РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВО РГУПС)

О.Е. Гурова, Т.М. Пимшина

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ

Учебно-методическое пособие
для выполнения расчетно-графической работы

Часть 3

Ростов-на-Дону
2015

УДК 006 + 389(07) + 06

Рецензент – доктор технических наук, профессор Н.Ф. Добрынин

Гурова, О.Е.

Метрология, стандартизация и сертификация: учебно-методическое пособие для выполнения расчетно-графической работы. В 3 ч. Ч. 3 / О.Е. Гурова, Т.М. Пимшина; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2015. – 27 с.: ил. – Библиогр.: с. 26.

Учебно-методическое пособие состоит из трех частей и содержит рекомендации для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Метрология, стандартизация и сертификация».

В третьей части учебно-методического пособия представлен материал, необходимый для выполнения раздела расчетно-графической работы по теме «Статистическая обработка экспериментальных данных».

Предназначено для студентов 3-го курса очной и заочной форм обучения специальности 271501.65 «Строительство железных дорог, мостов и транспортных тоннелей» специализаций: № 2 «Управление техническим состоянием железнодорожного пути», № 3 «Мосты»; направления подготовки 120700.62 «Землеустройство и кадастр» профиля «Кадастр недвижимости».

Одобрено к изданию кафедрой «Путь и путевое хозяйство».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение научно-исследовательских работ, связанных с измерениями, сопряжено с получением большого количества эмпирических данных.

Результат эксперимента вне зависимости от его целевого назначения и способа регистрации в конечном итоге представляется в виде набора чисел. Для того чтобы по результатам проведенного опыта можно было сделать обобщения и выводы, необходимо, прежде всего, произвести статистическую обработку полученных экспериментальных данных, вычислить обобщенные показатели и выполнить их анализ.

Методы обработки экспериментальных данных играют существенную роль при измерениях. С усложнением измерений и повышением требований к точности измерений их роль становится все более важной. Во многих современных измерительных задачах получить требуемую точность результатов удается, лишь применяя более эффективные методы обработки экспериментальных данных.

В данном методическом пособии в доступной форме изложены некоторые способы обработки экспериментальных данных для различных объемов выборки.

Каждая глава методического указания содержит общую часть, кратко освещающую теоретические основы темы; примеры решения типовых задач; задачи для самостоятельного решения и справочный материал.

Пояснительная записка расчетно-графической работы выполняется на листах белой бумаги формата А4 по всем правилам СТП с соблюдением следующих размеров полей: левое − 30 мм; правое − 10 мм; верхнее − 15 мм; нижнее − 20 мм.

1 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Статистическая обработка экспериментальных данных при измерении представляет собой заключительный этап измерительной процедуры, на котором по экспериментальным данным, полученным на предыдущем этапе, с помощью математических методов получают искомый результат измерения.

Содержание и объем обработки данных могут быть различны в зависимости от категории и вида измерения, объема и свойств экспериментальных данных и требований к точности измерений.

Результаты опыта или эксперимента, выраженные цифрами, записываются в порядке их получения. Каждое отдельное значение признака принято называть *вариантом*, а абсолютное число, показывающее, сколько раз встречается любой вариант, − *частотой.*

Располагая варианты в возрастающем или убывающем порядке и указывая относительно каждого варианта, как часто он встречается в рассматриваемой совокупности, получим распределение признака или *вариационный ряд.*

Изображение вариационного ряда на графике позволяет в наглядной форме показать характер варьирования исследуемого распределения.

При статистической обработке результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

− исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;

− вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений;

− выполнить оценку среднего квадратического отклонения результата измерения;

− вычислить доверительные границы случайной погрешности результата измерения;

− вычислить доверительный интервал измеряемой величины.

Для исследования распределений случайных величин в математической статистике пользуются моментами. *Моменты* представляют собой систему численных характеристик распределения, включающую среднюю арифметическую величину.

Моментом относительно начального значения $X = a$ называется сумма произведений отклонений значений X_i от a в степени r на соответствующую частоту

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \cdot (X_i - a)^r .$$

Давая показателю степени r различные значения (r = 0, 1, 2, 3, 4 и т.д.), получим моменты нулевого, первого, второго и т.д. порядка относительно a.

Различают *начальные* и *центральные* моменты r-го порядка.

Если $a = 0$, то момент называется *начальным* и определяется по формуле

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i \cdot X_i'}{n}, \tag{1}$$

где μ_i − частота i-го варианта;

X_i' − новая случайная величина;

n – количество измерений.

Новую случайную величину можно определить по формуле

$$X_i' = \frac{X_i - X_o}{h}, \tag{2}$$

где X_i – значение случайной величины, полученное в результате эксперимента;

X_o – условное среднее значение, принимаемое произвольным образом;

h − величина интервала.

Расчет ведется в табличной форме (табл. 1.1). В таблицу необходимо занести значения, полученные в результате измерения, преобразованные в вариационный ряд, и в результате их обработки.

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \left(X_i'\right)^2}{n} \tag{3}$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \left(X_i'\right)^3}{n}, \tag{4}$$

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \left(X_i'\right)^4}{n}. \tag{5}$$

Если $a = X_{ср}$, то момент называется *центральным*, который определяется по следующей формуле

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i - a)^r.$$

Обычно для практических целей ограничиваются вычислением моментов не выше четвертого порядка.

Центральные моменты выражаются через начальные моменты следующим образом:

$$M_1 = m_1; \tag{6}$$

$$M_2 = m_2 - m_1^2; \tag{7}$$

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3; \tag{8}$$

$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4. \tag{9}$$

Среднее арифметическое значение определяется по формуле

$$X_{ср} = X_о + M_1 \cdot h. \tag{10}$$

Среднее квадратическое отклонение будет равно

$$S = h \cdot \sqrt{M_2}. \tag{11}$$

Кроме рассмотренных численных характеристик применяется и ряд других вероятностных характеристик, каждая из которых описывает определенное свойство распределения.

Так, третий центральный момент M_3 характеризует степень асимметрии кривой расположения относительно математического ожидания. Но для удобства за характеристику асимметрии принимают безразмерную величину, называемую *коэффициентом асимметрии* A, определяемую по формуле

$$A = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}}. \tag{12}$$

При $A > 0$ кривая распределения сдвинута влево. При $A < 0$ кривая имеет правостороннюю косость, а при $A = 0$ – кривая симметрична (рис. 1.1 – *а*).

