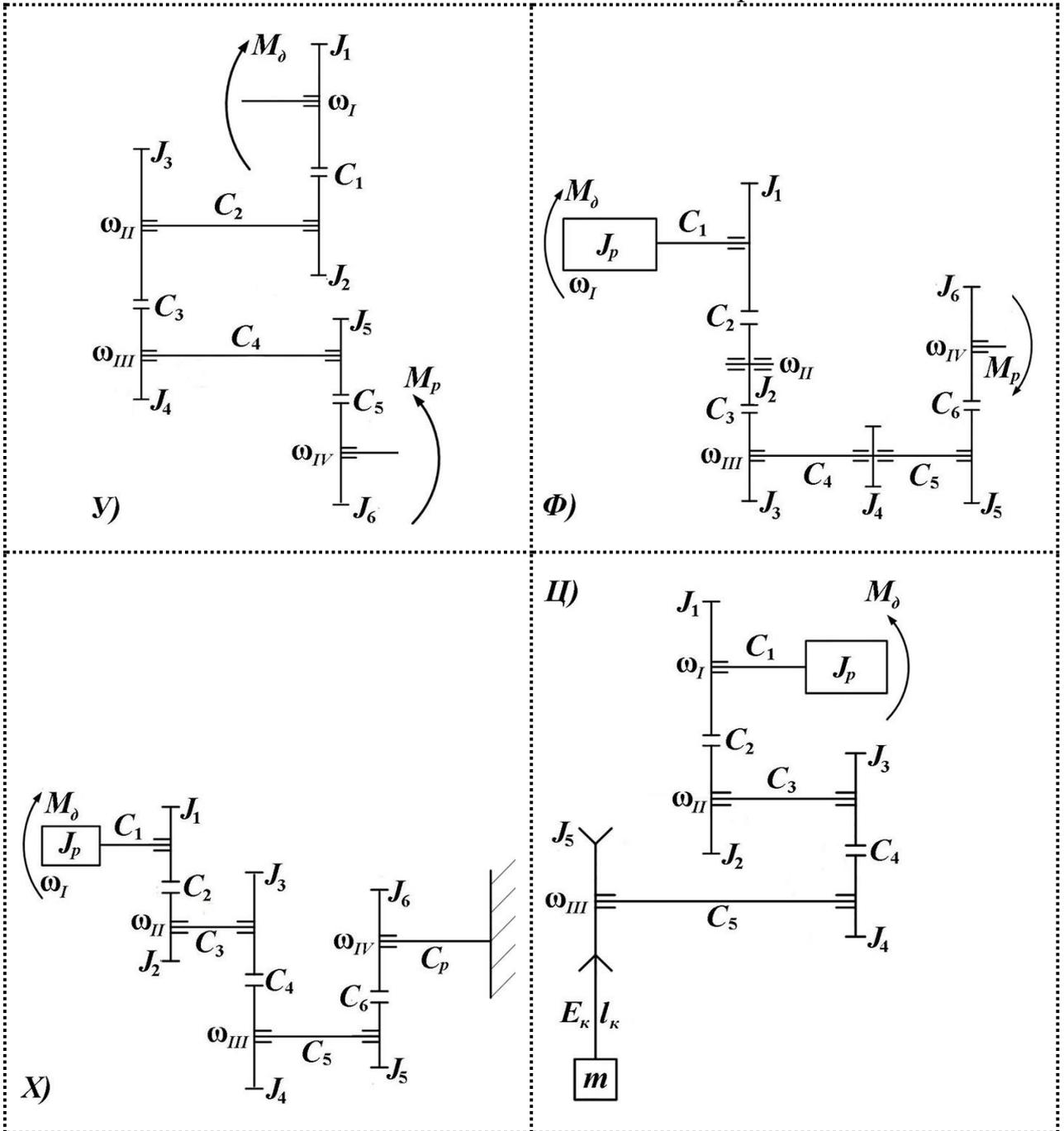
- 1) составить эквивалентную расчётную схему;
- 2) составить систему дифференциальных уравнений движения; обосновать своё решение;
- 3) определить частоты и формы собственных колебаний;
- 4) сделать выводы по работе.