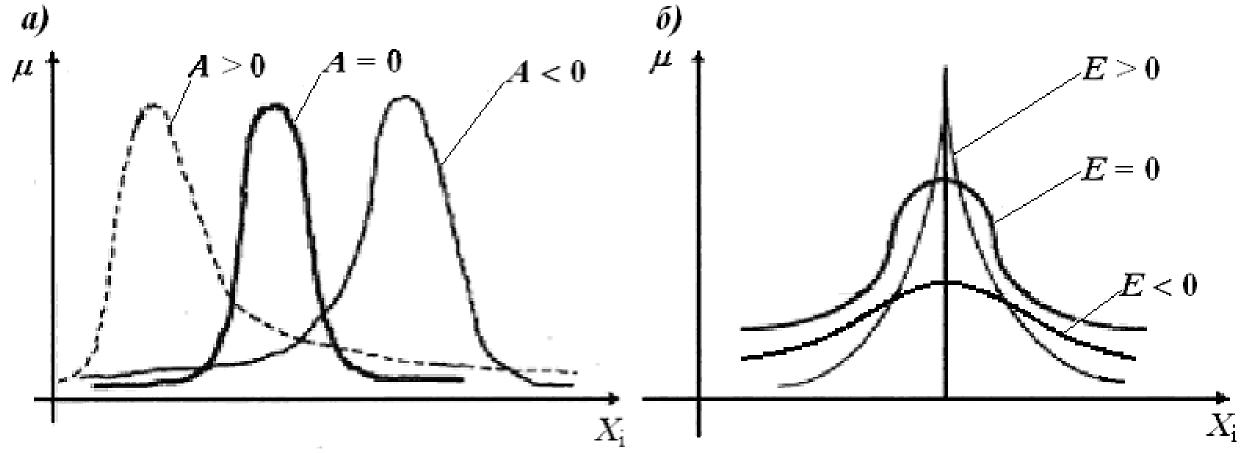

Рис. 1.1. Вид дифференциальной функции распределения:
а) для различных значений коэффициента асимметрии;
б) для различных значений коэффициента эксцесса

Четвертый центральный момент M_4 определяет свойство островершинности кривой распределения. За характеристику этого свойства принимают безразмерную величину E, называемую *коэффициентом эксцесса* (крутизны), и определяемую из выражения

$$E = \frac{M_4}{M_2^2} - 3. \tag{13}$$

При $E > 0$ кривая распределения вытянута вверх (островершинна), а при $E < 0$ кривая приплюснута. Если $E = 0$, то распределение близко к нормальному (рис. 1.1 – *б*).

Изображение вариационного ряда на графике позволяет в наглядной форме показать характер варьирования исследуемого распределения.

Статистическая оценка параметра, вычисленная по данным выборки, является приближенной. Такая оценка будет иметь смысл, если указан интервал, внутри которого будет находиться истинное значение параметра с заданной вероятностью. Значение доверительной вероятности P обычно равно 0,95, в противном случае это значение задается.

В результате обработки экспериментальных данных значение генеральной средней величины находится в доверительном интервале

$$X_{cp} - t_\alpha \cdot S < X < X_{cp} + t_\alpha \cdot S \ , \tag{14}$$

где $X_{ср}$ – среднее арифметическое значение измеряемой величины;

S – среднее квадратическое отклонение измеряемой величины;

t_α – коэффициент Стьюдента (определяется по таблице Приложения 1) в зависимости от количества измерений «n» и значения доверительной вероятности «P».

Величина доверительной погрешности определяется выражением

$$\varepsilon_x = \pm\, t_\alpha \cdot S. \tag{15}$$

В зависимости от количества цифр, выражающих значения измеренных величин, и числа наблюдений (количества экспериментальных точек) рекомендуются различные методы статистической обработки результатов эксперимента.

Рассмотрим классический (традиционный) метод обработки экспериментальных данных − «метод моментов» для различных объемов выборки.

1.1 Обработка результатов эксперимента при объеме выборки *n* > 25

Пример. Произведены измерения величины глубины износа 200 штук подкладок под клеммами рельсовых скреплений КБ. Результаты сведены в таблицу 1.1.

Необходимо выполнить обработку экспериментальных данных и определить доверительный интервал, в котором будет находиться истинное значение измеряемого параметра и доверительную погрешность измерения.

Решение. Полученные после измерения значения X_i распределить в вариационный ряд в возрастающем порядке и записать в табл. 1.1.

Принять значение условной средней X_o = 0,15 мм и определить значение X' по формуле (2), результаты расчета занести в табл. 1.1.

Начальные моменты найти по формулам (1), (3) − (5)

$$m_1 = -\frac{284}{200} = -1{,}42; \qquad m_2 = \frac{1728}{200} = 8{,}64;$$

$$m_3 = -\frac{5492}{200} = -27{,}46; \qquad m_4 = \frac{36240}{200} = 181{,}2.$$

Центральные моменты найти по формулам (6) – (9):

$M_1 = -\,1{,}42;$

$M_2 = 8{,}64 - 2{,}02 = 6{,}62;$

$M_3 = -\,7{,}46 - 3(-1{,}42)\cdot 8{,}64 + 2\,(-1{,}42)^3 = -7{,}46 + 36{,}81 - 5{,}73 = 3{,}62;$

$M_4 = 181{,}2 - 4(-1{,}42)\cdot(-27{,}46) + 6\cdot 2{,}02\cdot 8{,}64 - 3\cdot 4{,}07 = 181{,}2 - 155{,}97 + 104{,}72 - 12{,}21 = 117{,}74.$

Среднее арифметическое значение определить по формуле (10):

$$X_{ср} = 0{,}15 - 1{,}42\cdot 0{,}02 = 0{,}1216 \text{ (мм)},$$

а среднее квадратическое отклонение – по формуле (11)

$$S = 0{,}02\sqrt{6{,}62} = 0{,}0515 \text{ (мм)}.$$

Показатель асимметрии, определенный по формуле (12), будет равен

$$A = \frac{3{,}62}{17{,}03} = 0{,}213 \text{ (мм)},$$

а показатель эксцесса (крутизны) можно найти по формуле (13)

$$E = \frac{117}{43{,}82} - 3 = -0{,}428 \text{ (мм).}$$

Таблица 1.1

Обработка экспериментальных данных

X_i	μ_i	X_i'	$(X_i')^2$	$\mu \cdot X_i'$	$(\mu \cdot X_i')^2$	$(\mu \cdot X_i')^3$	$(\mu \cdot X_i')^4$
0,01	3	−7	49	−21	147	−1029	7203
0,03	8	−6	36	−48	288	−1728	10368
0,05	11	−5	25	−55	275	−1375	6875
0,07	20	−4	16	−80	320	−1280	5120
0,09	27	−3	9	−81	243	−729	2187
0,11	36	−2	4	−72	144	−288	576
0,13	29	−1	1	−29	29	−29	29
0,15	18	0	0	0	0	0	0
0,17	17	1	1	17	17	17	17
0,19	17	2	4	34	68	136	272
0,21	8	3	9	24	72	216	648
0,23	4	4	16	16	64	256	1024
0,25	1	5	25	5	25	125	625
0,27	1	6	36	6	36	216	1296
Итого	200	–	–	−284	1728	−5492	36240

Положительное значение асимметрии показывает, что кривая распределения незначительно сдвинута влево. А незначительное отрицательное значение эксцесс указывает на то, что кривая распределения несколько приплюснута (рис. 1.2).

Значение генеральной средней величины находится в доверительном интервале, который определяется по формуле (14).

При заданной вероятности P = 0,95 и по числу степеней свободы $k = n - 1$ по таблице *Приложения 1* определить коэффициент Стьюдента, который будет равен $t_\alpha = 1{,}96$.

$$0{,}1216 - 1{,}96 \cdot 0{,}0515 < X < 0{,}1216 + 1{,}96 \cdot 0{,}0515,$$
$$0{,}1116 < X < 0{,}2216 \quad \text{или} \quad 0{,}11 < X < 0{,}22 \text{ (мм).}$$

Учитывая формулу (15), величина доверительной погрешности будет равна

$$\varepsilon = \pm\, 1{,}96 \cdot 0{,}0515 = \pm\, 0{,}10094 \text{ (мм).}$$

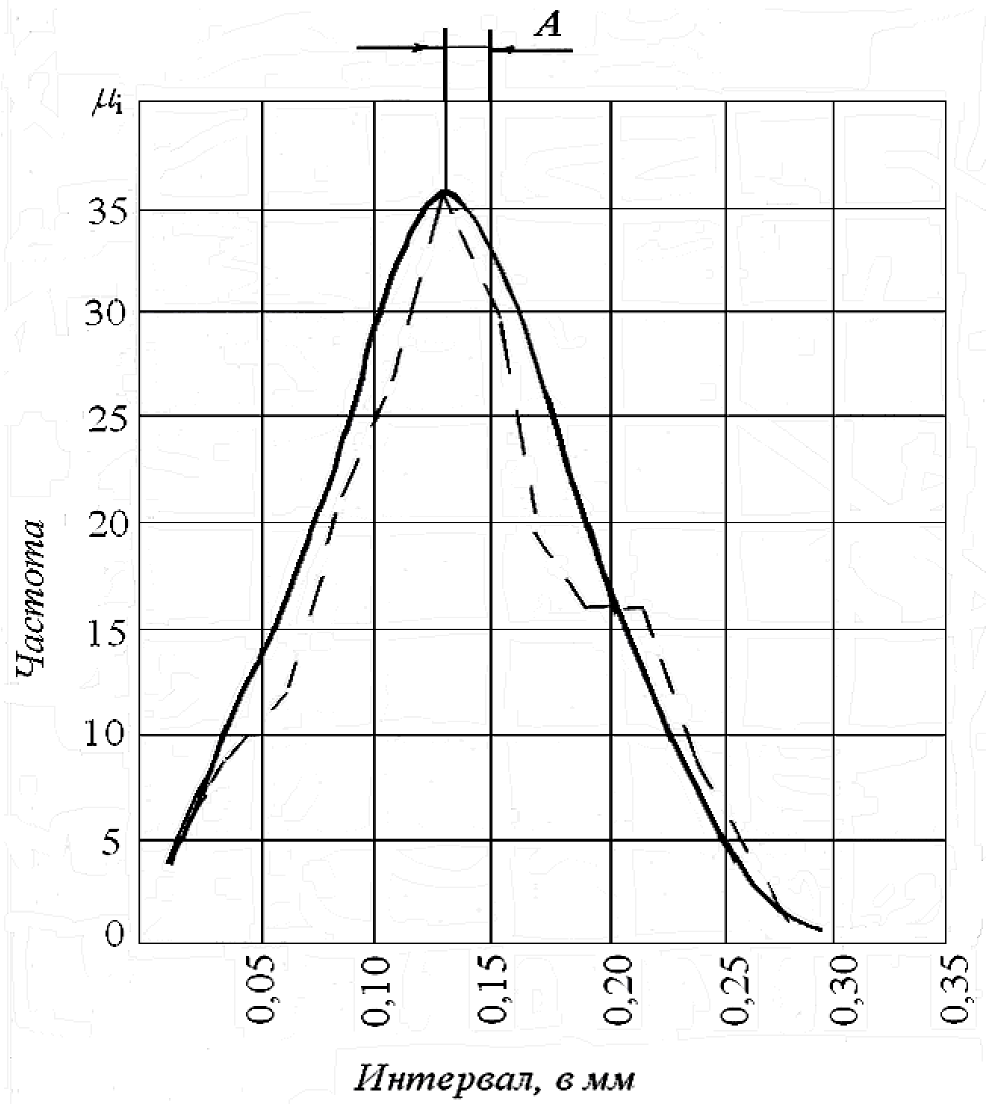

Рис. 1.2. Графическое изображение эмпирического распределения (полигон распределения)

Ответ. При экспериментальной обработке результатов измерений износа 200 штук подкладок было определено, что глубина износа находится в доверительном интервале от 0,11 до 0,22 мм. При этом величина доверительной погрешности равна 0,100094 мм. Расчеты проводились при доверительной вероятности P = 0,95.