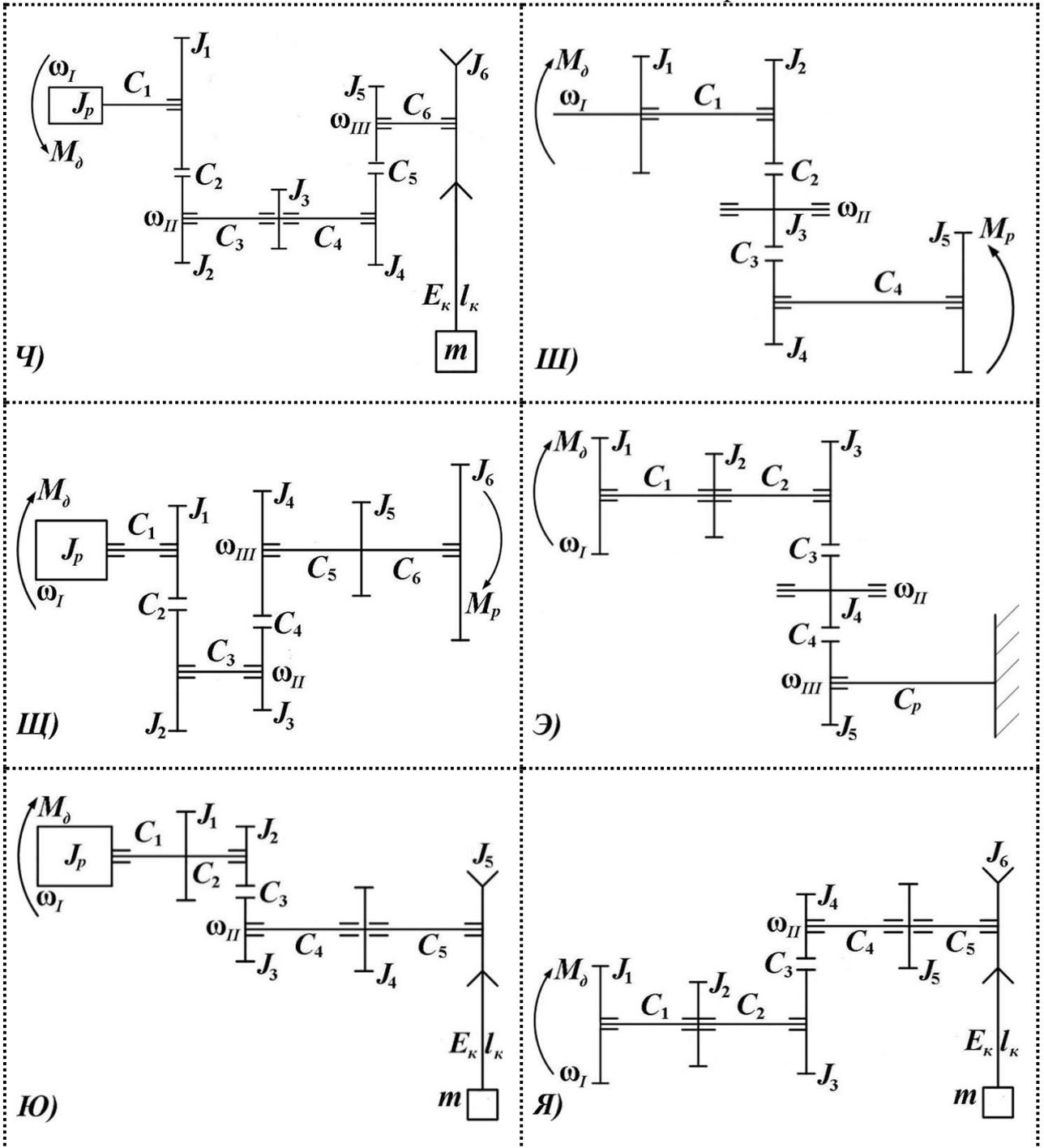
Табл. 1.13 – Варианты задания кинематической схемы механизма