1.2 Задачи для самостоятельного решения

Произвести обработку экспериментальных данных с определением доверительного интервала и величины доверительной погрешности.

Вариант 1

1 В результате измерения вертикального износа головки рельсов был получен следующие ряд чисел (мм):

Величина	2,78	2,80	2,82	2,84	2,86	2,88	2,90	2,92	2,94
Количество измерений	4	5	5	6	7	10	11	10	12
Величина	2,96	2,98	3,00	3,02	3,04	3,06	3,08	3,10	3,12
Количество измерений	14	16	15	14	12	11	8	5	4

Произвести обработку экспериментальных данных.

---

2 В результате проверки численности монтеров пути в путевых бригадах дистанций пути были получены следующие результаты:

12; 9; 12; 10; 8; 12; 11; 10; 13; 14; 12; 14; 9; 13; 14; 11; 10; 14; 13; 9; 12; 10; 11; 12; 13; 10; 9; 11; 10; 11; 9; 13; 11; 10; 12; 10; 11; 12; 13; 10; 11; 12; 9; 13; 10; 8; 12; 10; 11; 13; 8; 14; 11; 10; 8; 12; 9 (чел.).

Произвести обработку экспериментальных данных.

Вариант 2

1 В результате расчета модуля упругости подрельсового основания пути с железобетонными шпалами были получены следующие результаты (МПа):

Величина	91,3	90,9	91,7	92,1	91,9	92,5	92,3	91,5
Количество измерений	7	6	9	10	9	11	12	8
Величина	90,7	91,1	92,7	93,3	92,9	93,1	93,5	
Количество измерений	4	5	10	7	9	8	6	

Провести обработку экспериментальных данных.

---

2 В результате измерения вертикального износа головки рельсов были получены следующие числа (мм):

Величина	3,40	3,25	3,15	3,20	3,10	3,05	3,30	3,45	3,55	3,50	3,35	3,60
Количество измерений	11	11	7	8	6	5	11	10	6	8	12	4

Произвести обработку экспериментальных данных.

Вариант 3

1 В результате измерения бокового износа головки рельсов на длине 25 м, были получены следующие результаты (мм):

Величина	6,50	6,75	6,85	6,60	6,65	6,55	6,95	6,80	6,90	7,00	6,70
Количество измерений	3	10	9	5	6	4	5	10	6	4	8

Произвести обработку экспериментальных данных.

2 В результате наблюдения в течение дня за температурой воздуха были получены следующие данные (град.):

Величина	20,45	20,41	20,48	20,42	20,40	20,43	20,44	20,49	20,46	20,50	20,47
Количество измерений	25	8	12	10	5	18	20	8	18	4	16

Произвести обработку экспериментальных данных.

Вариант 4

1 В результате измерения вертикальных неровностей на поверхности катания головки рельса, были получены следующие значения (мм):

Величина	1,11	1,07	1,15	1,08	1,05	1,16	1,17	1,09	1,12	1,06	1,10	1,13	1,14
Количество измерений	20	12	6	20	5	5	4	22	18	8	26	14	10

Произвести обработку экспериментальных данных.

2 В результате измерения ширины колеи участка железнодорожной линии на прямой были получены следующие значения (мм):

Величина	1520	1517	1522	1524	1526	1516	1521	1518	1523	1525	1519
Количество измерений	12	6	18	10	6	4	18	8	17	8	16

Произвести обработку экспериментальных данных.

1.3 Обработка результатов эксперимента при малой выборке (n < 25)

При малом объеме выборки (n < 25) нет необходимости определять интервалы и считать значения моментов третьего и четвертого порядков.

В этом варианте значение доверительной вероятности обычно задается.

Среднее арифметическое значение определяется по формуле

$$X_{cp} = X_o + \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_o)}{n}, \qquad (16)$$

где X_o – условное значение, принимаемое равным X_{min};

X_i − значение случайной величины, полученное в результате эксперимента;

n – количество измерений.

Среднее квадратическое отклонение можно определить по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_0)^2}{n} - (X_{cp} - X_0)^2 \right]}. \qquad (17)$$

В результате обработки экспериментальных данных определяют доверительный интервал и доверительную погрешность по формулам (14 и 15).

Пример. При измерении толщины подрельсовой прокладки были получены следующие результаты: 12,15; 12,09; 12,06; 12,08; 12,12; 12,16; 12,13; 12,01 (мм).

Расчет произвести при доверительной вероятности P = 0,99 в табличной форме (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Обработка результатов измерений по «малой выборке»

Толщина прокладки, X_i, мм	$X_\mathrm{i} - X_0$	$(X_\mathrm{i} - X_0)^2$	Примечание
12,15	0,15	0,0225	Принять X_o = 12,0 мм
12,09	0,09	0,0081	
12,06	0,06	0,0036	
12,08	0,08	0,0064	
12,12	0,12	0,0144	
12,16	0,16	0,0256	
12,13	0,13	0,0169	
12,01	0,01	0,0001	
Итого	0,80	0,0976	

Среднее арифметическое значение найти по формуле (16)

$$X_{cp} = 12{,}0 + \frac{0{,}8}{8} = 12{,}10 \text{ (мм)}.$$

Среднее квадратическое отклонение определить по формуле (17)

$$S = \sqrt{\frac{1}{7}\left[\frac{0{,}0976}{8} - 0{,}1^2\right]} = \sqrt{0{,}0003} = 0{,}018 \text{ (мм)}.$$

При k = 8 – 1 = 7 и P = 0,99 из таблицы приложения А найти t_α = 3,5.

Тогда доверительная погрешность будет равна

$$\varepsilon = \pm\, 3{,}5 \cdot 0{,}018 = \pm\, 0{,}063 \text{ (мм)}.$$

С вероятностью P = 0,99 можно утверждать, что генеральная средняя лежит в интервале 12,1 – 0,063 < X < 12,1 + 0,063 или 12,04 < X < 12,16 (мм).

Ответ. Обработав результаты измерений толщины подрельсовой прокладки по «малой выборке» получили, что значение генеральной средней измерений лежит в интервале от 12,04 до 12,16 мм с доверительной погрешностью ± 0,063 мм. Обработка произведена с доверительной вероятностью P = 0,99.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

Произвести обработку экспериментальных данных с определением доверительного интервала и доверительной погрешности по «малой выборке».

Вариант 1

1 Измеренные расстояния от точки *А* до точки *Б* определились следующими величинами:

120,575; 120,577; 120,583; 120,580; 120,574; 120,586; 120,576; 120,588(м).

Произвести обработку результатов эксперимента при малой выборке и определить значение ширины колеи с вероятностью 98%.

2 Замерив длину 10-ти штук 25-ти метровых объемно закаленных рельсов, получены следующие значения:

25,000; 24,990; 25,010; 25,001; 24,995; 25,003; 24,998; 25,006 (м).

Произвести обработку результатов эксперимента при малой выборке и определить длину рельса с вероятностью 99,9%.

Вариант 2

1 Сделав химический анализ стали, из которого изготовлены рельсы Р65, установлено, что содержание углерода в стали равно:

0,69; 0,71; 0,75; 0,7; 0,82; 0,73; 0,81; 0,78 (%).

Произвести обработку результатов эксперимента при малой выборке и определить процентное содержание углерода в стали с вероятностью 90%.

2 Замерив длину 10-ти железобетонных шпал, получены следующие значения:

2,695; 2,700; 2,705; 2,693; 2,698; 2,702; 2,710; 2,708; 2,692; 2,708 (м).

Произвести обработку результатов эксперимента при малой выборке и определить длину шпалы с вероятностью 99%.

Вариант 3

1 Изучая результаты измерения бокового износа рельса в кривой R-600 м, были получены следующие величины:

4,7; 4,9; 5,8; 6,2; 5,5; 5,1; 4,3; 3,8; 3,7; 5,7 (мм).

Произвести обработку результатов измерения при малой выборке и определении величину бокового износа в кривой с вероятностью 98 %.

2 Сделав химический анализ стали, из которой изготовлен рельс Р65, установлено, что содержание марганца в стали равно:

0,70; 0,76; 0,82; 0,96; 0,85; 0,90; 1,00; 0,72; 0,92; 0,73 (%).

Произвести обработку результатов измерения при малой выборке и определить процентное содержание марганца в стали с вероятностью 90%.

Вариант 4

1 Проведены замеры глубины желоба крестовин, вышедших из ремонта, получены следующие результаты:

44,6; 45,0; 44,8; 44,0; 45,2; 45,5; 46,0; 45,8; 45,1; 44,9 (мм).

Произвести обработку результатов измерений при малой выборке и определить измеряемую величину с вероятностью 99,9%.

2 После изготовления партии деталей оказалось, что действительные размеры диаметров равны:

12,579; 12,581; 12,587; 12,584; 12,578; 12,590; 12,580; 12,582; 12,588; 12,585 (мм).

Произвести обработку результатов измерения при малой выборке и определить диаметр детали с вероятностью 98%.

2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямые измерения с многократными наблюдениями – наиболее распространенная задача обработки данных.

Прямые многократные измерения проводятся для уменьшения влияния случайных и систематических погрешностей. Результат измерения x_i отличается от истинного значения измеряемой величины X из-за наличия случайной (Δ') и систематической (Δ'') погрешностей. Таким образом, значение измеренной величины можно выразить формулой:

$$x_i = X + \Delta' + \Delta''.$$

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеренной величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение. Обработка результатов измерений должна проводиться в соответствии с ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Общие положения».

Исходной информацией для обработки является ряд из «n» ($n \geq 8$) результатов измерений, где n – количество проведенных измерений, из которых исключены известные систематические погрешности. Число «n» зависит от требуемой точности полученного результата и от реальной возможности выполнения повторных измерений.

В процессе геодезических работ или при исследовании новых приборов, методов измерения часто одну и ту же величину измеряют многократно. Возникает необходимость получить наиболее надежное значение из ряда измерений и оценить точность полученных результатов.

Прямые многократные измерения делятся на *равноточные* и *неравноточные*.

2.1 Обработка результатов равноточных измерений одной величины с оценкой их точности

Измерения одной и той же величины называются *равноточными*, если они проводились одним и тем же инструментом, по одной методике, одним наблюдателем и при неизменных условиях.

Обработку прямых равноточных измерений выполняют в следующем порядке, исходя из предположения закона нормального распределения результатов и погрешностей измерений.

1 Определить вероятнейшее из всех результатов измерений значение, т.е. среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{[x_i]}{n}. \tag{2.1}$$

где $[x_i]$ – сумма результатов измерений;

n – число измерений.

2 Вычислить отклонения от арифметической середины

$$v_i = x_i - \bar{x}. \tag{2.2}$$

3 Для контроля подсчитать $[v] = 0$. Определить величину $[vv]$.

4 Вычислить средние квадратические погрешности результатов измерений и полученных значений.

Среднюю квадратическую погрешность окончательного результата измерения можно определить по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2.3}$$

или по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \tag{2.4}$$

где Δ – истинная ошибка измерения, $\Delta_i = x_i - X$;

X – истинное значение измеряемой величины.

При этом значение данной ошибки определяется с некоторой надежностью, значение которой можно определить по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{2.5}$$

Среднюю квадратическую погрешность нахождения среднего арифметического значения находят по формуле

$$m_0 = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{2.6}$$

Обработка результатов равноточных измерений одной величины включает следующие этапы:

1 Исправление результатов наблюдений исключением (если это возможно) систематической погрешности.

2 Если есть подозрение о наличии грубых погрешностей, то их исключение из результатов измерений, используя критерии.

3 Определение вероятнейшего из всех результатов измерений значения, т.е. среднего арифметического значения исправленных результатов наблюдений (по формуле 2.1).

4 Определение отклонения от арифметической середины (по формуле 2.2).

5 Определение средней квадратической погрешности результатов измерения (по формуле 2.4).

6 Определение средней квадратической погрешности среднего арифметического значения.

Пример. По результатам измерения угла, приведенным в табл. 2.1, найти наиболее надежное значение этого угла и оценить точность результатов измерений и вычисленного вероятнейшего значения угла.

Рекомендуется обработку результатов измерений выполнять в следующем порядке согласно данным табл. 2.1.