Продолжение табл. 1.13

№ варианта (последняя цифра шифра студента)	$J_p$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_p$
	$\times 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$							$\times 10^6 \text{ Н/м}$ – зубчатых зацеплений						
								$\times 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ – валов						
0	2,0	1,0	2,0	1,5	2,0	1,8	2,4	2,0	2,0	2,1	1,5	1,0	1,2	0,6
1	1,8	2,0	1,0	1,5	1,8	1,5	2,5	2,0	2,2	1,0	1,2	1,0	1,4	0,5
2	1,4	1,5	1,0	1,8	2,0	1,5	2,2	1,8	1,0	1,5	1,0	1,3	1,6	0,4
3	1,5	1,0	2,0	1,5	1,8	1,7	2,4	1,5	2,1	1,0	2,0	1,8	1,8	0,5
4	1,8	1,3	1,8	2,2	2,0	1,5	2,2	1,0	1,5	1,2	1,5	2,5	2,0	0,8
5	2,0	2,0	2,5	1,8	2,0	1,5	1,8	2,5	1,5	1,0	1,0	1,6	2,2	0,6
6	2,5	2,5	3,0	2,2	2,0	1,5	2,0	1,0	2,0	1,5	1,0	1,9	2,4	0,4
7	1,5	1,7	2,2	2,0	2,2	1,5	2,0	2,0	2,0	1,2	1,5	2,0	2,6	0,5
8	1,4	1,5	1,8	2,2	2,0	1,7	2,5	2,0	1,0	1,0	1,2	1,5	2,8	0,6
9	1,2	2,0	2,5	2,2	2,0	1,5	1,8	1,0	1,5	1,0	1,5	1,0	3,0	0,7

№ варианта (последняя цифра шифра студента)	$\omega_I$	$\omega_{II}$	$\omega_{III}$	$\omega_{IV}$	$M_\delta$	$M_p$	$m$	$E_k$	$l_k$
	$\text{с}^{-1}$				$\times 10^2$ $\text{Н}\cdot\text{м}$	$\times 10^4$ $\text{кг}$	$\times 10^6$ $\text{Н}$	$\text{м}$	
0	80	120	60	30	2,0	1,0	0,3	2,5	5,0
1	66	90	60	80	3,0	1,5	0,5	0,7	4,8
2	72	30	70	85	4,0	2,5	0,5	0,8	4,5
3	120	100	76	50	2,5	1,7	0,4	0,5	5,0
4	90	70	80	40	2,2	1,5	0,2	0,6	5,5
5	60	120	96	70	2,2	2,0	0,3	0,7	4,7
6	80	140	30	60	3,0	2,0	0,4	1,0	4,5
7	96	120	40	75	2,5	2,0	0,6	0,8	5,0
8	110	90	80	40	2,0	1,0	0,4	0,7	5,5
9	100	80	90	45	2,4	1,8	0,3	0,6	5,2

Учебное издание

Шаповалов Владимир Владимирович  
Озябкин Андрей Львович

**РАСЧЁТ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МЕХАНИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ**

Печатается в авторской редакции

Технический редактор

Учебно-методическое пособие для выполнения  
практических занятий, контрольных и курсовых работ

Подписано к печати \_\_. \_\_.17. Формат 60x84/19  
Бумага газетная. Ризография. Усл.печ.л. \_\_\_\_.  
Тираж \_\_\_\_ экз. Изд. № \_\_\_\_ . Заказ \_\_\_\_.

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВО РГУПС

---

Адрес университета: 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского  
Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.