Таблица 2.1

Результаты измерений и расчетов

№ п/п	Значение измеренного угла, x_i	Уклонения, v_i''	$v_i\,v_i$
1	81°35′26″	+ 2,2	4,8
2	81°35′32″	– 3,8	14,4
3	81°35′24″	+ 4,2	17,6
4	81°35′28″	+ 0,2	0
5	81°35′33″	– 4,8	23,0
6	81°35′25″	+ 3,2	10,2
7	81°35′31″	– 2,8	7,8
8	81°35′22″	+ 6,2	38,4
9	81°35′34″	– 5,8	33,6
10	81°35′29″	– 0,8	0,6
11	81°35′25″	+ 3,2	10,2
12	81°35′30″	– 1,8	3,2
$\bar{x}$ = 81°35′28,2″		$[v]$ = – 0,6	$[vv]$ = 163,8

1 Вычислить вероятнейшее значение угла

$$\bar{x} = \frac{[x_i]}{n} = 81^{\circ}35'28{,}2''.$$

На практике вместо приведенной формулы используют рабочую, т.е.

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum \varepsilon}{n},$$

где x_0 – приближенное значение измеряемой величины,

$\varepsilon_i = l_i - x_0$.

Для приведенного примера $\bar{x} = 81^\circ 35' + \frac{338{,}4''}{12} = 81^\circ 35' 28{,}2''$.

2 Найти среднюю квадратическую погрешность результата измерения угла

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{163{,}8}{12-1}} = 3{,}9''.$$

3 Оценить надежность вычисления средней квадратической погрешности

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{3{,}9}{\sqrt{2(12-1)}} = 0{,}83''.$$

4 Определить среднюю квадратическую погрешность нахождения вероятнейшего значения угла

$$m_\beta = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}9}{\sqrt{12}} = 1{,}1''.$$

Ответ: вероятнейшее значение угла $\bar{x} = 81^\circ 35' 28{,}2''$ определено с точностью ± 1,1″.

Пример. Выполнены измерения расстояния от точки *А* до точки *Б* и получены следующие результаты: 120,575; 120,577; 120,583; 120,580; 120,574; 120,586 (м). Необходимо определить точность измерений.

Обработку результатов провести в табличной форме (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Результаты измерений и расчетов

№ измерения	Результат измерения, x_i	Уклонения, v_i	v_i^2, м^2
1	120,575	– 0,004	0,000016
2	120,577	– 0,002	0,000004
3	120,583	+ 0,004	0,000016
4	120,580	+ 0,001	0,000001
5	120,574	– 0,005	0,000025
6	120,586	+ 0,007	0,000049
Сумма	723,475	+ 0,001	0,000111

1 Найти наиболее вероятное значение измеряемой величины (т.е. среднее арифметическое значение)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{723{,}475}{6} = 120{,}579 \text{ м.}$$

2 Вычислить вероятные ошибки v_i от среднего арифметического значения по формуле:

$$v_i = x_i - \bar{x}.$$

3 Найти среднюю квадратическую погрешность результата измерения

$$m=\sqrt{\frac{v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{0{,}000111}{6-1}}=\pm\ 0{,}0047\ \text{м}.$$

4 Оценить надежность вычисления средней квадратической погрешности

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2\ (n-1)}}=\frac{0{,}0047}{\sqrt{2\ (6-1)}}=0{,}0015\ \text{м}..$$

5 Определить среднюю квадратическую погрешность нахождения среднего арифметического значения

$$m_0=\frac{m}{\sqrt{n}}=\frac{0{,}0047}{\sqrt{6}}=\pm\ 0{,}0019\ \text{м}.$$

Следовательно, измеряемая величина расстояния равна

$$x_0\pm m_0=120{,}579\ \ \pm 0{,}0019\ \text{м}.$$

Ответ. Измеряемая величина расстояния от точки *А* до точки *Б* равна 120,579 $\pm$ 0,0019 м. Измерения произведены с точностью $\pm$ 0,0019 м.

2.2 Задачи для самостоятельного решения

Результаты измерения длины линий от точки *А* до точки *Б* равны (в м) приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Задачи для самостоятельного решения

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	121,576	125,580	118,575	110,321	112,405	128,582	115,280	130,162
2	121,578	125,582	118,587	110,352	112,408	128,584	115,288	130,160
3	121,584	125,588	118,581	110,319	112,402	128,575	115,285	130,159
4	121,581	125,585	118,588	110,322	112,404	128,581	115,279	130,164
5	121,575	125,579	118,579	110,324	112,407	128,576	115,291	130,157
6	121,587	125,591	118,580	110,327	112,410	128,587	115,282	130,165

	9	10	11	12	13	14	15	16
1	131,008	133,130	135,251	120,132	96,322	100,105	108,210	212,291
2	131,012	133,132	135,250	120,128	96,327	100,100	108,214	212,279
3	131,010	133,128	135,254	120,133	96,325	100,103	108,208	212,288
4	131,006	133,133	135,252	120,125	96,320	100,110	108,211	212,280
5	131,009	133,125	135,257	120,136	96,319	100,107	108,216	212,285
6	131,013	133,136	135,255	120,130	96,323	100,104	108,212	212,282

	17	18	19	20	21	22	23	24
1	88,006	122,100	80,585	87,280	215,015	313,164	300,319	56,407
2	88,013	122,102	80,588	87,288	215,022	313,157	300,325	56,410
3	88,009	122,098	80,582	87,285	215,020	313,165	300,321	56,404
4	88,012	122,104	80,580	87,279	215,018	313,159	300,320	46,402
5	88,010	122,097	80,579	87,291	215,024	313,160	300,322	46,408
6	88,008	122,103	80,591	87,282	215,017	313,162	300,327	46,405

2.3 Обработка результатов неравноточных измерений одной величины с оценкой их точности

Неравноточными называются измерения одной и той же физической величины, выполненные с нарушением хотя бы одного из условий для равноточных измерений (с различной точностью, при различных условиях, при различном числе приемов и разными наблюдателями). Обработку таких измерений проводят с учетом оценки доверия к тому или иному отдельному результату измерения, входящему в ряд неравноточных измерений.

Вес измерения является степенью доверия к результату измерения и выражается следующими соотношениями:

$$P_i = \frac{C}{m_i^2} \text{ или } P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \tag{2.7}$$

где C – произвольное число, постоянное для данного ряда измерений;

m_i – средняя квадратическая погрешность результата измерения;

μ – ошибка единицы веса.

Если средние квадратические погрешности измерений не известны, то их определяют косвенным способом в зависимости от инструментальной точности средств измерений. Для угловых и линейных измерений веса вычисляют по следующим формулам:

$$P_i = C \times n_i \text{ (для угловых измерений);}$$

$$P_i = \frac{C}{S_i} \text{ (для линейных измерений),}$$

где n_i – число измерений угла одним и тем же прибором;

S_i – длина линии.

При С = 1 $P_i = n_i$.

Ошибка единицы веса служит общим показателем точности системы неравноточных измерений. Ее можно вычислить по формулам

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \text{ или } \mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \tag{2.8}$$

В случае неравноточных измерений арифметическая средина определяется как весовое среднее по формуле

$$\bar{x}_0 = \frac{[px]}{[p]} \tag{2.9}$$

$$\text{или } \bar{x}_0 = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]},$$

где $\varepsilon_i = x_i - x_0$.

При этом вес общей арифметической средины будет равен сумме весов результатов измерений, т.е. $P_0 = [p]$.

Средняя квадратическая погрешность весового среднего вычисляется по формуле

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{P_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} \qquad (2.10)$$

Обработку результатов неравноточных измерений одной величины выполняют в следующей последовательности:

1 Установить веса согласно выражениям 2.7 или косвенным способом.

2 Вычислить наиболее надежное значение по формуле 2.9.

3 Определить отклонения от арифметической середины и вычислить $p_i v_i$ и $[pv]$. Контролем служит равенство $[pv] = 0$.

4 Вычислить значение ошибки единицы веса (по формуле 2.8), ее надежность, а также среднюю квадратическую погрешность наиболее надежного значения по формуле 2.10.

Пример 1 (известны средние квадратические погрешности каждого угла).

В процессе измерения угла точным теодолитом были получены следующие результаты (табл. 2.4).

Веса результатов измерений P_i вычислить по формуле

$$P_i = \frac{C}{m_i^2}.$$

В данном случае за единицу веса можно принять вес угла, измеряемого двумя приемами.

Таблица 2.4

Результаты измерений и расчетов (С = 30)

№ измерения	Результат измерения, β_i	m_i, сек	Вес, P_i	Уклонения, v_i	$P_i\, v_i$	$P_i\, (v_i)^2$
1	64°24′33″	3,82	2	+ 5,1	+ 10,2	52,02
2	26″	2,24	6	– 1,9	– 11,4	21,66
3	22″	5,48	1	– 5,9	– 5,9	34,81
4	30″	2,45	5	+ 2,1	+ 10,5	22,05
5	32″	3,82	2	+ 4,1	+ 8,2	33,62
6	25″	2,74	4	– 2,9	–11,6	33,64
Σ		40	20	+ 0,6	0	197,80

Порядок обработки

1 Определить наиболее вероятное значение угла $\bar{x}_0$ (среднее арифметическое значение угла с учетом веса)

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum P_i \cdot \beta_i}{\sum P_i} = \frac{2 \cdot 33'' + 6 \cdot 26'' + 1 \cdot 22'' + 5 \cdot 30'' + 2 \cdot 32'' + 4 \cdot 25''}{20} = 64^{\circ}24'27{,}9''.$$

2 Определить вероятнейшую ошибку v_i (уклонение) от среднего арифметического значения

$$v_i = \beta_i - \bar{x}_0.$$

3 Определить среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum P_i \cdot (v_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{197{,}8}{6-1}} = \pm\ 6{,}3''.$$

4 Определить среднюю квадратическую погрешность весового среднего по формуле

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\sum P_i}} = \frac{6{,}3''}{\sqrt{20}} = \pm\, 1{,}4''.$$

5 Окончательный результат измерения угла составил

$$\bar{x}_0 = 64°24'27{,}9'' \pm 1{,}4''.$$

6 Истинное значение измеряемой величины находится в интервале

$$64°24'26{,}5'' \div 64°24'29{,}3''.$$

Точность выполненных измерений (средняя квадратическая погрешность единицы веса) составила $\mu = \pm\, 1{,}4''$.

Пример 2 (каждый угол измерялся различным числом приемов). Результаты измерений и расчетов приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Результаты измерений и расчетов (С = 0,5)

№ измерения	Результат измерения, β_i	Число приемов, n	Вес, P_i	$\beta_i - x_0$	P_i $(\beta_i - x_0)$	$P_i \cdot (\beta_i - x_0)^2$	v_i	$P_i\ v_i$	$P_i \cdot (v_i)^2$
1	64°24′33″	4	2	+ 11″	+ 22″	242	+ 5,1	+ 10,2	52,02
2	26″	12	6	+ 4″	+ 24″	96	– 1,9	– 11,4	21,66
3	22″	2	1	0	0	0	– 5,9	– 5,9	34,81
4	30″	10	5	+ 8″	+ 40″	320	+ 2,1	+ 10,5	22,05
5	32″	4	2	+ 10″	+ 20″	200	+ 4,1	+ 8,2	33,62
6	25″	8	4	+ 3″	+ 12″	36	– 2,9	–11,6	33,64
Σ		40	20		+ 118″	894	+ 0,6	0	197,80

1 Выбрать приближенное значение измеряемой величины x_0 (минимальное из всех значений):

$$x_0 = 64°24'22''$$

и определить разность $\varepsilon_i = \beta_i - x_0$.

2 Определить среднее весовое значение измеряемой величины по формуле

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{[P \cdot \varepsilon]}{[P_i]} = 64°24'22'' + \frac{118''}{20} = 64°24'27{,}9''.$$

3 Вычислить уклонения от среднего весового

$$v_i = \beta_i - \bar{x}_0.$$

4 Определить среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum P_i \cdot (v_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{197{,}8}{6-1}} = \pm\ 6{,}29''.$$

5 Определить среднюю квадратическую погрешность окончательного значения измеряемой величины по формуле 2.10:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{6{,}29''}{\sqrt{20}} = \pm 1{,}4''.$$

6 Вероятнейшее значение угла составит

$$\bar{x}_0 = 64°24'27{,}9'' \pm\ 1{,}4''.$$

7 Значение измеряемой величины находится в интервале

$$64°24'26{,}5'' \div 64°24'29{,}3''.$$

Точность фиктивного измерения, вес которого равен единице, составило ± 1,4″.

Проверка:

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 894 - \frac{118^2}{20} = 894 - 696{,}2 = 197{,}8.$$

$$197{,}8 = 197{,}8$$

Вывод. При обработке результатов неравноточных измерений угла точным теодолитом установлены веса. Определено, что истинное значение измеряемой величины угла находится в интервале 64°24′26,5″ ÷ 64°24′29,3″, а точность фиктивного измерения с весом, равным единице, получилась ± 1,4″.

2.4 Задачи для самостоятельного решения

Результаты измерения горизонтального угла точным теодолитом приведены в табл. 2.6. Обработку этих данных выполнить в таблице, аналогичной табл. 2.5.

Таблица 2.6

Задачи для самостоятельного решения

Вариант / № измер.		1	2	3	4	5	6
1	α	$65^0 28'36''$	$66^0 29'25''$	$64^0 29'25''$	$55^0 15'20''$	$50^0 22'10''$	$52^0 20'18''$
	К	8	6	10	18	5	3
2	α	28″	32″	27″	22″	15″	20″
	К	6	10	8	8	8	10
3	α	20″	37″	20″	25″	12″	22″
	К	4	4	1	2	3	8
4	α	32″	36″	30″	23″	18″	25″
	К	5	2	4	6	10	4
5	α	25″	34″	26″	27″	14″	21″
	К	10	1	10	3	5	5
6	α	22″	38″	23″	26″	16″	24″
	К	4	3	6	2	3	8

Продолжение табл. 2.6

№ измер.		Вариант 7	8	9	10	11	12
1	α	$58^0 15'36''$	$60^0 25'15''$	$45^0 00'16''$	$70^0 33'30''$	$30^0 10'18''$	$32^0 25'15''$
	К	6	10	6	6	2	10
2	α	28″	10″	09″	32″	22″	10″
	К	8	5	18	10	6	5
3	α	32″	18″	06″	28″	20″	18″
	К	4	10	3	12	5	10
4	α	20″	20″	10″	34″	23″	20″
	К	5	5	15	8	6	5
5	α	22″	13″	13″	29″	27″	13″
	К	10	2	6	2	3	2
6	α	25″	16″	18″	35″	16″	16″
	К	4	4	2	1	3	4
№ измер.		Вариант 13	14	15	16	17	18
1	α	$25^0 29'35''$	$28^0 29'35''$	$35^0 20'15''$	$20^0 28'36''$	$60^0 27'33''$	$15^0 00'10''$
	К	10	6	10	8	10	6
2	α	27″	32″	10″	35″	26″	12″
	К	8	10	5	6	12	18
3	α	20″	37″	18″	32″	22″	09″
	К	1	4	10	10	12	3
4	α	30″	36″	20″	37″	30″	13″
	К	4	2	5	4	10	6
5	α	26″	34″	13″	34″	32″	18″
	К	10	2	2	1	4	2
6	α	23″	38″	16″	38″	25″	16″
	К	6	3	4	3	8	6
№ измер.		Вариант 19	20	21	22	23	24
1	α	$18^0 10'00''$	$20^0 10'18''$	$48^0 30'25''$	$68^0 10'12''$	$85^0 45'30''$	$90^0 15'22''$
	К	1	2	6	10	12	8
2	α	05″	22″	28″	10″	28″	25″
	К	10	6	8	2	8	6
3	α	10″	20″	32″	15″	32″	18″
	К	2	5	4	3	10	2
4	α	08″	23″	20″	11″	25″	20″
	К	5	6	10	8	6	10
5	α	03″	27″	27″	18″	22″	26″
	К	2	3	8	3	3	3
6	α	01″	16″	26″	16″	29″	23″
	К	6	3	3	2	1	5

Окончание табл. 2.6

Вариант / № измер.		25	26	27	28	29	30
1	α	$33^0 10'00''$	$44^0 20'15''$	$22^0 10'18''$	$72^0 33'30''$	$21^0 10'12''$	$26^0 20'18''$
	К	8	3	10	1	6	10
2	α	30″	08″	05″	22″	25″	28″
	К	10	8	12	10	8	15
3	α	08″	05″	10″	30″	18″	32″
	К	12	3	2	2	4	11
4	α	02″	10″	08″	32″	20″	20″
	К	1	12	8	5	10	18
5	α	12″	18″	01″	25″	26″	00″
	К	2	15	6	2	8	16
6	α	28″	32″	03″	16″	23″	01″
	К	3	1	3	5	3	4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 **Сергеев, А.Г.** Метрология: учеб. пособие для вузов / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. – М. : Логос, 2000. – 408 с.

2 **Яблонский, О.П.** Основы стандартизации, метрологии, сертификации: учебник / О.П. Яблонский, И.А. Иванова. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – Ростов н/Д : Феникс, 2010. – 475 с.

3 ГОСТ 8.207-76 «Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения» – М. : СТАНДАРТИНФОРМ, 2008.

4 **Губеладзе, А.Р.** Методические указания к заданиям по курсу «Теория математической обработки геодезических измерений». Ошибки измерений. / А.Р. Губеладзе, Е.Н. Яговкина. – Ростов н/Д : РГСУ, 2012. – 29 с.

5 **Добрынин, Н.Ф.** Математическая обработка геодезических измерений: учеб. пособие / Н.Ф. Добрынин. – Ростов н/Д : ФГБОУ ВПО РГУПС, 2013. – 56 с.

Приложение А

Значения t_{α} (коэффициента Стьюдента) в зависимости от *k* степеней свободы и от вероятности *P*

k \ P	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,999
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,360	212,200	318,300	636,600
2	2,29	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Учебное издание

Гурова Ольга Ефимовна
Пимшина Татьяна Михайловна

МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ

Часть 3

Печатается в авторской редакции

Технический редактор М.А. Гончаров

Подписано в печать 30.12.15. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,63.
Тираж экз. Изд. № 50139. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.